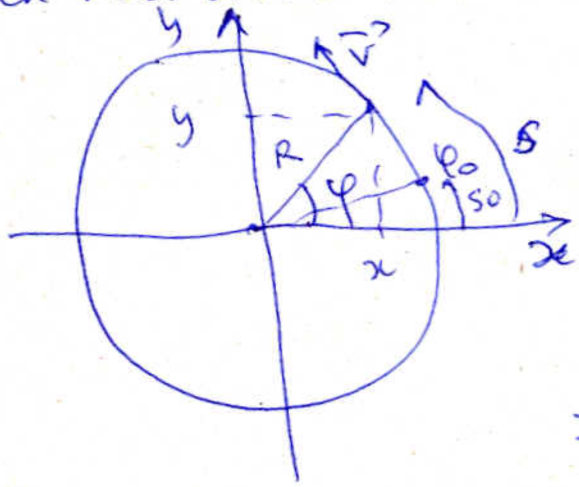
# Movimento Circular.



Há um tipo de movimento, muito semelhante, (mas também muito diferente) ao movimento retilíneo, o movimento circular. Se o módulo da velocidade de uma partícula, realizando o movimento em uma trajetória circular é constante, temos o MCU, movimento circular e uniforme. Devemos entretanto lembrar que velocidade é uma grandeza vetorial e portanto não é jamais constante no movimento circular. Portanto, deve sempre agir uma aceleração sobre a partícula, mesmo no MCU, para mudar a direção da velocidade.




No movimento circular, com $|\vec{v}|$ = constante e R também, temos; num dado instante, considerando que $\varphi = \varphi_0$ p/ $t=0$:

$$x = R\cos\varphi \quad ; \quad y = R\,\text{sen}\,\varphi$$

O percurso pode ser medido pelo comprimento do arco de círculo s. Sendo $s_0 = R\varphi_0$ o comprimento (medido à partir da origem para as rotações, $x=r$, $y=0$, e considerado positivo para rotações anti-horárias:

$$s = s_0 + vt \text{ , ou } \quad \frac{s}{R} = \frac{s_0}{R} + \frac{v}{R}t .$$

Como $\varphi = \frac{s}{R}$, temos

$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$ onde $\omega$, a velocidade angular é definida como $\omega = \frac{v}{R}$ (Note: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ )

Portanto, temos, para as coordenadas cartesianas (2) do ponto P:

$$x = R\cos(\omega t + \varphi_0) \;;\; y = R\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

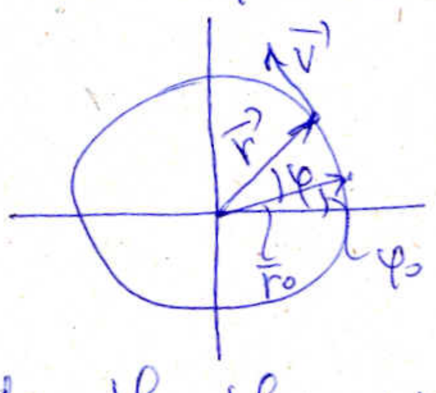
Uma volta completa é realizada em um intervalo de tempo $\Delta t = T$ (período) e cada outra volta é realizada nesse mesmo intervalo de tempo.

1 volta: $\Delta s = 2\pi R$ $(\Delta\varphi = 2\pi)$

$$\Delta s = v.\Delta t \Rightarrow 2\pi R = vT \Rightarrow T = 2\pi\frac{R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

-Se uma volta é realizada em T segundos, então a frequência com que o movimento é realizado é $f = \frac{1}{T}$ $(s^{-1})$. A unidade de frequência, $s^{-1}$ é chamada Hertz.

Descrição Vetorial (coordenadas Cartesianas)




temos $\vec{r}(t) = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$,

$\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j}$

com $x_0 = R\cos\varphi_0$, $y_0 = R\,\text{sen}\,\varphi_0$

$x(t) = R\cos\varphi$, $y(t) = R\,\text{sen}\,\varphi$,

Onde $\varphi = \varphi_0 + \omega t$:

$$\vec{r} = R\cos(\omega t + \varphi_0)\,\hat{i} + R\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)\,\hat{j}$$

Como $\frac{d}{dt}\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = \omega\cos(\omega t + \varphi_0)$ e $\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$

$$\cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} = \omega R\cos(\omega t + \varphi_0)\,\hat{i} - \omega R\,\text{sen}}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega R\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)\,\hat{i} + \omega R\cos(\omega t + \varphi_0)\,\hat{j}$$

e portanto,

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = -\omega R \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)\,\vec{i} + \omega R \cos(\omega t + \varphi_0)\,\vec{j}$$

e portanto,

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{\omega^2 R^2 [\operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)]} = \underline{\omega R}.$$

a aceleração não é nula, como previamos:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = -\omega^2 R \cos(\omega t + \varphi_0)\hat{i} - \omega^2 R \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)\vec{j}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 (R \cos(\omega t + \varphi_0)\,\vec{i} + R \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)\,\vec{j})$$

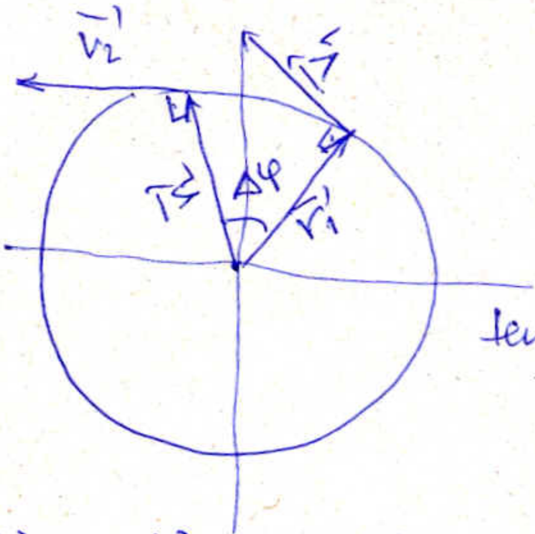
ou $\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{R}}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\omega^4 R^2 (\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi_0))} = \omega^2 R$$

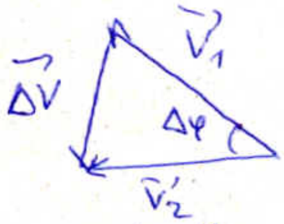
Portanto, $\vec{a}$ tem módulo constante, direção radial e sentido oposto ao do vetor posição $\vec{R}$.

Note que $\vec{a}$ não tem componente na direção da velocidade e portanto não pode alterar o seu módulo. Esse tipo de aceleração (radial, sempre perpendicular à velocidade) é também chamada aceleração centripeta (= em direção ao centro.

## Descrição Vetorial - Geométrica




Seja $\vec{r}_1$ = vetor posição no instante $t_1$ e $\vec{r}_2$ = vetor posição no instante $t_2$: Como $\vec{v}_1 \perp \vec{r}_1$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{r}_2$, temos:




Como $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$ e $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$, os triângulos (isósceles) são semelhantes e portanto:

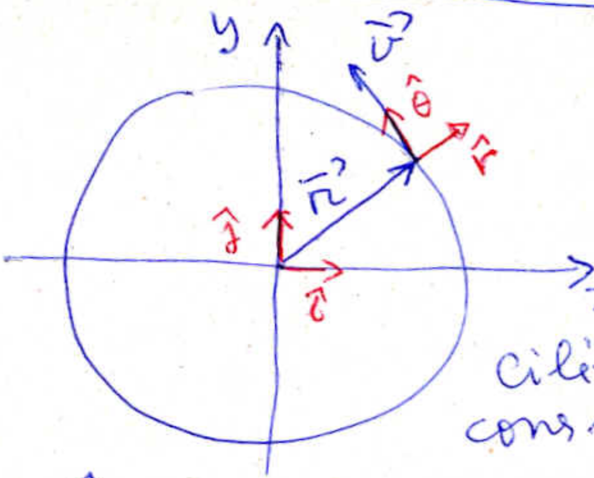
$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r} \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = v\frac{|\Delta\vec{r}|}{r} \quad . \times \text{ por } \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{|\vec{a}| = \frac{v^2}{r}}$$

## ~~Movimento~~ Descrição em Coordenadas Polares.

Um sistema de coordenadas mais adequado para a descrição de movimentos circulares (ou semelhantes, como o da Terra em torno do Sol) é o de Coordenadas Polares. Coordenadas polares são a redução, para o plano, de dois sistemas de coordenadas espaciais: Coordenadas Cilíndricas e Coordenadas Esféricas.

# Vetores em Coordenadas Polares




Assim como em coordenadas Cartesianas definimos os vetores unitários (versores) $\hat{i}$ e $\hat{j}$; em Coordenadas Cilíndricas são definidos seus correspondentes $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$.

O versor $\hat{r}$ na direção radial e $\hat{\theta}$, perpendicular a $\hat{r}$, representando a direção angular. Portanto, o vetor posição, de qualquer tipo de movimento em coordenadas cilíndricas é sempre dado por

$\vec{r} = R\,\hat{r}$. No caso do movimento circular, R = Constante! Note que ainda no movimento circular $\vec{v}$ tem sempre a direção do versor $\hat{\theta}$ e portanto

$\vec{v} = v\,\hat{\theta}$.

Note ainda, que, contrário ao caso das Coordenadas Cartesianas, os versores $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ não são constantes (variam no tempo), embora $|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1$. Pode-se mostrar que:

$$\boxed{\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{\theta}} \quad e \quad \boxed{\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\omega\hat{r}}$$

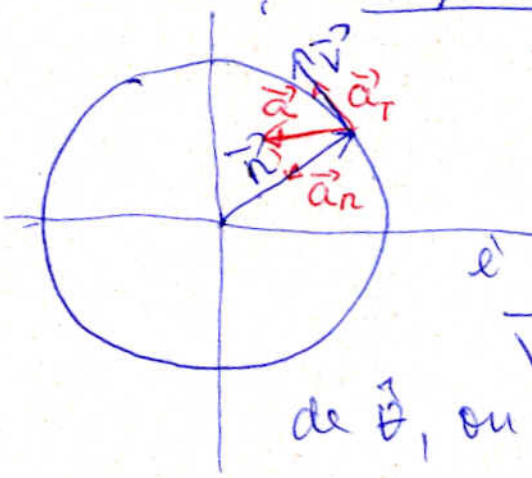
portanto, no M.C, com $\vec{r} = R\hat{r}$ (R = cte)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = R\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega R\hat{\theta} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R\hat{\theta})$$
$$= -\omega^2 R\,\hat{r} = \vec{a}$$

# Movimento Circular Não Uniforme



- Se o módulo da velocidade $v$, não é constante, o movimento circular é dito <u>não uniforme</u>, ou <u>acelerado</u>. Neste caso, além da aceleração radial, há também uma aceleração <u>tangencial</u> (paralela ao vetor velocidade)




$\vec{a} = a_R \hat{R} + a_T \hat{\theta}$

Em coordenadas polares, a descrição é simples:

$\vec{v} = v\hat{\theta}$ ($\vec{v}$ tem sempre a direção de $\hat{\theta}$, ou seja, $\perp$ a $\vec{R}$).

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{\theta}) = \frac{dv}{dt}\hat{\theta} + v\frac{d\hat{\theta}}{dt} = a_T\hat{\theta} - \omega v\hat{R}$$

onde $\omega v = a_R$ como $\omega = \frac{v}{R}$, $a_R = \frac{v^2}{R}$.

No caso em que $a_T =$ constante, temos o MC Uniformemente acelerado:

$$\frac{dv}{dt} = a_T \Rightarrow \begin{cases} v(t) = v_0 + a_T t \quad (\times \frac{1}{R}) \\ \omega(t) = \omega_0 + \alpha t, \quad \alpha = \frac{a_T}{R} \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Note que se tivermos $(v_0, \varphi_0) =$ módulo de $v$ e posição angular em $t = t_0$ (ao invés de $t = t_0 = 0$), temos

$$v(t) = v_0 + a_T(t - t_0)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \text{ e}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$