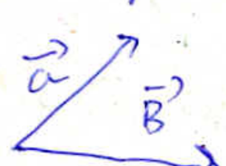
Vetores

Algumas grandezas na física, como massa, carga elétrica, Temperatura, podem ser caracterizadas por um número e são chamadas grandezas escalares. Já para grandezas como Força, velocidade, etc., é preciso especificar a intensidade (módulo) a direção e o sentido. Pode-se verificar que as entidades matemáticas conhecidas como vetores (ou melhor, que a álgebra vetorial) descrevem corretamente essas propriedades.

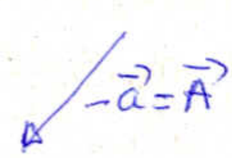
Não vamos aqui enunciar em detalhes as propriedades dos vetores, mas apenas ressaltar alguns aspectos básicos:

- Vetores são representados graficamente por uma seta, cujo comprimento indica o módulo do vetor, o segmento de reta da seta a sua direção e a "ponta" da seta o sentido do vetor. Vamos normalmente indicar um vetor por uma letra com uma ~~se~~ seta sobrescrita: $\vec{a}$, $\vec{B}$, etc., embora haja muitas outras notações alternativas.

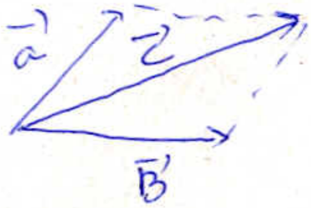


- Qualquer outra seta que seja paralela a $\vec{a}$, tenha o mesmo comprimento e sentido representa o mesmo vetor $\vec{a}$.

O vetor $\vec{A} \equiv -\vec{a}$ é representado por uma seta de mesma direção e mesmo comprimento que os de $\vec{a}$, mas com o sentido invertido:



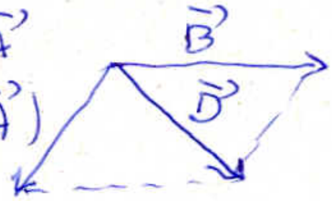
A soma de dois vetores ($\vec{C}=\vec{a}+\vec{B}$) é indicada (e realizada) graficamente, usando a "regra do paralelogramo":



A subtração é feita de modo análogo, somando-se $-\vec{a}$ ($=\vec{A}$) com $\vec{B}$

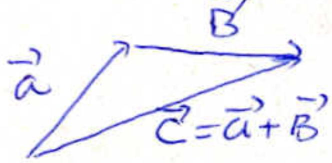
$\vec{D}=\vec{B}-\vec{a}=\vec{B}+\vec{A}$

($-\vec{a}=\vec{A}$)



A soma e a diferença podem ser expressas graficamente, de maneira equivalente como:

$\vec{a}+\vec{B}$



$\vec{D}=\vec{B}-\vec{a}$

(ou $\vec{B}=\vec{a}+\vec{D}$)

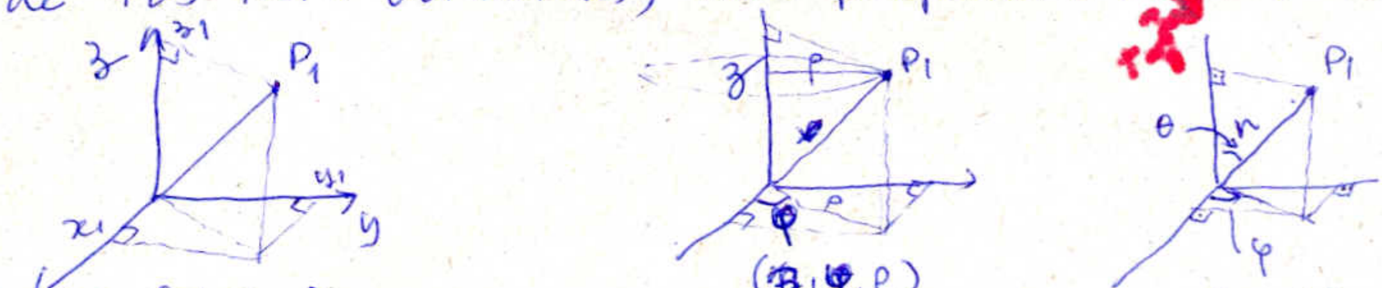
- Na física, as grandezas vetoriais têm dimensões (unidades), como m/s para a velocidade, N para forças etc. Podemos sempre definir um vetor adimensional e de módulo unitário, p. ex.: $\vec{\imath}$, com uma dada direção e um dado sentido:

$\vec{\imath}$ $|\vec{\imath}|=1$ Então, qualquer outro vetor que tenha a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{\imath}$ pode ser escrito como: $\vec{R}=R\vec{\imath}$, onde R é o módulo do vetor $\vec{R}$ (um número, com as dimensões da grandeza física representada por $\vec{R}$). Por exemplo, uma força $\vec{F}$ de intensidade 9,78 N na direção e sentido do vetor unitário $\vec{\imath}$, pode ser escrita como: $\vec{F}=9{,}78\,\vec{\imath}$. Note que $|\vec{F}|=9{,}78$ N (no caso da força se expressa em Newtons)

- Para não haver dúvidas sobre o módulo dos vetores unitários (vetores com módulo = 1) o representamos de uma maneira particular: $\hat{\imath}$ ao invés de $\vec{\imath}$)

Representação de Vetores em Sistemas de Coordenadas (3)

Para se representar pontos, segmentos e objetos no espaço físico (comprimento, largura, altura) ou espaços abstratos (velocidade na horizontal, velocidade na vertical, p.ex), usamos sistemas de eixos ou coordenadas. Há vários sistemas de coordenadas comumente empregados na física, como o esférico, o cilíndrico e o chamado cartesiano, constituído de três retas orientadas, uma perpendicular à outra.

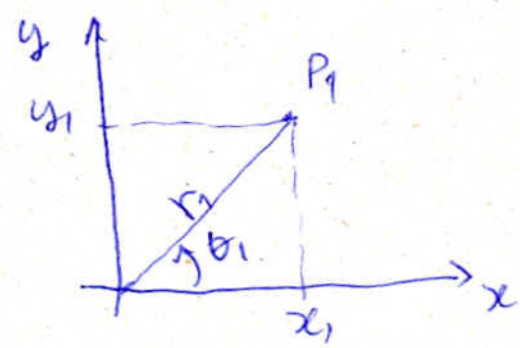


(x, y, z) Cartesianos

(z, φ, ρ) cilíndrico

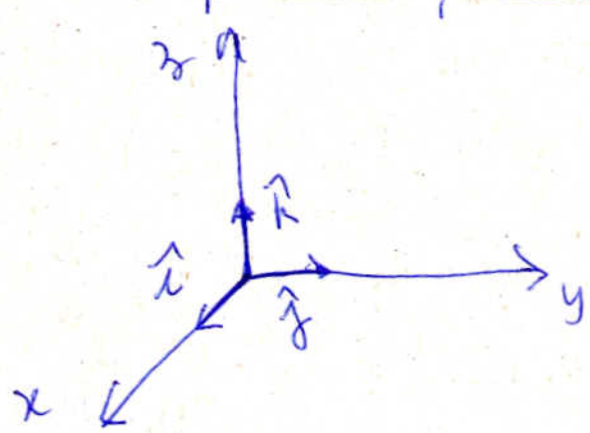
(r, θ, φ) esféricos

- No caso da representação ~~de~~ em um plano, as coordenadas esféricas e cilíndricas coincidem:



Usaremos ~~pr~~ predominantemente neste curso as coordenadas cartesianas, mas em alguns casos as coordenadas polares, que correspondem às cilíndricas e esféricas no plano.

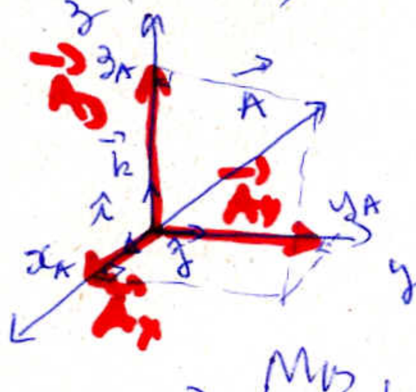
Representação de vetores em coordenadas cartesianas.



- Definimos os vetores unitários $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, nas direções dos eixos x, y e z, respectivamente.

(4)

Então, qualquer vetor $\vec{A}$ no espaço (x, y, z) pode ser representado por uma seta, com origem na origem do sistema de coordenadas, como:

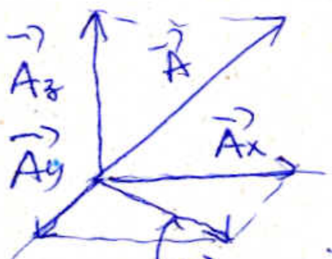


Pode-se facilmente verificar que o vetor $\vec{A}$ pode ser escrito como a soma de três vetores:

$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} + \vec{A_z}$$

Mas, podemos escrever: $\vec{A_x} = x_A \hat{\imath}$, $\vec{A_y} = y_A \hat{\jmath}$ e $\vec{A_z} = z_A \hat{k}$ e portanto,

$$\boxed{\vec{A} = x_A \hat{\imath} + y_A \hat{\jmath} + z_A \hat{k}}.$$



$\vec{A_{xy}} = \vec{A_x} + \vec{A_y}$

$$\vec{A} = \vec{A_z} + \vec{A_{xy}} = \vec{A_x} + \vec{A_y} + \vec{A_z}$$

$$|\vec{A_{xy}}|^2 = |\vec{A_x}|^2 + |\vec{A_y}|^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$|\vec{A}|^2 = |\vec{A_{xy}}|^2 + |\vec{A_z}|^2$$

$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\boxed{\text{Ou } |\vec{A}|^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

Soma de vetores: $\vec{C} = \vec{a} + \vec{B}$

$\vec{a} = x_a \hat{\imath} + y_a \hat{\jmath} + z_a \hat{k}$; $\vec{B} = x_B \hat{\imath} + y_B \hat{\jmath} + z_B \hat{k}$

$\vec{C} = \vec{a} + \vec{B} = x_c \hat{\imath} + y_c \hat{\jmath} + z_c \hat{k} = (x_a + x_B)\hat{\imath} + (y_a + y_B)\hat{\jmath} + (z_a + z_B)\hat{k}$ e portanto,

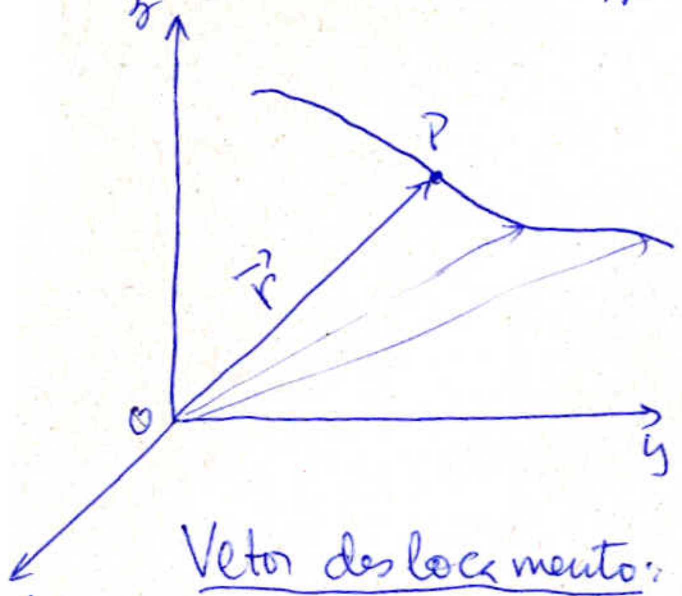
$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= x_a + x_B \\ y_c &= y_a + y_B \\ z_c &= z_a + z_B \end{aligned}}$$

Cinemática 3-D

Vetor Posição: (de uma partícula)

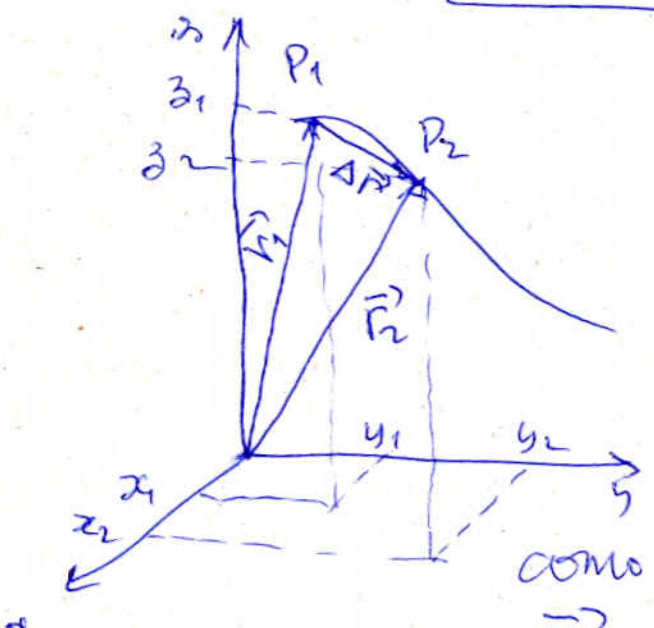
Origem: - na origem do sistema de coordenadas.

extremidade: - na posição onde se encontra a partícula (ponto P)



Trajetória: conjunto dos pontos varridos pela extremidade do vetor $\vec{r}$ ao longo do tempo.

Vetor deslocamento: Se no instante t_1 a partícula se encontra em P_1 (vetor posição $\vec{r}_1$) e em t_2 se encontra em P_2 (vetor posição $\vec{r}_2$), definimos o vetor deslocamento $\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$



- Definimos velocidade média da partícula entre os instantes t_1 e t_2 como:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

e a velocidade instantânea como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Escrevendo:

$\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ e $\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$,

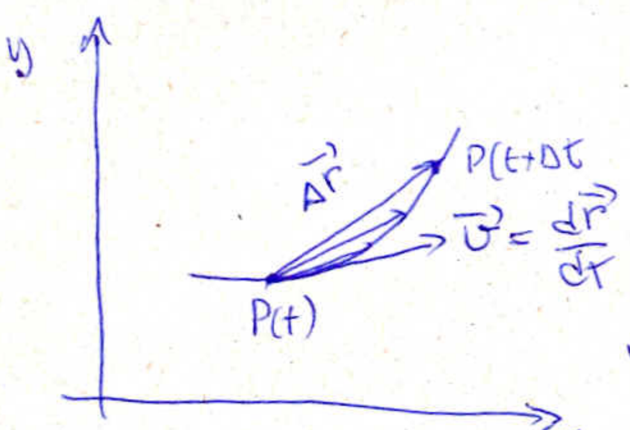
$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$ ou

$\vec{\Delta r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$ e portanto,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} \right)$$

mas $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ e portanto:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$$



Note que à medida em que $\Delta t \to 0$, $\vec{\Delta r}$ vai se aproximando cada vez mais da tangente à curva

"A velocidade é sempre tangente à trajetória"

Aceleração. De maneira análoga, podemos definir a aceleração média ~~como~~ entre t_1 e t_2 como:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

e a aceleração instantânea como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$