FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova P2 - 23/10/2008

Nome: .... **Nº USP:** ....

Assinatura: .... **Turma/Professor:** ....

Observações:

- A prova tem duração de 2 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora.
- Preencha todas as folhas, inclusive esta, com seu nome, número USP e turma, de forma legível.
- Resolva cada exercício começando na frente da folha com o mesmo número. Se necessário utilize o verso da folha.
- Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários. Não esqueça das unidades das grandezas físicas pedidas.
- Apresente sua identidade ao assinar a lista de presença.
- Quando nos resultados aparecer qualquer raiz que não seja de um quadrado perfeito, deixe indicado, sem necessidade de substituir por uma aproximação.

$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad \gamma = \frac{\rho}{m}$ $\quad x(t) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,cos(\omega t + \varphi)$ $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

$x(t) = acos(\omega_0 t) + bsen(\omega_0 t)$ $\quad x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(a\,e^{\beta t} + b\,e^{-\beta t}\right)$ $\quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$ $\quad x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\,cos(\Omega t)$ $\quad x(t) = A(\Omega)\,cos[\Omega t + \varphi(\Omega)]$ $\quad A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$

$\varphi(\Omega) = -arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$ $\quad Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ $\quad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ $\quad y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t + \delta)$

$\omega = kv$ $\quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$ $\quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\quad I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$ $\quad k_n = n\frac{\pi}{L}$

$\nu = \nu_0\frac{\left(1 \pm \frac{u}{v_s}\right)}{\left(1 \mp \frac{V}{v_s}\right)}$ $\quad \nu = \frac{\nu_0}{\left[1 - \frac{V\,cos(\theta)}{v_s}\right]}$

$\cos(a \pm b) = \cos(a)cos(b) \mp \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$ $\quad \mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) \pm \mathrm{sen}(b)\cos(a)$

---

1. Um oscilador unidimensional **não amortecido**, de massa m=0,50 kg e freqüência própria $\omega_0 = 2,0\ s^{-1}$, move-se sobre um plano horizontal sob a ação de uma força externa **não periódica** $F(t) = F_0 \exp(-\beta t)$, com $F_0 = 40\ N$ e $\beta = 6,0\ s^{-1}$. Inicialmente o oscilador encontra-se em repouso na posição de equilíbrio.

   (a) (0,5) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento do oscilador.

   Resp. :

$$m\ddot{x} + k\,x = F_0 \exp(-\beta t)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\exp(-\beta t)$$

$$\ddot{x} + 4\,x = 80\ \exp(-6t)$$

   (b) (1,0) Lembrando que a solução de uma equação diferencial não homogênea é igual à solução da homogênea somada à solução particular (equação completa), determine a função x(t) que descreve o movimento do oscilador, com as condições iniciais acima.

   Resp. :

   A solução particular $x_p(t)$ é regida pelo tipo de força aplicada:

$$x_p(t) = A\ \exp(-\beta\,t)$$

   Substituindo a função x_p e sua segunda derivada na equação diferencial, teremos:

$$\ddot{x}_p(t) = \beta^2\,A\ \exp(-\beta\,t)$$

$$\text{E.D.}: \quad \ddot{x}_p(t) + \omega_0^2\,x_p(t) = \frac{F_0}{m}\exp(-\beta t)$$

$$(\beta^2 + \omega_0^2)A = \frac{F_0}{m}$$

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{(\beta^2 + \omega_0^2)}$$

$$A = \frac{40\text{N}}{0,50\text{kg}}\frac{1}{[(6,0\,\text{rad/s})^2 + (2,0\,\text{rad/s})^2]}$$

$$A = 2,0\,\text{m}$$

   Assim, a solução particular $x_p(t)$ fica:

$$x_p(t) = 2,0\exp(-6,0\,t)$$

   A solução homogênea é a solução natural $x_n(t)$ para um M.H.S. sem amortecimento:

$$x_n(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\,\text{sen}(\omega_0 t)$$

   Aplicação das Condições Iniciais (C.I.) para a solução geral $x(t)$:

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\,\text{sen}(\omega_0 t) + 2,0\exp(-6,0\,t)$$

$$\text{C.I.}: \quad 1)\ x(0) = 0 \quad (\text{equilíbrio}) \quad e$$

$$2)\ \dot{x}(0) = 0 \quad (\text{repouso})$$

   Da condição 1):

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2,0\,\text{m}$$

   Da condição 2):

$$\dot{x} = -a\omega_0\text{sen}(\omega_0 t) + b\omega_0\cos(\omega_0 t) +$$

$$+2,0(-6,0)\exp(-6,0\,t)$$

$$\dot{x}(0) = b\omega_0 + 2,0(-6,0) = 0$$

$$b = \frac{12}{\omega_0} = \frac{12}{2,0} = 6,0\,\text{m}$$

   A solução geral será:

$$x(t) = [-2,0\cos(2,0\,t) + 6,0\,\text{sen}(2,0\,t) +$$

$$+2,0\exp(-6,0\,t)\,](\text{m})$$

   ou

$$x(t) = 2,0[\exp(-6,0\,t) - \cos(2,0\,t) +$$

$$+3,0\,\text{sen}(2,0\,t)\,](\text{m})$$

   (c) (0,5) Qual será a função x(t) no regime estacionário ($t \to \infty$) ?

   Resp : Quando ($t \to \infty$), $\exp(-\infty) \to 0$

$$x(t) = 2,0[3,0\,\text{sen}(2,0\,t) - \cos(2,0\,t)\,](\text{m})$$

(d) (0,5) O que aconteceria com o oscilador se o parâmetro β, que caracteriza a força externa, fosse negativo?

Resp :

Para $\beta < 0$, a força tenderia a infinito com o tempo: $t \to \infty \Rightarrow F(t) \to \infty$.

Neste caso, a amplitude do movimento aumentaria com o tempo, indefinidamente: $x(t) \to \infty$

2. Um corpo de massa $m = 50\ g$ está preso à uma mola de constante elástica $k = 20 N/m$ e oscila livremente ao longo de uma reta horizontal . Este oscilador é posteriormente colocado num meio viscoso, cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = \frac{3\sqrt{2}}{5}\ kg/s$. Nestas condições o oscilador é mantido em regime estacionário devido à ação de uma força externa periódica $F(t) = F_0 cos(\Omega t)$, onde $F_0 = 1,2\ N$ e $\Omega = 20\ rad/s$.

(a) (0,5) Determine a freqüência natural de oscilação (oscilação livre).

Resp. :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20\,(\mathrm{N/m})}{50 \times 10^{-3}(\mathrm{kg})}}$$

$$\omega_0 = 20 \left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$$

(b) (1,0) Determine a amplitude e a fase do movimento no regime estacionário.

Resp. : Sendo $\Omega = \omega_0$,

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\gamma\Omega}$$

onde, $\gamma = \dfrac{\rho}{m}$

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{m}{\rho\Omega} = \frac{F_0}{\rho\Omega} = \frac{1,2 \times 5}{3\sqrt{2} \times 20}$$

$$A(\Omega) = \frac{\sqrt{2}}{20}\,\mathrm{m}$$

Para a fase,

$$\varphi(\Omega) = -arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Novamente como $\Omega = \omega_0$,

$$\varphi(\Omega) = -arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2}(\mathrm{rad})$$

(c) (0,5) Para que valor de freqüência externa a amplitude do movimento será máxima?

Resp : A freqüência de ressonância Ω_R é a freqüência onde a amplitude é máxima:

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{2}}$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{5 \times 50 \times 10^{-3}}\right)^2 = (12\sqrt{2})^2$$

$$\Omega_R = \sqrt{400 - \frac{144 \times 2}{2}} = \sqrt{256} = 16\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$$

(d) (0,5) Se, subitamente, a força externa fosse desligada, o sistema passaria a oscilar com que freqüência?

Resp. :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{400 - \frac{144 \times 2}{4}}$$

$$\omega = \sqrt{328}\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$$

3. A distância entre dois ventres adjacentes de uma onda estacionária, produzida em uma corda, de densidade linear $\mu = 0,20 kg/m$, é $d = 20\ cm$. Sabe-se que uma partícula da corda, situada sobre um ventre, oscila com frequência $\nu = 100\ Hz$ e que a amplitude das ondas, que produziram a onda estacionária, é $A = 5,0\ cm$.

(a) (0,5) Determine o comprimento de onda e a velocidade de propagação das ondas progressivas que produziram a onda estacionária.

Resp. : A distância entre dois nós ou dois ventres é $\dfrac{\lambda}{2}$.

$$\lambda = 2 \times d = 2 \times 20\,(\mathrm{cm}) = 0,40\,(\mathrm{m})$$

$$v = \lambda\,\nu = 0,40\,(\mathrm{m}) \times 100\,s^{-1} = 40\,\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

(b) (1,0) Escreva a equação y(x,t) da onda estacionária, especificando os parâmetros que a caracterizam.

Resp : Em geral uma onda estacionária é descrita por:

$$y(x,t) = B\cos(kx)\cos(\omega t)$$

ou expressões equivalentes. Utilizando a expressão anterior, temos:

$$B = 2A \Rightarrow B = 0,10\mathrm{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,40} = 5\pi\,(\mathrm{rad}\,.\,\mathrm{m}^{-1})$$

$$\omega = 2\pi\nu = 200\pi\,(\mathrm{rad}\,.\,\mathrm{s}^{-1})$$

$$y(x,t) = 0,10\cos(5\pi x)\cos(200\pi t)\,(\mathrm{m})$$

(c) (0,5) Calcule a velocidade transversal máxima de um ponto situado sobre um ventre.

Resp. :

$$v_y = \dot{y} = -200\pi \times 0,10\cos(5\pi x)\,\mathrm{sen}(200\pi t)$$

Em um ventre, $\cos(5\pi x) = 1$, então

$$\dot{y}_{max} = 20\pi\,(\mathrm{m/s})$$

(d) (0,5) Determine a tensão aplicada na corda.

Resp.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = v^2\mu$$

$$T = (40\,\mathrm{m/s})^2 \times 0,20\,\mathrm{kg/m}$$

$$T = 320N$$

4. Duas locomotivas , A e B, apitam simultaneamente com mesma frequência $\nu_0 = 440\ Hz$. A locomotiva A está em repouso e a locomotiva B move-se com velocidade $V_B = 34\ m/s$, afastando-se da locomotiva A. Um homem está sobre os trilhos, e entre as locomotivas, afastando-se da locomotiva A com velocidade $u_h = 17\ m/s$. Sabendo-se que a velocidade do som no ar é $v_S = 340\ m/s$ determine:

(a) (1,0) a frequência que o homem ouve, vinda do apito da locomotiva A.

Resp. A Locomotiva A está em repouso e o homem está afastando-se de A.

$$\nu_1 = \nu_0\left(1 - \frac{u}{v_s}\right) = 440\left(1 - \frac{17}{340}\right)$$

$$\nu_1 = 440 \times 0,95 = 418\,Hz$$

(b) (1,0) a frequência que o homem ouve, vinda do apito da locomotiva B.

Resp. : O homem se aproxima da locomotiva B e a locomotiva B se afasta do homem:

$$\nu_2 = \nu_0\left[\frac{\left(1 + \frac{u}{v_s}\right)}{\left(1 + \frac{V}{v_s}\right)}\right]$$

$$\nu_2 = 440 \times \left[\frac{1 + 0,05}{1 + 0,10}\right]$$

$$\nu_2 \approx 440 \times 0,955 = 420\,Hz$$

(c) (0,5) a frequência dos batimentos (modulação de amplitude) que o homem percebe.

Resp. :

$$\nu_{batimento} = \Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$$

$$\nu_{batimento} = 420 - 418 = 2,0\,Hz$$