# FEP2196 - Física para Engenharia II

## Prova P3 - 06/12/2007 - Gabarito

1. Um trem de comprimento próprio $L_0$ move-se com velocidade $v = 0,8\ c$ em relação à estrada e dirige-se para uma ponte com extensão $d$, medido no referencial da estrada ($S$). No momento em que a dianteira do trem ($A$) passa pelo ponto $O$, no início da ponte, dois flashes de luz são disparados simultaneamente no referencial do trem ($S'$), nas extremidades do trem ($A$ e $B$). Nesse instante, dois observadores, um em $A$ e outro em $O$, sincronizam seus cronômetros em $t = t' = 0$ com a origem dos sistemas de referências $S$ e $S'$ coincidentes.

   (a) (1,0) No referencial da estrada, qual o intervalo de tempo $\Delta t$ entre os flashes de luz emitidos em $A$ e $B$?

   (b) (0,5) No referencial da estrada em que instante $t_1$ o flash de luz emitido em $A$ atinge o ponto $B$?

   (c) (1,0) No referencial do trem, quanto tempo ele leva para percorrer completamente a ponte?

SOLUÇÃO

(a) No referencial da estrada, qual o intervalo de tempo $\Delta t$ entre os flashes de luz emitidos em $A$ e $B$?

No referencial do trem ($S'$) ocorrem dois eventos simultâneos, com coordenadas espaço-tempo:

Evento $A$: flash de luz emitido em $A$ com $x'_A = 0$ e $t'_A = 0$

Evento $B$: flash de luz emitido em $B$ com $x'_B = -L_0$ e $t'_B = 0$

Usando as transformadas de Lorentz, passamos para o referencial $S$:

$$t_A = \gamma\left(t'_A + \frac{v}{c^2}x'_A\right)$$

$$t_B = \gamma\left(t'_B + \frac{v}{c^2}x'_B\right)$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{64}{100}}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$t_A = \frac{5}{3}\left(0 + \frac{0,8c}{c^2}0\right) = 0$$

$$t_B = \frac{5}{3}\left[0 + \frac{0,8c}{c^2}(-L_0)\right] = -\frac{4}{3}\frac{L_0}{c}$$

Intervalo de tempo no referencial $S$:

$$\Delta t = t_B - t_A$$

$$\boxed{\Delta t = -\frac{4}{3}\frac{L_0}{c}}$$

(b) No referencial da estrada em que instante $t_1$ o flash de luz emitido em $A$ atinge o ponto $B$?

No referencial $S'$ do trem o pulso de luz emitido em $A$ atinge o ponto $B$ de coordenada $x'_B = -L_0$ no instante de tempo

$$t'_1 = \frac{L_0}{c}$$

Usando a transformada de Lorentz para obter o tempo $t_1$ no referencial da estrada $(S)$ temos:

$$t_1 = \gamma\left(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_B\right) = \frac{5}{3}\left[\frac{L_0}{c} + \frac{0,8c}{c^2}(-L_0)\right] = \frac{5}{3}\left[\frac{L_0}{c} - \frac{8}{10}\frac{L_0}{c}\right]$$

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{3}\frac{L_0}{c}}$$

(c) No referencial do trem, quanto tempo ele leva para percorrer completamente a ponte?

No referencial do trem $(S')$ a extensão da ponte é de

$$d' = \frac{d}{\gamma}$$

Para percorrer completamente a ponte, ou seja, para que o extremo $B$ do trem atinja o final da ponte o espaço total percorrido será o comprimento do trem mais a extensão da ponte:

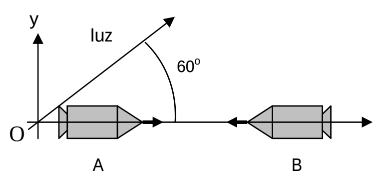
$$\Delta x' = L_0 + \frac{d}{\gamma}$$

Portanto, o tempo necessário para percorrer esse espaço é de

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{0,8c} = \frac{L_0 + \frac{d}{\gamma}}{\frac{8}{10}c} = \frac{L_0 + \frac{3}{5}d}{\frac{8}{10}c}$$

$$\boxed{\Delta t' = \frac{5L_0 + 3d}{4c}}$$

2. Num referencial $S$ duas espaçonaves $A$ e $B$ movem-se com velocidade $u = 0,5\ c$, na mesma direção mas em sentidos opostos. Cada espaçonave tem comprimento próprio igual a 100 $m$. Quando a espaçonave $A$ passa pela origem $O$, um feixe de luz é emitido partindo de $O$, formando um ângulo de 60° em relação ao eixo $Ox$, como mostra a figura.




   (a) (1,0) Determine a velocidade da espaçonave $A$ em relação a $B$.

   (b) (1,0) Qual a inclinação $\theta'$ do feixe de luz medido pelo observador na espaçonave $B$?

   (c) (0,5) Os resultados obtidos nos itens (a) e (b) são compatíveis com os postulados da relatividade? Justifique.

SOLUÇÃO

(a) Determine a velocidade da espaçonave $A$ em relação a $B$.

No referencial $S$ $\vec{u}_A = 0,5\ c\ \hat{\imath}$ e $\vec{u}_B = -0,5\ c\ \hat{\imath}$. Como queremos a velocidade da espaçonave $A$ em relação a $B$, tomaremos como referencial $S'$ a espaçonave $B$, ou seja, $\vec{v} = -0,5\ c\ \hat{\imath}$. Usando as transformadas de Lorentz para a velocidade

$$u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

temos

$$u'_A = \frac{u_A - v}{\left(1 - \frac{vu_A}{c^2}\right)} = \frac{0,5c - (-0,5c)}{\left(1 - \frac{(-0,5c)0,5c}{c^2}\right)} = \frac{0,5c + 0,5c}{1 + \frac{(0,5)^2c^2}{c^2}} = \frac{100}{125}c$$

$$\boxed{u'_A = \frac{4}{5}\, c}$$

(b) Qual a inclinação $\theta'$ do feixe de luz medido pelo observador na espaçonave $B$?

Para determinar a inclinação $\theta'$, precisamos calcular

$$tan(\theta') = \frac{u'_y}{u'_x}$$

onde $u'_y$ e $u'_x$ são as componentes da velocidade do feixe de luz medidas no referencial da espaçonave $B$ ($S'$).

No referencial $S$ o feixe de luz tem velocidade

$$\vec{u} = c\ cos(60°)\ \hat{\imath} + c\ sen(60°)\ \hat{\jmath} = \frac{1}{2}c\ \hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}c\ \hat{\jmath}$$

O referencial $S'$ (espaçonave $B$) move-se, em relação a $S$, com velocidade $\vec{v} = -0,5\ c\ \hat{\imath}$. Usando as transformadas de Lorentz para a velocidade

$$u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

temos para a velocidade do feixe de luz no referencial $S'$:

$$u'_x = \frac{\frac{1}{2}c - (-0,5c)}{\left(1 - \frac{(-0,5c)\frac{1}{2}c}{c^2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}c^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\right)}c = \frac{4}{5}c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\frac{1}{4}c^2}{c^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$u'_y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{(-0,5c)\frac{1}{2}c}{c^2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2\sqrt{3}}}c = \frac{3}{5}c$$

Então,

$$tan(\theta') = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{3c}{5}\frac{5}{4c} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\theta' = arctan\left(\frac{3}{4}\right)}$$

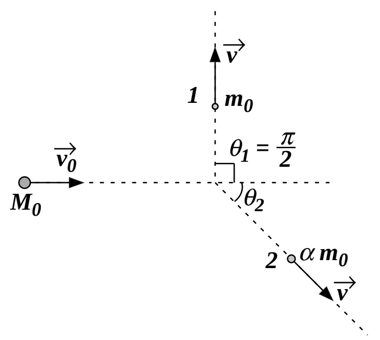
(c) Os resultados obtidos nos itens (a) e (b) são compatíveis com os postulados da relatividade? Justifique.

No item (a), o resultado clássico obtido para a velocidade da espaçonave $B$ em relação a espaçonave $A$, seria $c$, no entanto usando as transformações de Lorentz o valor obtido é inferior a $c$. No item (b), vemos que no referencial de $B$, se calcularmos a velocidade da luz, obtida pelas transformações de Lorentz, teremos:

$$u = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}c^2 + \frac{9}{25}c^2} = \sqrt{\frac{25}{25}c^2} = c$$

De fato, de acordo com o postulado da relatividade a velocidade da luz é sempre $c$, independente do movimento do observador em relação a fonte de luz.

3. Uma partícula de massa de repouso $M_0$ move-se com velocidade de magnitude $v_0 = \beta_0 c$, tal que o seu fator de Lorentz é $\gamma_0$ e, num dado instante de tempo, se desintegra em duas partículas, 1 e 2, ambas com velocidade de magnitude $v = \beta c$. As massas de repouso das partículas 1 e 2 são $m_0$ e $\alpha m_0$, respectivamente, sendo $\alpha$ uma constante, tal que $\alpha > 1$. Após a desintegração, a partícula 1 move-se na direção determinada por $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e a partícula 2 na direção determinada por $\theta_2$, conforme a figura abaixo



(a) (1,0) Escreva as equações da conservação da energia relativística (energia total) e do momento linear relativístico para este processo de desintegração.

(b) (0,5) Determine o ângulo $\theta_2$ de emissão da partícula 2, em termos de $\alpha$.

(c) (1,0) Determine o valor de $\beta$ para as partículas 1 e 2 em função de $\alpha$ e $\beta_0$.

SOLUÇÃO

(a) Escreva as equações da conservação da energia relativística (energia total) e do momento linear relativístico para este processo de desintegração.

Conservação da energia relativística $E = \gamma(v)m_0c^2$

$$\gamma_0 M_0 c^2 = \gamma(v)m_0c^2 + \gamma(v)\alpha m_0 c^2$$

$$\gamma_0 M_0 c^2 = (1+\alpha)\gamma(\beta c)m_0c^2$$

$$\boxed{\gamma_0 M_0 = (1+\alpha)\gamma(\beta c)m_0}$$

Conservação do momento linear $\vec{p} = \gamma(v)m_0\vec{v}$:

Direção $x$:

$$\gamma_0 M_0 v_0 = \gamma(v)\alpha m_0 v\, cos(\theta_2)$$

$$\gamma_0 M_0 \beta_0 c = \gamma(\beta c)\alpha m_0 \beta c\, cos(\theta_2)$$

$$\boxed{\gamma_0 M_0 \beta_0 = \gamma(\beta c)\alpha m_0 \beta\, cos(\theta_2)}$$

Direção $y$:

$$0 = \gamma(v)m_0v - \gamma(v)\alpha m_0 v\, sen(\theta_2)$$

$$\gamma(\beta c)m_0\beta c = \gamma(\beta c)\alpha m_0 \beta c\, sen(\theta_2)$$

$$\boxed{1 = \alpha\, sen(\theta_2)}$$

(b) Determine o ângulo $\theta_2$ de emissão da partícula 2, em termos de $\alpha$.

Da equação da componente $y$ da conservação do momento linear temos:

$$\alpha\, sen(\theta_2) = 1$$

então

$$\boxed{\theta_2 = arcsen\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

(c) Determine o valor de $\beta$ para as partículas 1 e 2 em função de $\alpha$ e $\beta_0$.

Da conservação da energia relativística temos:

$$\gamma_0 M_0 = (1+\alpha)\gamma(\beta c) m_0$$

Da componente $x$ da conservação do momento linear temos:

$$\gamma_0 M_0 \beta_0 = \gamma(\beta c)\alpha m_0 \beta\, cos(\theta_2)$$

Substituindo a primeira na segunda:

$$(1+\alpha)\gamma(\beta c) m_0 \beta_0 = \gamma(\beta c)\alpha m_0 \beta\, cos(\theta_2)$$

$$(1+\alpha)\beta_0 = \alpha\beta\, cos(\theta_2)$$

$$\beta = \beta_0 \frac{(1+\alpha)}{\alpha}\frac{1}{cos(\theta_2)}$$

Mas,

$$sen(\theta_2) = \frac{1}{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}$$

então

$$\beta = \beta_0 \frac{(1+\alpha)}{\alpha}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$\beta = \frac{(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha^2-1}}\beta_0$$

$$\boxed{\beta = \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\beta_0}$$

4. Uma cidade de 1 milhão de habitantes tem um consumo de energia elétrica de $0,30\ GW$. Suponha que essa energia seja gerada por um reator à fusão nuclear. (Dados: massa de repouso do H $= 935\ MeV/c^2$ e massa de repouso do $He^4 = 3718\ MeV/c^2$).

   (a) (0,5) Qual seria a energia liberada se 1 $kg$ de matéria fosse integralmente convertido em energia?

   (b) (0,5) Se toda essa energia fosse convertida em energia elétrica, estime por quanto tempo ela supriria o consumo da cidade? (considere 1 ano $\approx 3 \times 10^7\ s$).

   (c) (1,0) Em uma reação de fusão, 4 núcleos de hidrogênio ligam-se para formar um núcleo de $He^4$ liberando uma quantia de energia $\Delta E$; $4H \rightarrow He^4 + \Delta E$. Estime $\Delta E/E_0$, que representa o rendimento dessa reação onde $E_0$ é a energia inicial disponível na forma de massa.

   (d) (0,5) Com base nesse rendimento estime a massa de Hidrogênio para suprir o consumo da cidade por um ano.

SOLUÇÃO

(a) Qual seria a energia liberada se 1 $kg$ de matéria fosse integralmente convertido em energia?

A energia liberada corresponde a energia de repouso de 1 $kg$ de matéria, ou seja

$$E = m_0 c^2 = 1 \cdot (3 \times 10^8)^2\ J$$

$$\boxed{E = 9 \times 10^{16}\ J}$$

(b) Se toda essa energia fosse convertida em energia elétrica, estime por quanto tempo ela supriria o consumo da cidade? (considere 1 ano $\approx 3 \times 10^7\ s$).

A potência que deve ser fornecida para a cidade é de $P = 0,3\ GW = 0,3 \times 10^9\ J/s$. Se $E = 9 \times 10^{16}\ J$ forem fornecidos, essa energia suprirá o consumo da cidade por um intervalo de tempo $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{E}{P} = \frac{9 \times 10^{16}}{0,3 \times 10^9} = 3 \times 10^8\ s$$

$$\boxed{\Delta t = 3 \times 10^8\ s \approx 10 \text{ anos}}$$

(c) Em uma reação de fusão, 4 núcleos de hidrogênio ligam-se para formar um núcleo de $\text{He}^4$ liberando uma quantia de energia $\Delta E$; $4\text{H} \rightarrow \text{He}^4 + \Delta E$. Estime $\Delta E/E_0$, que representa o rendimento dessa reação onde $E_0$ é a energia inicial disponível na forma de massa.

A energia de repouso de 4 núcleos de Hidrogênio é

$$E_{0_H} = 4m_{0_H}c^2 = 4 \cdot 935 = 3740\ MeV$$

A energia de repouso do núcleo de $\text{He}^4$ é

$$E_{0_{He}} = m_{0_{He}}c^2 = 3718\ MeV$$

Então a energia liberada será

$$\Delta E = E_{0_H} - E_{0_{He}} = 3740 - 3718 = 22\ MeV$$

e o rendimento

$$\frac{\Delta E}{E_{0_H}} = \frac{22}{3740} = \frac{1}{170} \approx 0,006$$

$$\boxed{\text{O rendimento será de aproximadamente 0,6\%}}$$

(d) Com base nesse rendimento estime a massa de Hidrogênio para suprir o consumo da cidade por um ano.

Em 1 ano o consumo de energia será:

$$E_{ano} = (0,3 \times 10^9) \cdot (3 \times 10^7) = 9 \times 10^{15}\ J$$

que deve ser a energia liberada pela reação. Então, a energia de repouso da massa total de hidrogênio, necessária para gerar essa energia é de:

$$E_H = \frac{E_{ano}}{\frac{1}{170}} = 9 \times 10^{15} \cdot 170$$

mas

$$E_H = m_H c^2$$

$$m_H = \frac{E_H}{c^2} = \frac{9 \times 10^{15} \cdot 170}{9 \times 10^{16}} = 17\ kg$$

$$\boxed{\text{Massa de hidrogênio necessária 17 } kg}$$