FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova P1 - 25/10/2007 - Gabarito

1. Um corpo de massa 50 g está preso a uma mola de constante $k = 20\ N/m$ e oscila, inicialmente, livremente. Esse oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0,9\ kg/s$. Depois disso o oscilador, ainda no meio viscoso, é excitado por uma força externa $F = F_0 cos(\Omega t)$, onde $F_0 = 9,0\ N$ e $\Omega = 20,0\ rad/s$.

   (a) (0,5) Determine a freqüência natural do sistema.

   (b) (0,5) Qual o regime de oscilação do sistema quando imerso no meio viscoso, mas antes de ser excitado pela força externa? Justifique a resposta.

   (c) (0,5) Depois que a força externa é aplicada e que o sistema entrou no regime estacionário, qual o valor da amplitude do movimento?

   (d) (1,0) Qual deveria ser o valor exato da freqüência externa de excitação para que a amplitude de oscilação, no regime estacionário, fosse máxima?

SOLUÇÃO

(a) Determine a freqüência natural do sistema

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,05}} = \sqrt{400}$$

$$\boxed{\omega_0 = 20\ rad/s}$$

(b) Qual o regime de oscilação do sistema quando imerso no meio viscoso, mas antes de ser excitado pela força externa? Justifique a resposta.

Para podermos determinar qual o regime de oscilação de um oscilador amortedido é necessário determinar a relação entre a sua freqüência natural ω_0 e o coeficiente de amortecimento γ.

O coeficiente de amortecimento γ é dado por:

$$\gamma = \frac{\rho}{m} = \frac{0,9}{0,05} = 18\ s^{-1}$$

Com isso temos que:

$$\frac{\gamma}{2} = 9\ <\ \omega_0 = 20$$

Portanto, como

$$\boxed{\omega_0 > \frac{\gamma}{2} \text{ o oscilador encontra-se no regime subcrítico}}$$

(c) Depois que a força externa é aplicada e que o sistema entrou no regime estacionário, qual o valor da amplitude do movimento?

A amplitude do movimento é dada por:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$$

Como $\Omega = \omega_0 = 20\ rad/s$ temos que

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m\gamma\Omega}$$

Substituindo os valores numéricos temos:

$$A(20) = \frac{9,0}{0,05 \cdot 18 \cdot 20} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{A(20) = 0,5\ m}$$

(d) Qual deveria ser o valor exato da freqüência externa de excitação para que a amplitude de oscilação, no regime estacionário, fosse máxima?

O valor da freqüência para qual a amplitude é máxima pode ser obtido através de

$$\frac{d}{d\Omega}A(\Omega) = 0$$

Derivando obtemos:

$$\frac{d}{d\Omega}A(\Omega) = -\frac{1}{2}\frac{F_0}{m}\frac{[-4\Omega\,(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\Omega\gamma^2]}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2]^{3/2}}$$

Para que a derivada se anule temos que:

$$-4\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + 2\Omega\gamma^2 = 0$$

ou seja,

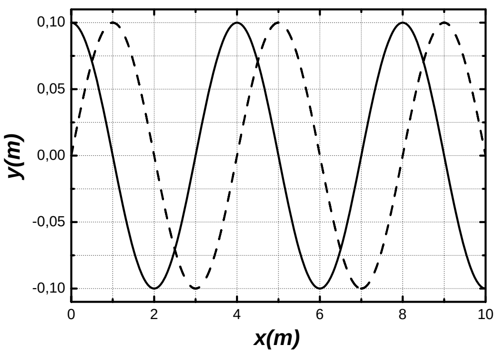
$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

Substituindo os valores obtemos o valor da freqüencia de ressonância:

$$\Omega_R = \sqrt{400 - \frac{324}{2}} = \sqrt{238}$$

$$\boxed{\Omega_R = \sqrt{238}\ rad/s}$$

2. A figura abaixo mostra duas fotografias tiradas em instantes de tempo diferentes de uma corda na qual se propaga, no sentido positivo do eixo x, uma onda harmônica transversal $y(x,t)$. A primeira fotografia (linha cheia) foi tirada no instante de tempo $t = 0$ e a segunda fotografia (linha tracejada) no instante de tempo $t = 0,50\ s$.



(a) (0,5) Determine a velocidade v de propagação da onda na corda;

(b) (1,5) Determine a amplitude, o número de onda, a freqüência angular a constante de fase e escreva a equação do perfil de onda $y(x,t)$;

(c) (0,5) Determine a velocidade transversal máxima, V_m, de um ponto da corda.

SOLUÇÃO

(a) Determine a velocidade v de propagação da onda na corda.

Do gráfico vemos que a onda se desloca de 1 metro em 0,50 segundos. Logo a velocidade de propagação da onda na corda é

$$\boxed{v = 2\ m/s}$$

(b) Determine a amplitude, o número de onda, a freqüência angular a constante de fase e escreva a equação do perfil de onda $y(x, t)$.

A amplitude pode ser obtida diretamente do gráfico:

$$\boxed{A = 0,1\ m}$$

Usando o comprimento de onda obtido do gráfico, $\lambda = 4\ m$, podemos determinar o número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4}$$

$$\boxed{k = \frac{\pi}{2}\ rad/m}$$

Conhecendo o número de onda e a velocidade de propagação podemos determinar a freqüência angular:

$$\omega = kv = \frac{\pi}{2} \cdot 2$$

$$\boxed{\omega = \pi\ rad/s}$$

Obtendo $y(0, 0) = 0,1\ m$ do gráfico, podemos determinar a constante de fase:

$$y(0, 0) = Acos(\delta) = 0,1$$

como $A = 0,1\ m$ temos que

$$cos(\delta) = 1$$

ou seja

$$\boxed{\delta = 0\ rad}$$

Juntando todos os valores obtidos podemos escrever a equação do perfil de onda como:

$$\boxed{y(x, t) = 0,1\, cos\left(\frac{\pi}{2}x - \pi t\right)\ m}$$

(c) Determine a velocidade transversal máxima, V_m, de um ponto da corda.

A velocidade transversal de um ponto da corda V é dada por:

$$V = \frac{\partial y}{\partial t} = 0,1\pi\, sen\left(\frac{\pi}{2}x - \pi t\right)$$

cujo valor máximo é

$$\boxed{V_m = 0,1\pi\ m/s}$$

3. A corda de um violino tem uma densidade linear de massa de $0,5\ g/m$ e está sujeita a uma tensão de $80\ N$, afinada para uma freqüência $\nu = 660\ Hz$ no primeiro harmônico.

   (a) (0,5) Qual a velocidade de propagação de onda nessa corda?

   (b) (1,0) Qual o comprimento da corda?

   (c) (1,0) Para tocar a nota "lá", cuja freqüência é $880\ Hz$, prende-se a corda com um dedo, de forma a utilizar apenas uma fração f de seu comprimento. Qual o valor de f?

   SOLUÇÃO

   (a) Qual a velocidade de propagação de onda nessa corda?

   A velocidade de propagação é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{80}{0,5 \times 10^{-3}}}$$

$$\boxed{v = 400\ m/s}$$

   (b) Qual o comprimento da corda?

   A corda oscila no seu primeiro harmônico, ou seja

$$k_1 = \frac{\pi}{L}$$

   mas k_1 pode ser escrito como

$$k_1 = \frac{\omega_1}{v} = \frac{2\pi\nu_1}{v}$$

então

$$\frac{\pi}{L} = \frac{2\pi\nu_1}{v} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{v}{2\nu_1} = \frac{400}{2 \cdot 660}$$

$$\boxed{L = \frac{10}{33}\ m}$$

(c) Para tocar a nota "lá", cuja freqüência é 880 Hz, prende-se a corda com um dedo, de forma a utilizar apenas uma fração f de seu comprimento. Qual o valor de f?

A fração será dada por:

$$f = \frac{L_{880}}{L_{660}} = \frac{v}{2 \cdot 880} \cdot \frac{2 \cdot 660}{v}$$

ou seja,

$$\boxed{f = \frac{3}{4}}$$

4. Um trem-bala move-se com velocidade de 60 m/s para **leste**. O apito do trem emite um som com freqüência 400 Hz. Considere a velocidade do som no referencial de repouso da atmosfera como 340 m/s.

   (a) (1,0) Determine a freqüência do som do apito que uma pessoa na estação ouve ao observar o trem partir.

   (b) (0,5) Considere agora a presença de vento soprando para **oeste** com velocidade 10 m/s. Determine a freqüência que a pessoa na estação irá detectar.

   (c) (1,0) Considere agora que o trem move-se em uma trajetória circular. Qual a freqüência do som percebida por alguém no centro da circunferência descrita pelo trem?

SOLUÇÃO

(a) Determine a freqüência do som do apito que uma pessoa na estação ouve ao observar o trem partir.

A freqüência detectada pode ser obtida de:

$$\nu = \nu_0 \frac{\left(1 \pm \frac{u}{v_s}\right)}{\left(1 \mp \frac{V}{v_s}\right)}$$

Como o observador está em repouso ($u = 0$) e a fonte está se afastando ($+V$) temos que:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\left(1 + \frac{V}{v_s}\right)}$$

Substituindo os valores:

$$\nu = \frac{400}{\left(1 + \frac{60}{340}\right)} = \frac{400}{\frac{400}{340}}$$

$$\boxed{\nu = 340\ Hz}$$

(b) Considere agora a presença de vento soprando para **oeste** com velocidade 10 m/s. Determine a freqüência que a pessoa na estação irá detectar.

Podemos determinar a freqüência utilizando dois referenciais para resolver o problema. Tomemos inicialmente o referencial onde o vento está em repouso. Nesse referencial as velocidades da pessoa (u) e do trem (V) são:

$$u = 10\ m/s$$

e

$$V = 60 + 10 = 70\ m/s$$

Nesse referencial a fonte se afasta do observador enquanto este se aproxima da fonte, logo:

$$\nu = \nu_0 \frac{\left(1 + \frac{u}{v_s}\right)}{\left(1 + \frac{V}{v_s}\right)} = 400 \frac{\left(1 + \frac{10}{340}\right)}{\left(1 + \frac{70}{340}\right)} = 400 \frac{350}{410}$$

$$\boxed{\nu = \frac{4}{4,1} 350\ Hz}$$

Podemos também utilizar o referencial onde a pessoa está em repouso. Como nesse referencial o trem está se afastando com velocidade $V = 60\ m/s$ e o som se aproximando da pessoa, a velocidade do som será:

$$v_s = 340 + 10 = 350\ m/s$$

e a freqüência detectada pela pessoa

$$\nu = \frac{400}{\left(1 + \frac{60}{350}\right)} = \frac{400}{\frac{410}{350}}$$

$$\boxed{\nu = \frac{4}{4,1} 350\ Hz}$$

(c) Considere agora que o trem move-se em uma trajetória circular. Qual a freqüência do som percebida por alguém no centro da circunferência descrita pelo trem?

A expressão para o efeito doppler no caso de deslocamentos em direções arbitrárias é

$$\nu = \frac{\nu_0}{\left[1 - \frac{V\, cos(\theta)}{v_s}\right]}$$

onde θ é o ângulo entre a direção de movimento da fonte e a direção que liga a fonte ao observador. Como na trajetória circular θ é sempre igual a $\frac{\pi}{2}$:

$$\nu = \nu_0$$

$$\boxed{\nu = 400\ Hz}$$

Como neste caso a fonte não está se aproximando nem se afastando do observador a freqüência não se altera.