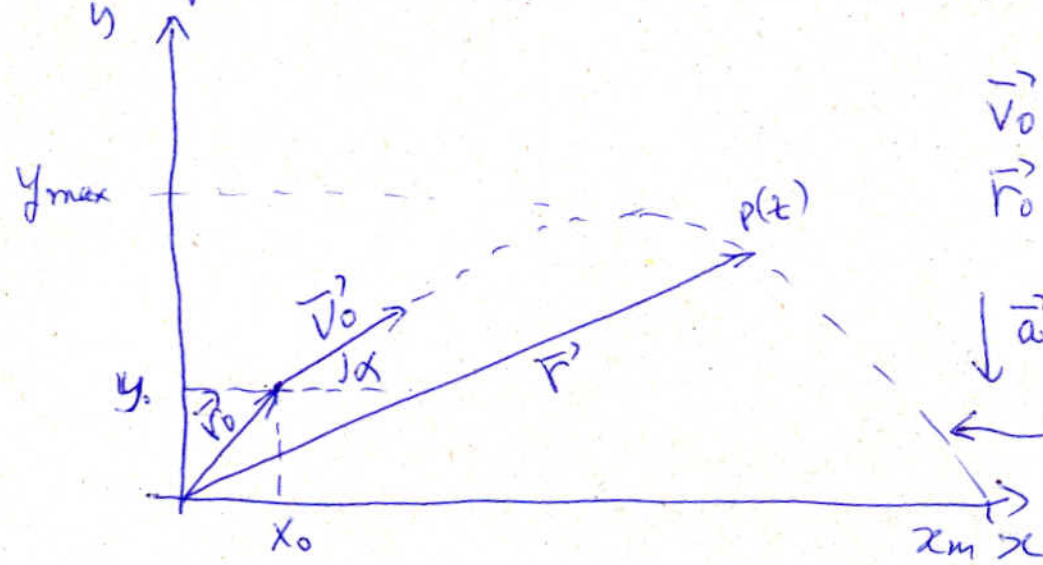
Lançamento de Projeteis

Vamos agora descrever o problema do lançamento de um projétil, sob a ação da gravidade, usando notação vetorial



$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$

$\vec{r}_0 = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}$

$\vec{a} = 0\hat{\imath} - g\hat{\jmath}$

O projetil, com velocidade inicial $\vec{v}_0$ e posição inicial $\vec{r}_0$, está sujeito a uma aceleração $\vec{a} = 0\hat{\imath} - g\hat{\jmath}$.

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x - v_{x_0} = \displaystyle\int_0^t 0 \cdot dt = 0 \\ \text{ou } \boxed{v_x(t) = v_{x_0}} \end{cases}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \Rightarrow v_y - v_{y_0} = \int_0^t -g \cdot dt = -gt$$

$$\text{ou } \boxed{v_y(t) = v_{0y} - gt}$$

mas $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = \dfrac{dx}{dt}\hat{\imath} + \dfrac{dy}{dt}\hat{\jmath}$ e portanto

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x} \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t v_{0x}\,dt = v_{0x}t$$

$$\text{ou } \boxed{x(t) = x_0 + v_{0x}t}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{0y} - gt \Rightarrow y - y_0 = \int_0^t (v_{0y} - gt)\, dt \qquad (2)$$

$$y - y_0 = \int_0^t v_{0y}\, dt - \int_0^t g\, t\, dt = v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

ou $\boxed{y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2}$

de $x - x_0 = v_{0x} t \rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$. Subst. essa relação p/ t, na expressão $y(t)$, podemos obter a equação da trajetória, ou seja, $y(x)$:

$$y = y_0 + v_{0y} \frac{(x - x_0)}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_{0x}^2} \Rightarrow$$

$$y = \underbrace{\left(y_0 - \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x_0 - \frac{1}{2} \frac{g x_0^2}{v_{0x}^2}\right)}_{C} + \underbrace{\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{g x_0}{v_{0x}^2}\right)}_{B} \cdot x \underbrace{- \frac{g}{2 v_{0x}^2}}_{A} x^2$$

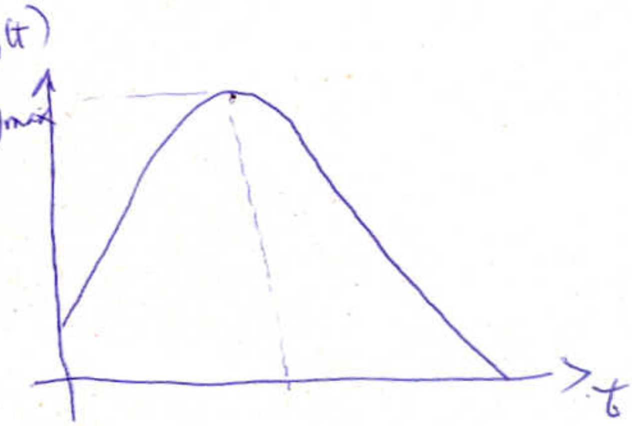
ou $y(x) = A x^2 + B x + C \equiv$ parábola!

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (x_0 + v_{0x} t)\, \hat{\imath} + (y_0 + v_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2)\, \hat{\jmath} \\ \vec{v}(t) &= v_{0x}\, \hat{\imath} + (v_{0y} - g t)\, \hat{\jmath} \end{aligned}}$$

Altura máxima

A altura máxima no lançamento de um projétil, corresponde ao valor máximo do componente $\hat{j}$ do vetor $\vec{r}(t)$. Sabemos que posições de máximo ou mínimo de uma função, correspondem aos pontos em que a derivada é nula (reta tangente é horizontal)

$$y(t) = y_0 + V_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$



$y_{max} = y$ no instante em que $\frac{dy}{dt} = 0$!

$$\frac{dy}{dt} = V_{oy} - gt$$

$V_{oy} - g t_s = 0$ $\boxed{t_s = V_{oy}/g}$ (note que t_s é o instante em que y_{max} é alcançado e portanto corresponde ao tempo de subida do projétil.

$$y_{max} = y_0 + V_{oy}\cdot\left(\frac{V_{oy}}{g}\right) + \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{V_{oy}}{g}\right)^2 =$$

$$\boxed{y_{max} = y_0 + \frac{1}{2}\frac{V_{oy}^2}{g}}$$

O alcance do lançamento, corresponde ao valor de X_{max}, ou seja, valor de x no instante em que $y = 0$. (instante t_m)

com $y(t) = y_0 + V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

$y=0$ para:

$$\frac{1}{2} g t^2 - V_{0y} t - y_0 = 0 \quad g t^2 - 2V_{0y} t - 2y_0 = 0$$

$$t = \frac{2V_{0y} \pm \sqrt{4V_{0y}^2 + 8gy_0}}{2g} = \frac{2V_{0y} \pm 2V_{0y}\sqrt{\left(1 + \frac{2gy_0}{V_{0y}^2}\right)}}{2g}$$

$$= \boxed{\frac{V_{0y}}{g} \pm \frac{V_{0y}}{g}\sqrt{1 + \frac{2gy_0}{V_{0y}^2}}}$$

- o valor obtido com o sinal $\ominus$, corresponde a um valor de $t<0$ (supondo $y_0>0$)

e portanto o instante t_m correspondente ao alcance é dado usando-se o sinal de $\oplus$:

$$t_m = \frac{V_{0y}}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{V_{0y}^2}}\right).$$ Note que $\frac{V_{0y}}{g}$ é o tempo de subida, t_s. No caso em que $y_0 = 0$ $t_m = 2\frac{V_{0y}}{g} = 2t_s$.

Veja tb. que t_m pode ser escrito como

$$t_m = t_s + t_s\sqrt{1 + \frac{2gy_0}{V_{0y}^2}} = t_s + t_d$$ onde

$t_d = \frac{V_{0y}}{g}\sqrt{1 + \frac{2gy_0}{V_{0y}^2}}$ é o tempo de descida

se $y_0 = 0$, $t_d = t_s$ e $t_m = 2t_s$

O alcance x_m é ~~dado~~ obtido substituindo-(5) se t_m na expressão p/ $x(t)$:

$x_m = x(t_m) = x_0 + V_{0x}(t_s + t_d)$. No caso em que $y_0 = 0$, $t_d = t_s = V_{0y}/g$ e:

$x_m = x_0 + \frac{2 V_{0x} V_{0y}}{g}$. Com $V_{0x} = V_0 \cos\theta$ e $V_{0y} = V_0 \,\text{sen}\,\theta$,

$x_{max} = x_0 + \frac{2 V_0^2 \,\text{sen}\,\theta \cos\theta}{g}$. Usando-se a relação trigonométrica: $2 \,\text{sen}\,\theta \cos\theta = \text{sen}\, 2\theta$,

$x_{max} = x_0 + \frac{V_0^2 \,\text{sen}\, 2\theta}{g}$. Note que para um dado valor de V_0 (= um dado tipo de canhão), o alcance é máximo quando $\text{sen}\,2\theta$ é máximo (= 1) e portanto p/ $2\theta = 90°$ ou $\theta = 45°$. Note ainda que $\text{sen}(90+\varphi) = \text{sen}(90-\varphi)$. Portanto, projéteis lançados $45+\delta$ e $45-\delta$ tem o mesmo alcance.

Velocidade do projétil em função da altura

Por simplicidade, vamos tomar $y_0 = 0$:

$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$ e $v_y = v_{0y} - gt$

Substituindo $t = \frac{v_{0y} - v_y}{g}$ na expressão para y,

$y = v_{0y} \left(\frac{v_{0y} - v_y}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y} - v_y}{g^2}\right)^2$,

$y \cdot g = v_{0y}^2 - \cancel{v_y v_{0y}} - \frac{1}{2} v_{0y}^2 - \frac{1}{2} v_y^2 + \cancel{v_{0y} v_y}$

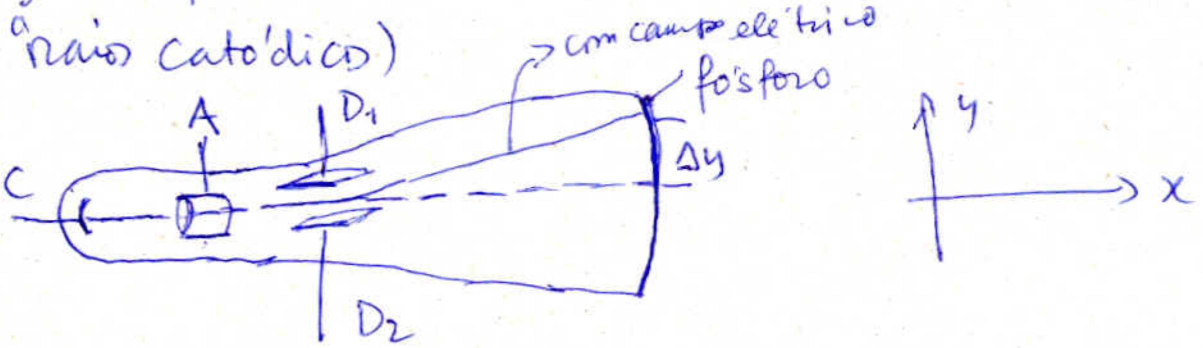
Ou

$$\boxed{2gy = v_{0y}^2 - v_y^2}$$

(que é a famosa expressão de Torricelli).

Exemplo: O experimento de J. J. Thomson (1897)

Esse experimento é considerado o que pela primeira vez comprovou que os elétrons eram corpúsculos (partículas). Em um tubo onde é feito (parcialmente) vácuo, um catodo (C) aquecido próximo ao anodo (A) produz um feixe luminoso dentro do tubo, conhecido como "raios catódicos")



Se as placas defletoras D_1 e D_2 estão no mesmo potencial, o feixe de raios catódicos segue em linha reta, até atingir a parede revestida internamente com um material fosforescente, produzindo um ponto luminoso (como numa tela de TV de tubo).

Se uma diferença de potencial $\underline{V}$ é aplicada entre D_1 e D_2, o elétron será desviado para cima ou para baixo, dependendo da direção de V. Durante sua passagem pelas placas, ~~ele~~ sofre uma aceleração constante p/ cima (ou p/ baixo), numa trajetória parabólica.

Sua velocidade ao longo da horizontal permanece inalterada. Com cálculos simples como os que fizemos, é possível determinar a razão e/m, medindo-se o deslocamento Δy do feixe.