FEP2196 – Física para Engenharia II
Prova P3 – 10/12/2009 – Gabarito

Formulário

$$x' = \gamma(v)(x - vt) \qquad t' = \gamma(v)(t - \frac{v}{c^2}x) \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \gamma(v)(x' + vt') \qquad t = \gamma(v)(t' + \frac{v}{c^2}x') \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$l = \frac{1}{\gamma(v)} l_0 \qquad \tau = \gamma(v)\tau_0$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \qquad u'_y = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$\vec{p} = \gamma(v) m_0 \vec{v} \qquad E = \gamma(v) m_0 c^2 \qquad E^2 = p^2c^2 + {m_0}^2 c^4$$

$$\text{sen}30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{sen}45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Questão 1: GP do Brasil e Supernova

No Grande Prêmio (GP) do Brasil de Fórmula 1 em Interlagos, o piloto A ganha a corrida cruzando a linha de chegada um segundo antes do piloto B. Supondo que o autódromo de Interlagos possa ser considerado um referencial inercial (S), responda:

(a) [1,0] A ordem de chegada é a mesma em qualquer referencial S' que se move com relação a S, independentemente de sua velocidade com relação a S? Mostre que o intervalo de tempo entre as chegadas dos pilotos medido em S é sempre *menor ou igual* a um intervalo de tempo medido em um outro referencial S'.

R: Em S,

$$\Delta t = 1\,\text{s} \quad , \quad \Delta x = 0$$

Já em S',

$$\Delta t' = \gamma(v)(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) = \gamma \Delta t > \Delta t\ .$$

Portanto, a ordem de chegada é inalterada ($\Delta t > 0$ e $\Delta t' > 0$), e o intervalo de tempo em S' é sempre maior que o em S.

(b) [0,5] Um ano depois da corrida (em S) ocorre uma explosão de uma "estrela supernova" a 100 anos-luz de distância da terra (obs: 1 ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano). Quantos anos depois do final da corrida a luz da explosão da supernova será observada por astrônomos na terra?

R: O tempo é 1 ano + 100 anos-luz/c = 101 anos.

(c) [1,0] Para um observador situado em um referencial inercial S', que se *afasta* de S com velocidade v, a explosão da supernova ocorre um ano *antes* do GP do Brasil. Estime a velocidade do sistema S' com relação a S em m/s (considere a velocidade da luz como sendo $c = 3.0 \times 10^8$ m/s; se você achar necessário, utilize também o fato de que um ano corresponde a aproximadamente 3×10^7 s).

R: Temos que o evento da explosão da supernova, que no referencial S ocorre em $t_2 = 1$ ano, e $x_2 = 100$ anos-luz, ocorre em S' num instante:

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) = -1\,\text{ano}$$

Agora, usando que $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e resolvendo para v obtemos que:

$$v = \frac{200}{10^4 + 1}c \simeq 6 \times 10^6\,\text{m/s}\ .$$

Questão 2: Metralhadora espacial

Uma metralhadora atira balas relativísticas com velocidade 0,5 c, a uma taxa de 60 balas por minuto, contra uma espaçonave inimiga. A nave inimiga, por sua vez, se aproxima da metralhadora com velocidade 0,5 c.

(a) [0,5] Qual é a distância entre as balas no referencial da metralhadora (S)?

R: Em S temos que

$$\lambda = 0.5c \times 1\,\mathrm{s} = 1,5 \times 10^8\,\mathrm{m}\ .$$

(b) [0,5] Calcule o intervalo de tempo entre dois disparos consecutivos no referencial da nave (S')?

R: Dilatação temporal aplicada ao intervalo $\tau = 1$ s de disparos em S:

$$\tau' = \gamma(v = 0,5c)\tau = \frac{2}{\sqrt{3}} = \simeq 1,15\,\mathrm{s}\ .$$

(c) [0,5] Qual a velocidade das balas no referencial S'?

R: Vamos chamar de u a velocidade da bala no referencial S, e u' será a velocidade no referencial S'. Vamos também supor que a metralhadora está no eixo x, à esquerda da nave inimiga, que se move para a esquerda (na direção $-\hat{x}$) com velocidade 0,5 c.

Usando a fórmula para a transformação de velocidades na direção paralela ao movimento relativo entre os referenciais, temos que a velocidade das balas é dada por:

$$u' = \frac{0,5\,c - (-0,5\,c)}{1 - \frac{(0.5\,c)(-0,5\,c)}{c^2}} = \frac{1\,c}{5/4} = \frac{4}{5}c\ = 2,4 \times 10^8\,\mathrm{m/s}\ .$$

(d) [1,0] Qual é a distância entre balas consecutivas no referencial da nave (S')?

R: É a distância ($u'\tau'$) percorrida pela bala no intervalo entre disparos (τ') menos a distância ($v\tau'$) percorrida pela metralhadora no mesmo intervalo de tempo.

$$\lambda' = (u' - v)\tau' = (\frac{4}{5} - 0,5)c\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}c = 1,04 \times 10^8\,\mathrm{m}\ .$$

Questão 3: Nave espacial que "engole" asteróide

Uma espaçonave cruza nossa galáxia com os propulsores desligados e uma velocidade v próxima da velocidade da luz, medida no referencial S que está em repouso com relação à galáxia. Ao longo da trajetória da nave ela captura um pequeno asteróide que estava em repouso na galáxia, aumentando assim sua massa e diminuindo um pouco sua velocidade.

Sendo M e m as massas de repouso da nave e do asteróide, respectivamente, responda (deixando, quando necessário, suas respostas em função de $\gamma(v) = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$):

(a) [1,0] Qual a velocidade final u da nave (após a captura) para um observador em repouso na galáxia (no referencial S)?

R: Usando conservação de energia e momento, temos que, no referencial S:

$$\gamma(v)Mv = \gamma(u)M_f u\ ,$$

e

$$\gamma(v)Mc^2 + mc^2 = \gamma(u)M_f c^2\ ,$$

onde u é a velocidade da nave após ela capturar o asteróide, e M_f é a massa final da nave após a captura (note que $M_f \neq M + m$, pois se trata de um choque inelástico!)

Substituindo $\gamma(u)M_f$ da segunda equação na primeira, temos que:

$$u = \frac{\gamma(v)M}{\gamma(v)M + m}v\ .$$

(b) [1,0] Agora tome o referencial (S'), que está em repouso com relação à nave antes da captura. Nesse referencial, qual a velocidade final u' da nave depois de capturar o asteróide?

R: Novamente, usamos conservação de energia e momento, agora no referencial S'. Note que, se a velocidade relativa da nave com relacão ao asteróide é v, então a velocidade relativa do asteróide com relação à nave é $-v$ (vetorialmente, é claro). Temos então que:

$$-\gamma(v) m v = -\gamma(u') M_f u' \ ,$$

e

$$\gamma(v) m c^2 + M c^2 = \gamma(u') M_f c^2 \ ,$$

onde u' é a velocidade da nave após ela capturar o asteróide, no referencial S', e M_f é a massa final da nave após a captura (note que a massa de repouso M_f é a mesma nos dois referenciais!)

Substituindo $\gamma(u')M_f$ da segunda equação na primeira, temos que:

$$u' = \frac{\gamma(v) m}{\gamma(v) m + M} v \ .$$

Note também que poderíamos ter chegado a essa expressão utilizando a transformação de velocidades, obtendo u' em função de u e de v. O resultado seria idêntico ao obtido acima – a menos de um pouco de álgebra.

(c) [0,5] Qual a massa de repouso final da nave depois de capturar o asteróide? Deixe sua resposta em termos dos γ's das velocidades.

R: Podemos obter a massa de qualquer uma das equações de conservação de energia, no referencial S ou no referencial S'. Temos que:

$$M_f = \frac{\gamma(v) M + m}{\gamma(u)} = \frac{\gamma(v) m + M}{\gamma u'} \ .$$

É fácil (embora um pouco trabalhoso) verificar que as duas expressões acima são iguais – mas isso não foi exigido na prova.

Questão 4: Colisão de partículas idênticas

Um choque envolve duas partículas idênticas de massa de repouso m_0. Antes da colisão uma das partículas (1) estava se movendo na direção x de encontro à outra (2), que estava inicialmente parada num referencial S. A energia da partícula (1) antes da colisão, medida no referencial S, era de $5\, m_0\, c^2$.

Sabendo que o choque foi elástico e que as duas partículas emergem com energias cinéticas iguais, responda (sempre no referencial S):

(a) [0,5] Qual é a energia cinética inicial do sistema, antes do choque?

R:

$$K = K_1 = [\gamma(v) - 1]\, m_0\, c^2 = 4\, m_0\, c^2 \ .$$

(b) [1,0] Mostre que depois do choque as componentes do momento linear das duas partículas na direção x são iguais, e determine as componentes do momento final da partícula (1), $p_x^{(1)}$ e $p_y^{(1)}$ em termos de $m_0 c$.

(c) [1,0] Qual é o ângulo entre as trajetórias das duas partículas depois do choque?

R: Primeiro, vamos escrever a energia antes do choque:

$$E_i = E_1 + E_2 = 5\, m_0\, c^2 + m_0\, c^2 = 6\, m_0\, c^2 \ .$$

Depois do choque, as partículas saem com velocidades iguais em módulo (u), portanto, por conservação de energia:

$$E_f = 2\,\gamma(u)\, m_0\, c^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma(u) = 3 \ .$$

Agora, podemos obter v e u sabendo que $\gamma(v) = 5$ (do enunciado e do item anterior), e que $\gamma(u) = 3$. Obtemos que:

$$v = \sqrt{\frac{24}{25}}\, c \quad , \quad u = \sqrt{\frac{8}{9}}\, c \; .$$

Quanto ao momento inicial, temos que

$$\vec{P}_i = \gamma(v)\, m_0\, v\, \hat{x} \; .$$

Como as velocidades escalares finais das duas partículas são iguais (u), então claramente as componentes dessas velocidades na direção y têm que ser iguais mas com sentidos opostos ($u_y^{(2)} = -u_y^{(1)}$), para que haja conservação de momento naquela direção. Isso significa que na direção x as componentes das velocidades finais das duas partículas são idênticas ($u_x^{(2)} = u_x^{(1)}$). Portanto, no estado final as duas partículas têm a mesma quantidade de movimento na direção x, que então é a metade da quantidade de movimento inicial.

Temos então que:

$$\vec{P}_f = 2\, \gamma(u)\, m_0\, u_x\, \hat{x} = 2 \, \times \, 3 \, \times \, m_0 \, \times \, \sqrt{\frac{8}{9}}\, c \, \times \, \cos\theta\, \hat{x} \; = 4\,\sqrt{2}\, \cos\theta\, m_0\, c\, \hat{x};\, ,$$

onde θ é o ângulo que $\vec{u}$ (de qualquer uma das duas partículas) faz com o eixo x. Mas o momento inicial está dado acima, e vale:

$$\vec{P}_i = \gamma(v)\, m_0\, v\, \hat{x} = 5\, m_0\, \sqrt{\frac{24}{25}}\, c\, \hat{x} = 2\,\sqrt{6}\, m_0\, c\, \hat{x} \; .$$

Igualando o momento inicial com o momento final, temos que:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ \; .$$

Assim, finalmente temos que a **resposta para o item (b)** é:

$$p_x^{(1)} = \gamma(u)\, m_0\, u\, \cos\theta = \frac{1}{2} P_i = \sqrt{6}\, m_0\, c \; ,$$
$$p_y^{(2)} \; = \; \gamma(u)\, m_0\, u\, \mathrm{sen}\theta = \sqrt{2}\, m_0\, c \; .$$

Dessas expressões também podemos obter que $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 2\sqrt{2}\, m_0\, c$, o que confere com a expressão $p = \gamma(u) m_0 u$.

A **resposta para o item (c)** é portanto a seguinte: a primeira partícula emerge num ângulo de 30° com respeito ao eixo x; a segunda partícula emerge num ângulo -30° com respeito ao eixo x. Portanto, o ângulo entre as trajetórias das partículas é de 60°.