Problemas

1) (2,5) Um bloco de massa $m = 0,05$ kg, apoiado sobre uma mesa horizontal sem atrito, está ligado à extremidade de uma mola de constante elástica $k = 20$ N/m. Este conjunto está imerso em um recipiente com líquido, cujo coeficiente de atrito viscoso é $\sigma = 1$ kg/s. Nessas condições o oscilador é mantido em regime estacionário devido a uma força externa $F = F_0 \cos(\Omega t)$, com $F_0 = 40$ N.

a) (0,5) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento. Qual é a frequência natural de oscilação ω_0?

b) (1,0) No regime estacionário, escreva a solução desta equação, e determine o valor de Ω para que a potência absorvida seja máxima. Deixe suas contas indicadas, explicitando cada valor numérico presente nas expressões.

c) (1,0) Se a força externa for desligada ($F_0 = 0$) o movimento subsequente será oscilatório? Justifique sua resposta

3) Duas ondas transversais de mesma freqüência angular $\omega = 10rad/s$ produzidas em um fio cuja densidade linear de massa é $10g/m$ e está sujeito a uma tensão de $100N$. Sabendo-se que as equações das ondas produzidas no fio têm a seguinte forma:

$y_1 = a\cos(kx - \omega t)$

$y_2 = bsen(kx - \omega t)$

onde: $a = 3cm$ e $b = 4cm$

Pede-se calcular:

a) (1,0) A equação da onda resultante.

b) (0,5) A intensidade resultante.

c) (1,0) Mantendo fixa a fase da segunda onda, determine uma nova fase para a primeira onda de modo que a amplitude da onda resultante aumente em 40%, em relação à intensidade do ítem b)

(OBS: Devido a uma certa ambiguidade na formulação do item c, serão consideradas corretas respostas que considerem tanto que a amplitude tenha aumentado em 40%, quanto aquelas que considerem que a intensidade tenha aumentado em 40%.)

4) Um fio de comprimento L e densidade linear de massa μ está sendo tracionado por um bloco de massa M como representado na figura. Se uma onda estacionária de frequência f é formada no fio onde nas duas extremidades $x = 0$ e $x = L$ temos dois nós. Pede-se calcular:

a) (1,0) A massa necessária para que na corda se observe o terceiro harmônico.

b) (0,5) Supondo agora que μ é uma função linear de x e que $\mu = \mu_0$ para $x = 0$ e $\mu = \mu_L$ para $x = L$. Obter $\mu(x)$ para o intervalo $0 \leq x \geq L$.

c) (1,0) Mostre que o intervalo de tempo requerido para um onda percorrer o percurso de 0 a L é igual a:

$$t = \frac{2L\left(\mu_L + \mu_0 + \sqrt{\mu_L.\mu_0}\right)}{3\sqrt{T}\left(\sqrt{\mu_L} + \sqrt{\mu_0}\right)}$$

Do formulário:

$$\begin{aligned}
A^2 &= a^2 + b^2 + 2abcos(\varphi_2 - \varphi_1) \\
tg\varphi &= \frac{[asen(\varphi_1) + bsen(\varphi_2)]}{[acos(\varphi_1) + bcos(\varphi_2)]} \\
I &= 1/2\mu v\omega^2 A^2 \\
\omega_n &= k_n v = n.\pi v/L \\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}$$

Soluções:

Questão 1

a) Usando a 2a Lei de Newton:

$$m\ddot{x} = -\sigma\dot{x} - kx + F_0\cos(\Omega t)\ .$$

Assim,

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)\ ,$$

onde:

$$\gamma = \frac{\sigma}{m} = 20\,s^{-1} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} = 400\,s^{-2} \quad \text{e} \quad \frac{F_0}{m} = 800\,m\,s^{-2}$$

b) Solução no regime estacionário:

$$x(t) = A(\Omega)\cos[\Omega t + \phi(\Omega)]\ ,$$

onde:

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}\ ,$$

e

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{-\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\ .$$

A absorção da **potência** será máxima quando $\Omega_m = \omega_0 = 20$ s^{-1}. (Basta encontrar o máximo da função $I = \bar{P}(\Omega)$ dada no formulário.) Note que essa frequência que maximiza a potência é parecida, mas **não** é igual, à frequência de ressonância da **amplitude**, que seria dada por $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\gamma^2} \simeq 14\,s^{-1}$.

Assim, temos que:

$$A = 800\frac{1}{\sqrt{(400 - 20^2)^2 + 20^2 \times 20^2}} = 2\,\mathrm{m}\ ,$$

e

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{20 \times 14}{400 - 20^2}\right)\ .$$

c) Se $F_0 = 0$, então:

$$\ddot{x} + 20\dot{x} + 400x = 0\ .$$

Como $w_0^2 = 400 > \frac{1}{4}\gamma^2 = 100$, temos que o caso é de oscilações amortecidas no regime sub-crítico, e portanto, passamos a ter oscilações.

Questão 3

3a) Equação de onda

$y_1 = a\cos(kx - \omega t)$
$y_2 = bsen(kx - \omega t) = bcos(\pi/2 - kx + \omega t) = bcos(kx - \omega t - \pi/2)$
Seja $y = y_1 + y_2$; podemos escrever então que: $y = Acos(kx - \omega t + \varphi)$ onde:

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2abcos(\varphi_2 - \varphi_1);$$
$$A^2 = [3^2 + 4^2 + 2.3.4.cos(-\pi/2)].10^{-4}$$
$$A = 5.10^{-2}m$$
$$tg\varphi = \frac{[asen(\varphi_1) + bsen(\varphi_2)]}{[acos(\varphi_1) + bcos(\varphi_2)]} = \frac{[3.sen(0) + 4.sen(-\pi/2)]}{[3.cos(0) + 4.cos(-\pi/2)]} = -4/3$$

temos ainda que: $v^2 = (\omega/k)^2 = T/\mu = 100/10^{-2}$
$v = 100m/s$, logo $k = 0,1m^{-1}$
Finalmente temos que

$$y = 5.10^{-2}cos(0,1x - 10.t + arctg(-4/3))$$

3b) Intensidade

$$I = 1/2\mu v\omega^2 A^2 = 0,5.10^{-2}.100.100.(5.10^{-2})^2$$
$$I = 125.10^{-3}W$$

3c) Diferença de fase

Como $A = 5.10^{-2}$, um aumento de 40% significa que A passa a ser 7.10^{-2} logo

$$cos(\varphi_2 - \varphi_1) = (A^2 - a^2 - b^2)/2ab$$
$$cos(-\pi/2 - \varphi_1) = (49 - 9 - 16)/2.3.4 = 1 \Rightarrow$$
$$1 = \cos(-\pi/2).cos(\varphi_1) + sen(-\pi/2).sen(\varphi_1)$$
$$\varphi_1 = -\pi/2$$

Obs - Devido à ambiguidade do texto, será considerado também como correto o cálculo da fase para um aumento de 40% na intensidade.

Questão 4

4a) massa

$$f_n = n.v/2L \rightarrow 4.f^2L^2/n^2 = v^2$$
$$\frac{Mg}{\mu} = \frac{4f^2L^2}{9} \text{ logo } M = \frac{4}{9g}\mu f^2 L^2$$

4b) densidade linear μ

como μ é uma função linear de x podemos escrever que:

$$\mu(x) = m.x + b \text{ e para } x = 0;\ \mu = \mu_0 \text{ logo temos } b = \mu_0$$
$$m = \frac{\mu_L - \mu_0}{L} \text{ portanto temos}$$
$$\mu(x) = \frac{\mu_L - \mu_0}{L}x + \mu_0$$

4c) intervalo de tempo

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v} \Rightarrow t = \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{T/\mu(x)}}$$
$$t = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^L \sqrt{\frac{\mu_L - \mu_0}{L}x + \mu_0 dx}$$

Seja $\frac{\mu_L - \mu_0}{L}x + \mu_0 = u \Rightarrow x = \left(\frac{u - \mu_0}{\mu_L - \mu_0}\right)L \Rightarrow dx = Ldu/(\mu_L - \mu_0)$ portanto quando $x = 0 \Rightarrow u = \mu_0$ e quando $x = L \Rightarrow u = \mu_L$ então

$$t = \frac{L}{\sqrt{T}(\mu_L - \mu_0)}\int_{\mu_0}^{\mu_L} \sqrt{u}du = \frac{2}{3}\frac{L}{\sqrt{T}(\mu_L - \mu_0)}\ u^{3/2}\Big|_{\mu_0}^{\mu_L} \Rightarrow$$
$$t = \frac{2L\left[\left(\sqrt{\mu_L}\right)^3 - \left(\sqrt{\mu_0}\right)^3\right]}{3\sqrt{T}(\mu_L - \mu_0)} = \frac{2L\left(\mu_L + \mu_0 + \sqrt{\mu_L.\mu_0}\right)}{3\sqrt{T}\left(\sqrt{\mu_L} + \sqrt{\mu_0}\right)}$$