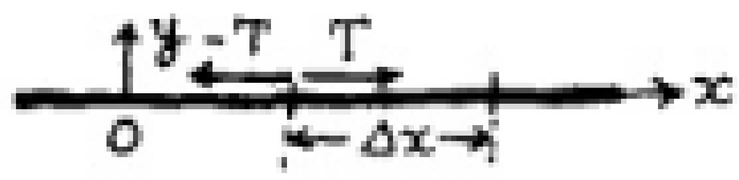
Aula 18: Cordas Vibrantes e Intensidade de Uma Onda

Profª Nair Stem

Instituto de Física da USP

Cordas Vibrantes



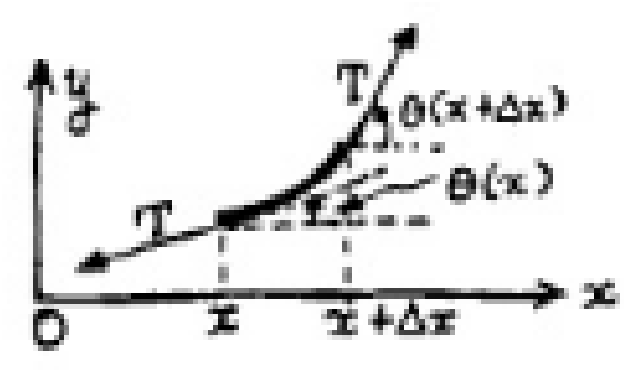
Considere vibrações transversais em uma corda distendida como as que encontramos em instrumentos musicais (violino, violão, harpa, etc...)

$$\Delta m = \mu \, \Delta x$$

μ, densidade linear de massa da corda e Δx, um elemento infinitésimo da corda.

Um deslocamento na corda geralmente teria duas componentes (y e z), mas vamos nos limitar a deslocamentos num dado plano, que podemos tomar como plano Oxy.

As forças que atuam em um elemento dx da corda serão devidas à variação de direção da tensão => componente transversal restauradora:



Vamos nos limitar a pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio (comprimento da corda é desprezível, magnitude de tensão permanece igual a T)

*<u>Componente y de T no pto **x+Δx**:</u>*

$$T \operatorname{sen} \theta \simeq T \operatorname{tg} \theta = T \frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x, t)$$

Coeficiente angular do perfil da corda

Aproximação: Para pequenos deslocamentos, Θ<<1, senΘ=tanΘ

*<u>Componente y de T no pto **x**:</u>* $-T \operatorname{tg}\theta = -T\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)$

Somando as duas equações dividindo por Δx:

$$T\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t) - T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = T\Delta x\left[\frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}\right]$$

No limite Δx->0=> $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Força vertical sobre Δx $= T\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Delta x$

- Pela 2ª Lei de Newton:

$$\underbrace{\mu\Delta x}_{\Delta m}\underbrace{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}_{\text{a, aceleração vertical}} = \underbrace{T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Delta x}_{\text{Força Vertical}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

Compare com a equação de ondas Apresentada na aula anterior:

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Velocidade de propagação

Comentários

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

- Equação obtida por Euler e D´Alembert por volta de 1750.

- A velocidade de onda é tanto maior quanto maior a tensão e menor a inércia (massa por unidade de comprimento).

- Ex: uma corda com μ=10g/m=10^{-2}kg/m e T=100N => v=100m/s

Solução Geral:

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

Equação de ondas unidimensional

$$\boxed{\begin{aligned} & y(x,0) = y_0(x) \\ & \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x) \end{aligned}}$$

Condições iniciais

$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)}$$

Superposição de ondas progressivas propagando-se nos dois sentidos.

Exemplo

Corda com deslocamento inicial $y_o(x)$, mas seja solta em repouso , velocidade inicial nula:

onde $$\text{velocidade} = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)$$

Solução Geral:

$$y(x,0) = f(x) + g(x) = y_0(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \underbrace{-v\frac{d}{dx}f(x)}_{\text{Onda indo no sentido x positivo}} + \underbrace{v\frac{d}{dx}g(x)}_{\text{Onda indo no sentido x negativo}} = v\frac{d}{dx}[g(x) - f(x)] = 0$$

Equação é satisfeita se g(x)=f(x)

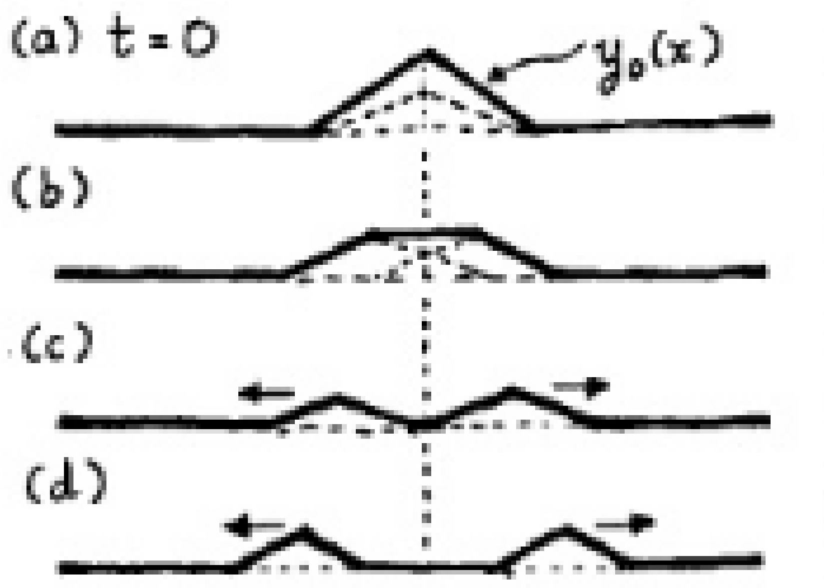
Substituindo em: $y(x,0) = f(x) + g(x) = y_0(x)$

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{2}\, y_0(x)$$

Solução Geral

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[\, y_0(x - v\,t) + y_0(x + v\,t) \,\right]$$

Exemplo: $y_o(x)$ é um pulso triangular



O pulso inicial se decompõe em dois pulsos idênticos (cada um com a metade da amplitude), que se propagam com velocidade v em sentidos opostos

PS: Esta solução permanece válida enquanto os pulsos não atingem as extremidades da corda.

Princípio de Superposição

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

- ***<u>Qualquer combinação linear de soluções também é solução</u>***. Observe:

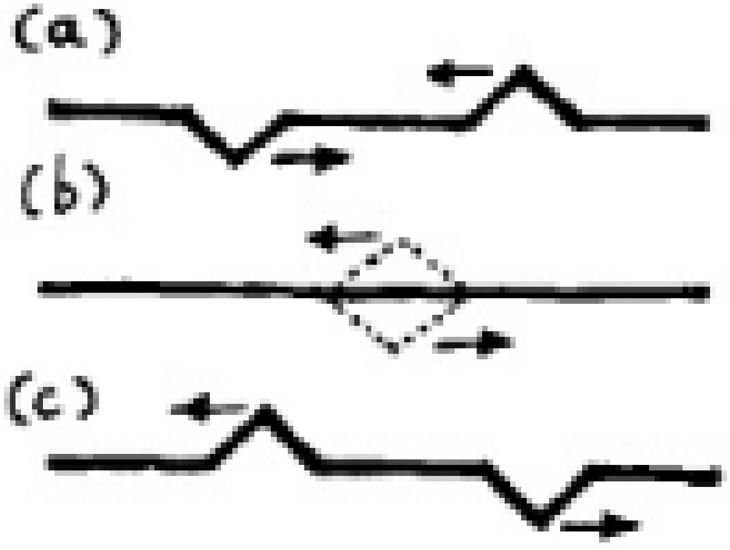
$$\boxed{y(x,t) = a\,y_1(x,t) + b\,y_2(x,t)} \qquad (5.3.15)$$

uma *combinação linear* qualquer dessas soluções (a e b são constantes arbitrárias; cf.(3.2.14)). Como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(a y_1 + b y_2) = a\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a y_1 + b y_2) = a\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

EXEMPLO - Superposição



(a) Dois pulsos triangulares iguais e em sentidos contrários caminham em sentidos opostos.

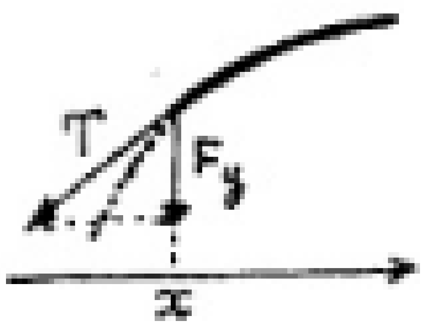
(b) Os dois pulsos superpostos e se cancelam mutuamente=> ***Interferência Destrutiva***

(c) Um pulso ultrapassa o outro, prosseguindo como se nada tivesse acontecido.

Intensidade de uma Onda

▪Onda progressiva transporta energia.

▪Para gerar uma onda harmônica progressiva é necessário fazer a extremidade da corda oscilar com MHS.



$$F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$$

Componente da força transversal em x na corda

$$\boxed{P(x,t) = F_y\frac{\partial y}{\partial t} = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

Potência = Força x velocidade

Significado Físico de Potência:

energia transmitida através de x por unidade de tempo

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

Solução para uma onda harmônica progressiva se propagando no sentido Ox positivo

$$\begin{cases} \partial y/\partial x = -kA\,\mathrm{sen}\,\varphi\,, \\ \partial y/\partial t = +\omega A\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

Substituindo em:

$$\boxed{P(x,t) = F_y \frac{\partial y}{\partial t} = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

$$P(x,t) = \omega k T A^2\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta)$$

Potência que oscila com o tempo

Intensidade de Onda ou Potência Média

$$I = \bar{P} = \omega k T A^2 \underbrace{\overline{\text{sen}^2(kx - \omega t + \delta)}}_{=1/2}$$

Em uma corda:

Lembrete:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \mu v^2 \\ k v = \omega \end{array} \right.$$

Tensão na corda

Frequencia angular

velocidade

$$\boxed{I = \bar{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2}$$

A intensidade depende da amplitude ao quadrado, da velocidade de onda e do quadrado da frequencia angular!!!!!

Densidade linear de Energia Cinética

Energia Cinética Instântanea

$$dT = \frac{1}{2}\, dm \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\, \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$$

Onde dm=μdx

Densidade de Energia Cinética

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2}\, \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

Lembrete

$$\partial y / \partial t = + \omega A \,\mathrm{sen}\, \varphi$$

$$(\partial y / \partial t)^2 = \omega^2 A^2 \,\mathrm{sen}^2 (kx - \omega t + \delta)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2 (kx - \omega t + \delta)$$

Calculando-se a média temporal:

$$\overline{\frac{dT}{dx}} = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2$$

Densidade Média de Energia Potencial

- Em um MHS a energia potencial média é igual a energia cinética média=>

$$\frac{d\overline{U}}{dx} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2$$

Densidade Média de Energia Total

$$\boxed{\overline{\frac{dE}{dx}} = \overline{\frac{dT}{dx}} + \overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2}$$

O valor médio da energia da onda contida em um elemento Δx da corda é:

$$\overline{\Delta E} = \overline{\frac{dE}{dx}}\,\Delta x$$

Com Δx=vt =>

$$\overline{P} = \frac{\overline{\Delta E}}{\Delta t} = \left(\overline{\frac{dE}{dx}}\right)\frac{\Delta x}{\Delta t} = v\left(\overline{\frac{dE}{dx}}\right)$$

Intensidade ou potência média é igual ao produto da velocidade da onda pela densidade média de energia

Exemplo 1

- Uma corda uniforme, de 20m de comprimento e massa de 2kg, está esticada sob uma tensão de 10N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3cm e frequencia de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1.5cm para cima. (a) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento da onda progressiva λ gerada na corda. (b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal de um ponto da corda situado a uma distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue na outra extremidade. (c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

- **Respostas: (a) v=10m/s; λ=2m; (b) $y=0,03\cos(\pi x-10\pi t+\pi/3)$; (c) I=0.44W**

Solução

(a) $\Delta m = \mu \, \Delta x$ $\quad \text{v} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ ⇨ $\mu = \dfrac{2}{20} = 0.1 \, kg/m$

$$\text{v} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 10 m/s$$

λ=v/ν ⇨ $\lambda = \dfrac{10}{5} = 2m$

(b) $y(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$

A=3cm=0.03m **(dado do problema)**

k=2π/λ=2π/2=π

w=kv=10π rad/s

Pergunta: e δ??????

(b) ...continuação

Em geral, determina-se a fase pela condição inicial: “O deslocamento inicial da extremidade é de 1.5cm para cima” => y(0,0)=0.015m

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

$y(0,0)=0.03\cos(\delta)=0.015$ → $\cos\delta=0.5 \Rightarrow \delta=\pi/3$

→ **$y=0{,}03\cos(\pi x-10\pi t+\pi/3)$**

(c) Intensidade

$$\boxed{I = \bar{P} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}$$

$I=(1/2)\,(0.1)(10)(10\pi)^2\,(0.03)^2$

→ I=**0.44W**

Demais exemplos – em sala de aula