FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova P1 - 13/09/2007 - Gabarito

1. Em um referencial inercial uma partícula possui coordenadas dadas por:

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t \qquad y(t) = \frac{1}{2}v_0 t \qquad z(t) = 0$$

onde v_0 é constante e $t \geq 0$.

(a) (0,5) Escreva $r(t)$ e $\theta(t)$ em coordenadas polares;

(b) (1,0) Escreva as coordenadas da partícula em um sistema de referência que gira com velocidade angular ω em torno do eixo z, no sentido horário;

(c) (1,0) No referencial em rotação, obtenha as componentes da velocidade da partícula nas direções transversal e radial.

SOLUÇÃO

(a) Escreva $r(t)$ e $\theta(t)$ em coordenadas polares

Em coordenadas polares:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{3}{4}v_0^2 t^2 + \frac{1}{4}v_0^2 t^2} = v_0 t$$

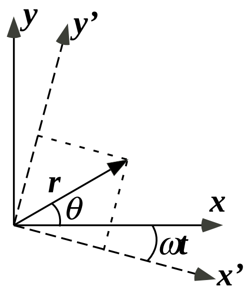
$$\theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) = arctan\left(\frac{\frac{1}{2}v_0 t}{\frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t}\right) = arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Coordenadas da partícula:

$$\boxed{r = v_0 t}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

(b) Escreva as coordenadas da partícula em um sistema de referência que gira com velocidade angular ω em torno do eixo z, no sentido horário



Em coordenadas cartesianas:

$$x'(t) = r\,cos(\omega t + \theta) = v_0 t\,cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y'(t) = r\,sen(\omega t + \theta) = v_0 t\,sen\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{x'(t) = v_0 t\,cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\boxed{y'(t) = v_0 t\,sen\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

Em coordenadas polares

$$\boxed{r = v_0 t}$$

$$\boxed{\theta = \left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

(c) No referencial em rotação, obtenha as componentes da velocidade da partícula nas direções transversal e radial

Velocidade em coordenadas polares:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = v_0\hat{r} + v_0 t \cdot \omega\hat{\theta}$$

Velocidade radial:

$$\boxed{v_r = v_0}$$

Velocidade transversal:

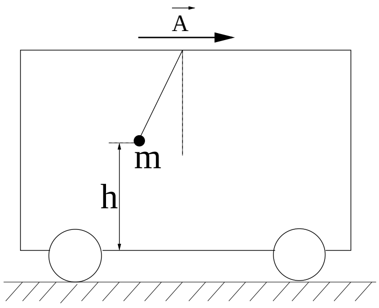
$$\boxed{v_\theta = \omega v_0 t}$$

2. Uma partícula de massa m está suspensa por um fio fixo ao teto de um vagão. O vagão desloca-se para a direita com aceleração constante igual a $\vec{A}$, como mostra a figura. Em um certo instante, o fio rompe-se, enquanto a partícula está a uma altura h do piso do vagão. No referencial do vagão determine:

   (a) (1,0) a tração no fio antes da partícula desprender-se.

   (b) (1,0) A distância l horizontal percorrida pela partícula ao se chocar com o piso do vagão, desde o ponto em que estava quando o fio se rompeu.

   (c) (0,5) O módulo da velocidade da partícula ao atingir o piso.



SOLUÇÃO

(a) A tração no fio antes da partícula desprender-se

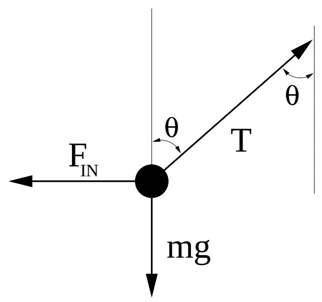
Dado o diagrama de forças abaixo:

Resultante de forças na vertical

$$T cos(\theta) = mg$$

Resultante de forças na horizontal

$$T sen(\theta) = mA$$



Elevando as duas equações ao quadrado e somando

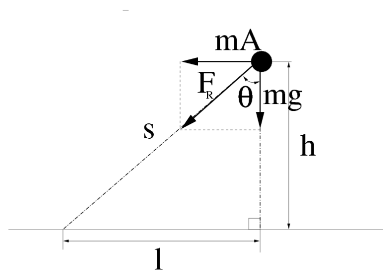
$$T^2\left[sen^2(\theta)+cos^2(\theta)\right]=m^2(g^2+A^2)$$

A tração no fio será então dada por:

$$\boxed{T=m\sqrt{g^2+A^2}}$$

(b) A distância l horizontal percorrida pela partícula ao se chocar com o piso do vagão, desde o ponto em que estava quando o fio se rompeu

Usando a figura abaixo iremos determinar a aceleração no referencial dentro do vagão:



Calculando a força resultante $\vec{F}'_R$ neste referencial:

$$ma'_R=\sqrt{(mg)^2+(mA)^2}\qquad\Rightarrow\qquad a'_R=\sqrt{g^2+A^2}$$

A partícula percorre uma trajetória retilínea neste referencial, onde podemos identificar,

$$tg(\theta)=\frac{l}{h}\qquad\Rightarrow\qquad l=h\,tg(\theta)=h\frac{A}{g},$$

portanto

$$\boxed{l = \frac{Ah}{g}}$$

(c) O módulo da velocidade da partícula ao atingir o piso

Ainda observando a figura, notamos que podemos determinar a distância total s percorrida pela partícula,

$$s = \sqrt{l^2 + h^2} = \sqrt{h^2 + \frac{h^2A^2}{g^2}} = h\sqrt{\frac{g^2 + A^2}{g^2}} = \frac{h}{g}\sqrt{g^2 + A^2}$$

Logo a velocidade, ainda neste referencial, será dada por:

$$v'^2 = 2a'_R s = 2\left(\sqrt{g^2 + A^2}\right)\left(\frac{h}{g}\sqrt{g^2 + A^2}\right) = \frac{2h}{g}(g^2 + A^2)$$

então

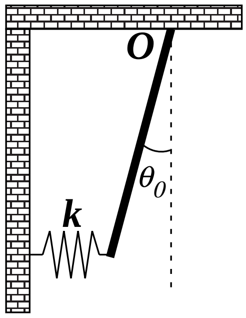
$$\boxed{v' = \sqrt{\frac{2h}{g}(g^2 + A^2)}}$$

3. Uma haste rígida de comprimento L e massa M está suspensa, podendo girar em torno do ponto O, por uma das suas extremidades, como mostra a figura. Na outra extremidade a barra está ligada a uma mola de constante k que está na posição relaxada quando a barra se encontra na posição vertical. No instante $t = 0$, a barra é deslocada para a esquerda, até um ângulo θ_0 com a direção vertical, e abandonada a partir do repouso. Dado: $I_O = \frac{1}{3}ML^2$ e considerando que a mola sempre permanece na horizontal,

   (a) (1,0) obtenha a equação diferencial que descreve o movimento da barra.

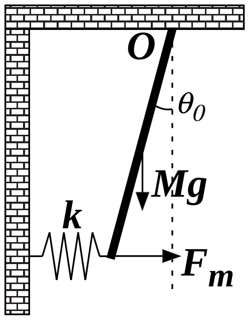
   (b) (1,0) Determine a freqüência angular ω de oscilação da barra, considerando oscilações de pequenas amplitudes.

   (c) (0,5) Obtenha a equação $\theta(t)$ que descreve o movimento de oscilação da barra.



SOLUÇÃO

(a) Obtenha a equação diferencial que descreve o movimento da barra



A barra está sujeita à força peso (Mg), aplicada no centro de massa da barra, à distância $\frac{L}{2}$ do ponto O, e também à força elástica exercida pela mola (F_m) aplicada à uma distância L do ponto O, na direção horizontal. Somente as componentes dessas forças, na direção perpendicular à barra exercem torque.

O torque resultante será dado por:

$$\tau = Mg\, sen(\theta)\frac{L}{2} + F_m\, cos(\theta) L$$

A força elástica exercida pela mola, é $F_m = kx$, onde x é a deformação da mola e é $x = Lsen(\theta)$. Então

$$\tau = Mg\frac{L}{2}\, sen(\theta) + kL^2\, sen(\theta)\, cos(\theta)$$

Lembrando que o torque é restaurador, a equação do movimento será dada por:

$$I\alpha = \tau$$

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg\frac{L}{2}\, sen(\theta) - kL^2\, sen(\theta)\, cos(\theta)$$

$$\frac{1}{3} ML^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left[Mg\frac{L}{2} + kL^2\, cos(\theta)\right]\, sen(\theta)$$

Portanto

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\frac{3}{2}\frac{g}{L} + \frac{3k}{M}cos(\theta)\right] sen(\theta) = 0}$$

(b) Determine a freqüência angular ω de oscilação da barra, considerando oscilações de pequenas amplitudes.

Para pequenas amplitudes ($\theta \ll 1$), podemos aproximar $sen(\theta) \approx \theta$ e $\cos(\theta) \approx 1$ e então temos que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\frac{3}{2}\frac{g}{L} + \frac{3k}{M}\right] \theta = 0$$

o que nos fornece

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L} + \frac{3k}{M}}}$$

(c) Obtenha a equação $\theta(t)$ que descreve o movimento de oscilação da barra

A equação geral para $\theta(t)$ é

$$\theta(t) = A\, cos(\omega t + \varphi)$$

As condições iniciais, para $t = 0$, que temos para o problema são: $\theta(0) = \theta_0$ e $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$

$$Acos(\varphi) = \theta_0$$

$$-A\omega sen(\varphi) = 0$$

Como A e ω têm que ser diferentes de zero, isso implica que

$$sen(\varphi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 0$$

e

$$A = \theta_0$$

Assim,

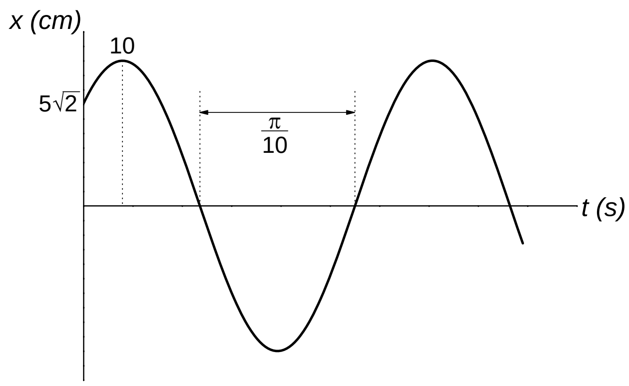
$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\, cos(\omega t)}$$

4. A figura mostra a oscilação de um corpo com massa $0,5\ kg$ preso a uma mola.

   (a) (0,5) Quanto vale a constante de força da mola?

   (b) (1,0) Escreva a equação que descreve $x(t)$.

   (c) (1,0) Obtenha expressões para as energias potencial, cinética e mecânica total do oscilador em função do tempo.



SOLUÇÃO

Dados obtidos do gráfico: $A = 10\ cm$, $x(0) = A\,cos(\varphi) = 5\sqrt{2}$ e $\frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{10}$

(a) Quanto vale a constante de força da mola?

Utilizando que:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

e o valor do período obtido do gráfico, temos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{2\pi}10 = 10\ rad/s$$

Para um sistema massa-mola:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$k = m\omega^2 = 0,5 \cdot 100$$

O valor da constante da mola será então

$$\boxed{k = 50\ kg/s^2 = 50N/m}$$

(b) Escreva a equação que descreve $x(t)$

A equação geral que descreve $x(t)$ é:

$$x(t) = A\,cos(\omega t + \varphi)$$

Como temos do gráfico que $A = 10\ cm$, $x(0) = A\,cos(\varphi) = 5\sqrt{2}$ obtemos:

$$cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{4}$$

Do gráfico podemos observar que para $t = 0$ a velocidade do corpo é positiva, mas

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\,sen(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -A\omega\,sen(\varphi)$$

que só será positiva se

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}$$

Portanto

$$\boxed{x(t) = 10\,cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ cm}$$

(c) Obtenha expressões para as energias potencial, cinética e mecânica total do oscilador em função do tempo

Energia potencial:

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\,cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}\cdot 50\cdot 0,01\,cos^2\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{U(t) = \frac{1}{4}\,cos^2\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ J}$$

Energia cinética:

$$T(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dx}{dt} = -100\,sen\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ cm/s = -1\,sen\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ m/s$$

$$T(t) = \frac{1}{2}0,5sen^2\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{T(t) = \frac{1}{4}sen^2\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ J}$$

Energia mecânica total:

$$E = T(t) + U(t)$$

$$E = \frac{1}{4}sen^2\left(10t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\,cos^2\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4}\ J}$$