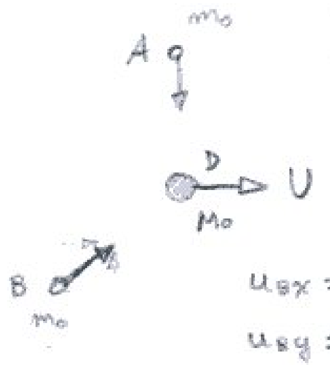
1 Versão inelástica de Lewis & Tolman

$$u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \qquad u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}}{\gamma_v\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)} \qquad u_{y,z} = \frac{u'_{y,z}}{\gamma_v\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$$

S



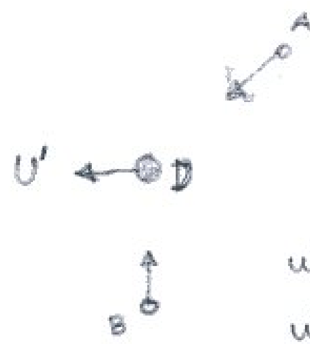
$u_{Ax} = 0$

$u_{Ay} = -w$

$u_{Bx} = +v$

$u_{By} = +\alpha$

S'



$u'_{Ax} = -v$

$u'_{Ay} = -\frac{w}{\gamma_v}$

$u'_{Bx} = 0$

$u'_{By} = \alpha\gamma_v$

Processo de colisão altamente simétrico!

$$\boxed{\alpha = \frac{w}{\gamma_v}} \qquad \boxed{U' = -U}$$

Sinal + não pode. Por quê?

$$U' = \frac{U - v}{1 - \frac{vU}{c^2}} = -U \Rightarrow \boxed{U^2 - 2\frac{c^2}{v}U + c^2 = 0} \Rightarrow U = \frac{c^2}{v} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{v}\right)^2 - c^2}$$

$$\boxed{U = \frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Agora, em S, vamos definir duas quantidades físicas que se conservam em colisões (generalização relativística de momento e energia)

$$\vec{P}(\vec{u}) = f(u)\, m_0 \vec{u} \; ; \quad E(\vec{u}) = g(u)\, m_0 c^2 \qquad u = |\vec{u}|$$

*Missão: determinar $f(u)$ e $g(u)$

Condição sobre $f(u)$: $\boxed{f(0) = 1}$ (limite newtoniano)

(2) ⊛ CONSERVAÇÃO NA DIREÇÃO y

$$p_{Ay} + p_{By} = 0$$

$$f(w)\, m_0(-w) + f\left(\sqrt{v^2+\alpha^2}\right) m_0 \alpha = 0$$

$$w\, f(w) = \frac{w}{\gamma_v} f\left(\sqrt{v^2+(w/\gamma_v)^2}\right)$$

$$f\left(\sqrt{v^2+\left(\frac{w}{\gamma_v}\right)^2}\right) = \gamma_v\, f(w)$$

$w=0$: $\boxed{f(v) = \gamma_v = \gamma(v)}$ (PARA $w \neq 0$: EXERCÍCIO DA LISTA 4)

$$\therefore \boxed{\vec{p}(\vec{u}) = \gamma(u)\, m_0\, \vec{u}}$$

⊛ CONSERVAÇÃO NA DIREÇÃO x

$$p_{Bx} = p_{Dx}$$

$$\gamma\left(\sqrt{v^2+\left(\frac{w}{\gamma_v}\right)^2}\right) m_0 v = \gamma(U)\, M_0 U \Rightarrow \boxed{\frac{M_0}{m_0} = \frac{\gamma(v)\gamma(w)}{\gamma(U)}\,\frac{v}{U}}$$

⊛ CONSERVAÇÃO DE E

$$m_0c^2 g(w) + m_0c^2 g\left(\sqrt{v^2+\left(\frac{w}{\gamma_v}\right)^2}\right) = M_0c^2 g(U)$$

$$g(w) + g\left(\sqrt{v^2+\left(\frac{w}{\gamma_v}\right)^2}\right) = \frac{M_0}{m_0}\, g(U)$$

$$= g(U)\,\frac{\gamma(v)\gamma(w)}{\gamma(U)}\,\frac{v}{U}$$

LIMITE $v \to 0$ (COLISÃO FRONTAL)

$U \to 0$ MAS $\frac{v}{U} = 1+\sqrt{1-v^2/c^2} \to 2$

$\gamma_v \to 1$

$\therefore$ PARA $v \to 0$ TEMOS

$$g(w) + g(w) = g(0)\gamma(w)\cdot 2$$

$$\boxed{g(w) = g(0)\gamma(w)}$$

LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO

$$E(\vec{u}) = g(0) m_0c^2 \gamma(u) \approx g(0) m_0 c^2\left[1+\frac{u^2}{2c^2}+\ldots\right]$$

$$= g(0)m_0c^2 + \frac{1}{2}g(0)\, m_0 u^2 + \ldots$$

$g(0)=1 \Rightarrow \boxed{g(u) = \gamma(u)}$

RESUMINDO:

$$\vec{p}(\vec{u}) = \gamma(u)\, m_0 \vec{u}$$

$$E(u) = \gamma(u)\, m_0 c^2$$

$$K(u) = E(u) - m_0 c^2 = [\gamma(u) - 1]\, m_0 c^2$$

⊛ APENAS UMA PARTÍCULA

– ANTES DE MAIS NADA, NOTE QUE $\boxed{\dfrac{1}{1-\beta^2} = \dfrac{1}{1-\beta^2}\left(1-\beta^2+\beta^2\right) = 1 + \dfrac{\beta^2}{1-\beta^2}}$

OU SEJA, $\boxed{\gamma_u^2 = 1 + \gamma_u^2\, u^2/c^2}$

MULTIPLICANDO POR $m_0^2 c^4$ TEMOS $\boxed{E^2 = (m_0 c^2)^2 + p^2 c^2}$

$$\boxed{E^2 - (pc)^2 = (m_0 c^2)^2}$$

DE S PARA S': $E' \neq E$; $p' \neq p$ MAS $\boxed{E'^2 - (p'c)^2 = (m_0 c^2)^2}$

$E, p \rightarrow$ COVARIANTES ; $m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - (pc)^2} \rightarrow$ INVARIANTE

⊛ DUAS (OU MAIS) PARTÍCULAS

$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_{TOT} \text{ SE CONSERVA ANTES E DEPOIS DA COLISÃO} \\ E_{TOT} \text{ " " " " "} \\ K_{TOT} \text{ NÃO NECESSARIAMENTE!} \end{array}\right\}$ PARA COLISÕES ELÁSTICAS $\boxed{\text{E TAMBÉM}}$ INELÁSTICAS!

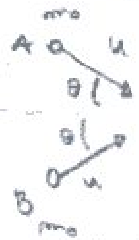
O QUE MUDA PARA COLISÕES APENAS ELÁSTICAS?

COMO AS CONCLUSÕES ACIMA FICAM EM S'?

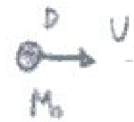
EXEMPLO DE COLISÃO INELÁSTICA

EM (S)

ANTES



DEPOIS



$p_{Ay} = \gamma(u)\, m_0 (-u \sin\theta) = -\gamma(u)\, m_0\, u \sin\theta$

$p_{By} = \gamma(u)\, m_0\, u \sin\theta = -p_{Ay}$

$\therefore \quad \boxed{p_{Ay} + p_{By} = 0}$

$p_{Dy} = \gamma(U)\, M_0\, U_y = 0 \Rightarrow \boxed{U_y = 0}$

$p_{Ax} = \gamma(u)\, m_0\, u \cos\theta \; ; \; p_{Bx} = \gamma(u)\, m_0\, u \cos\theta$

$\boxed{p_{Ax} + p_{Bx} = 2\gamma(u)\, m_0\, u \cos\theta}$

$p_{Dx} = \gamma(U)\, M_0\, U = 2\gamma(u)\, m_0\, u \cos\theta$

$E_A = \gamma(u)\, m_0 c^2 = E_B$

$E_A + E_B = 2\gamma(u)\, m_0 c^2$

$E_D = \gamma(U)\, M_0 c^2 = 2\gamma(u)\, m_0 c^2$

$$\therefore \quad \frac{p_{Dx}}{E_D} = \frac{U}{c^2} = \frac{u\cos\theta}{c^2} \Rightarrow \boxed{U = u\cos\theta}$$

SEJAM DADOS $u = \frac{2\sqrt{3}}{5}c$ e $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$ ⇒ COMO OBTER U e M_0?

$$U = \frac{2\sqrt{3}}{5} c \cos\frac{\pi}{6} = c \times \frac{2\sqrt{3}}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{5} c$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4 \times 3}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{13}} \quad \text{e} \quad \gamma(U) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}$$

$$E_D = \frac{5}{4} \times M_0 c^2 = \frac{10}{\sqrt{13}} m_0 c^2 \Rightarrow \boxed{M_0 = \frac{20}{\sqrt{13}} m_0}$$

5 É A MESMA COLISÃO EM S' ONDE $v_{S'} = u\cos\theta$?

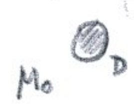
$$u_{Ax} = u_{Bx} = u\cos\theta = \boxed{v_{S'} = V = \frac{3}{5}c} \Rightarrow \boxed{u'_{Ax} = \frac{u_{Ax} - v_{S'}}{1 - \frac{v_{S'}}{c^2}u_{Ax}} = 0}$$

$$\boxed{u_{By} = u\,\mathrm{sen}\,\theta = -u_{Ay}} \Rightarrow \begin{cases} u'_{By} = \dfrac{u_{By}}{\gamma_{v_{S'}}\left(1 - \frac{v_{S'}}{c^2}u_{Bx}\right)} = \dfrac{u_{By}}{\gamma_{v_{S'}}/\gamma_{v_{S'}}^2} = \boxed{\gamma_{v_{S'}}\,u\,\mathrm{sen}\,\theta} \\ \boxed{u'_{Ay} = -\gamma_{v_{S'}}\,u\,\mathrm{sen}\,\theta} \end{cases}$$

ANTES

DEPOIS

$\boxed{U' = 0}$



$$u'_{By} = \underbrace{\gamma\left(\tfrac{3}{5}c\right)}_{\frac{5}{4}} \times \frac{2\sqrt{3}}{5}c = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

$$\boxed{p'_{Dy} = 0}$$

$$\boxed{p'_{Dx} = 0}$$

$$p'_{By} = \underbrace{\gamma\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}c\right)}_{2} \times m_0\frac{\sqrt{3}}{2}c = \boxed{m_0\sqrt{3}\,c}$$

$$p'_{Ay} = -p'_{By} \Rightarrow \boxed{p'_{Ay} + p'_{By} = 0}$$

$$\boxed{p'_{Ax} = p'_{Bx} = 0}$$

$$E'_A = \gamma\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}c\right) m_0 c^2 = E'_B$$

$$\boxed{E'_A + E'_B = 4m_0c^2}$$

$$E'_D = \gamma(U')M_0c^2 = M_0c^2$$

$$E'_D = E'_A + E'_B$$

$$\therefore \boxed{M_0 = 4m_0}$$

CONVERSÃO DE ENERGIA CINÉTICA EM MASSA!

FÓTONS: PARTÍCULAS DE LUZ

- PORTANTO, ELAS DEVEM VIAJAR À VELOCIDADE DA LUZ!

MAS ... $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{FINITO}}}{E} = \gamma m_0 c^2 = \underset{?}{\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$

PARA $v \to c$ E $\boxed{E}$ FINITO, $m_0 \to 0$

$\Rightarrow$ OU SEJA, FÓTONS SÃO PARTÍCULAS SEM MASSA DE REPOUSO!

(MAS TAMBÉM, COMO VOCÊ DEFINIRIA MASSA DE REPOUSO DA LUZ ???)

$$E^2 = m_0 c^2 + (pc)^2 \Rightarrow \text{SE } m_0 = 0 \Rightarrow \boxed{E = pc}$$

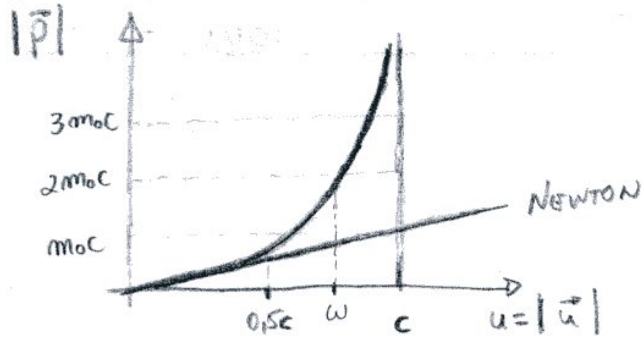
* FÓTON POSSUI MOMENTO
(ESPALHAMENTO COMPTON, EFEITO FOTOELÉTRICO)

* FÓTON POSSUI ENERGIA (PESO?)
(CURVATURA DA LUZ EM UM CAMPO GRAVITACIONAL)

* FÓTONS DENTRO DE UMA CAIXA < EXERCEM PRESSÃO (MOMENTO) / PESAM (ENERGIA)

ANIQUILAÇÃO ELÉTRON-PÓSITRON (PARTÍCULA - ANTIPARTÍCULA):
EXEMPLO DE CONVERSÃO DE MASSA EM ENERGIA

(7) $$\vec{p} = \gamma(u)\, m_0 \vec{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\vec{u}$$



$|\vec{p}|$ É UMA MEDIDA DO IMPACTO EM UMA COLISÃO.

$m_0\omega$ É O QUANTO DE "IMPACTO" QUE SE ESPERA DE UM OBJETO COM MASSA m_0 E VELOCIDADE ω, DO PONTO DE VISTA NEWTONIANO.

EM RELATIVIDADE, ESSE IMPACTO SERIA O DOBRO DO ESPERADO PELA MECÂNICA NEWTONIANA.

ESSE "FATOR DE AUMENTO" É MAIOR CONFORME u SE APROXIMA DE c

ENERGIA CINÉTICA

1º FORÇA EM RELATIVIDADE: $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ MAS $\boxed{\cancel{\vec{F} = m\vec{a}}}$

ERRADO!

SIMPLIFICAÇÃO: $\vec{u}$ NA DIREÇÃO x

$$dK = dW = \frac{dp}{dt}dx = \frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt}dt = u\,dt\ \boxed{\frac{dp}{du}\frac{du}{dt}} = u\,dt\,\frac{du}{dt}\frac{dp}{du}$$

$$dK = u\,du\,\frac{d}{du}\left[\frac{m_0 u}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}\right] = u\,du\,\frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m_0c^2\,\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right]$$

$$\Rightarrow K(u) = \int_0^u dK = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right] = m_0c^2\left[\gamma(u) - 1\right]$$