MAP5729 - Introdução à Análise Numérica

1º Semestre de 2013

4ª Lista de Exercícios

Exercício 1 (Extrapolação)
Seja $B(t)$, $t > 0$, uma grandeza computável que aproxima $B_0 = B(0)$. Suponha que o erro satisfaz a seguinte expansão assintótica

$$B(t) = B_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n + c_{n+1}(t) t^{n+1}$$

onde os coeficientes c_k, $1 \leq k \leq n$, não dependem de t e $|c_{n+1}(t)| \leq M$ para $0 \leq t \leq T$. Sejam t_i, $0 \leq i \leq n$, pontos tais que $T \geq t_0 > t_1 > \cdots > t_n > 0$ e denote por $p_n(t)$ o polinômio interpolador da tabela $(t_i, B(t_i))$, $0 \leq i \leq n$. Mostre que $B_0 - p_n(0) = O(t_0^{n+1})$. Discuta o caso no qual a expansão assintótica envolve apenas potências pares do parâmetro.

Exercício 2 Considere a função

$$B(t) = \frac{\sin(\pi t)}{t}.$$

Sabemos que $\lim_{t\to 0} B(t) = \pi$. O objetivo deste exercício é obter uma aproximação para π usando a grandeza computável $B(t)$. Formule o problema de modo que a possibilidade de se usar extrapolação fique evidente. Os valores da função seno para os argumnetos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{8}$ podem ser calculados usando relações trigonométricas sem se conhecer o valor de π. Faça a extrapolação com estes valores para aproximar o número π (use o algoritmo de Neville). Compare com o valor exato até nove casas decimais depois da vírgula.

Exercício 3 Use a fórmula de Euler-Maclaurin para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercício 4 Discuta como aproximar as integrais

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x}\cos(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

usando o método de Romberg.

Exercício 5 A função de Bessel de ordem zero pode ser representada por:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\text{sen}(\theta))\,d\theta.$$

Calcule $J_0(1)$ usando o método dos trapézios e o método de Romberg. Explique os resultados obtidos.

Exercício 6 Seja $\{p_k\}$ a família de polinômios ortogonais mônicos relativamente ao produto interno $< f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)\,dx$. Use a relação de recorrrência para construir p_0, p_1, p_2 e p_3. Deduza a fórmula de quadratura Gaussiana de 3 pontos para a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx$.

Exercício 7 Considere o problema de contorno

$$\begin{gathered} -[p(x)u']' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b, \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \end{gathered}$$

onde p, q e f são funções suaves e $p(x) \geq p_* > 0$, $q(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Usando $h = (b-a)/(N+1)$, $x_i = a + i\,h$, $0 \leq i \leq N+1$ e a notação usual, considere o esquema de diferenças finitas

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{h^2}\left[-p_{i-1/2}U_{i-1} + (p_{i-1/2} + p_{i+1/2} + h^2\,q_i)U_i - p_{i+1/2}U_{i+1}\right] = f_i, \quad 1 \leq i \leq N, \\ U_0 = \alpha, \quad U_{N+1} = \beta \end{gathered}$$

onde $p_{i\pm1/2} = p(x_i \pm h/2)$. Mostre que a discretização tem ordem 2 e que ela é estável.

Exercício 8 Considere o problema de contorno $u'' = f(x, u)$, $x \in (a, b)$, $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$, sob as condições de existência e unicidade $f \in C^2([a, b] \times R)$, $f_u \geq 0$. Usando o espaçamento $h = (b-a)/(N+1)$, denotando por $x_i = a + ih$ e por v_i uma aproximação para $u(x_i)$, $0 \leq i \leq N+1$, obtemos, após discretizar a derivada segunda, o sistema não linear

$$\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = f(x_i, v_i), \quad 1 \leq i \leq N$$

com $v_0 = \alpha$ e $v_{N+1} = \beta$. Pode-se mostrar que para h suficientemente pequeno o sistema não linear tem solução única. Prove que a discretização tem ordem 2 e que o erro tende a zero proporcionalmente a h^2.

Exercício 9 Considere uma partição $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ e seja $Y = \{y_0, \ldots, y_n\}$ um conjunto de $n+1$ números reais. Defina o espaço

$$C^2_{\Delta,Y} = \{f \in C^2([a, b]) \,|\, f(x_i) = y_i, 0 \leq i \leq n\}$$

e seja $S_{\Delta,Y}$ o subconjunto de $C^2_{\Delta,Y}$ formado pelos splines cúbicos $s(x)$ subordinados à partição Δ tais que $s(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$. Prove que se $f \in C^2_{\Delta,Y}$ e $s \in S_{\Delta,Y}$ então

$$\int_a^b [f''(x) - s''(x)]s''(x)\,dx = s''(b)[f'(b) - s'(b)] - s''(a)[f'(a) - s'(a)].$$

Mostre então que:

a) O único elemento de $C^2_{\Delta,Y}$ que minimiza $\|f''\|_2$ é o spline cúbico $s \in S_{\Delta,Y}$ tal que $s''(a) = 0$ e $s''(b) = 0$.

b) Entre todas as funções $f \in C^2_{\Delta,Y}$ tais que $f'(a) = \alpha$ e $f'(b) = \beta$, onde α e β são fixos, a única que minimiza $\|f''\|_2$ é o spline cúbico $s \in S_{\Delta,Y}$ tal que $s'(a) = \alpha$ e $s'(b) = \beta$.