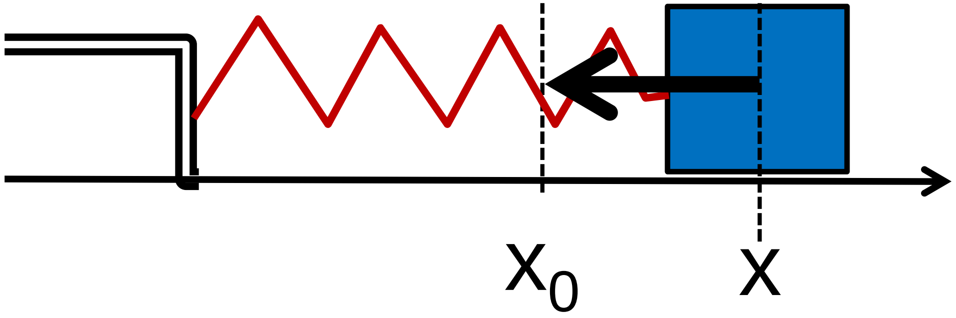
Mecânica: Oscilador Harmônico

Força que **depende da posição**: $\vec{F}_R = -k(x - x_0)\ \mathbf{i}$

Exemplo: Sistema massa-mola:



2a Lei de Newton (tomamos x_0=0):

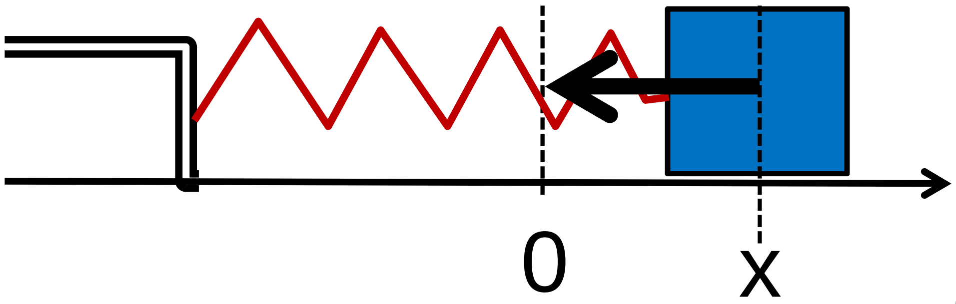
$$\boxed{\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -k\ x \\ \dfrac{dx}{dt} = v \end{cases}}$$

Ou, equivalentemente:

$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k\ x(t)}$$

Solução analítica

Sistema massa-mola:



$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}\ x(t) \equiv -\omega^2\ x(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solução analítica:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & A\ \cos\left(\omega t + \phi\right) \\ v(t) & = & -A\omega\ \sin\left(\omega t + \phi\right) \end{array} \right.$$

Condições iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & A\ \cos\left(\phi\right) \\ v(0) & = & -A\omega\ \sin\left(\phi\right) \end{array} \right.$$

Energia:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m(v(t))^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 = m\omega^2 A^2 = \text{const.}}$$

Solução numérica: Método de Euler

Método de Euler:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Ou seja, **dados** x(t) e v(t) (e a Energia tb), podemos calcula-los em t+ Δt:

$$\begin{cases} x(t+\Delta t) &=& x(t) + v(t)\,\Delta t \\ v(t+\Delta t) &=& v(t) + \left(-\frac{k}{m}x(t)\right)\Delta t \\ E &=& \frac{1}{2}m(v(t))^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 \end{cases}$$

Solução numérica: método de Euler

Discretização!

$$\boxed{t_n = n\,\Delta t} \qquad \boxed{v(t) \approx v(t_n) \equiv v_n} \qquad \boxed{x(t) \approx x(t_n) \equiv x_n}$$

Posição e velocidade são dados em intervalos *discretos*!

Fórmula recursiva:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + v_n\,\Delta t \\ v_{n+1} & = & v_n - \dfrac{k}{m} x_n\,\Delta t \\ E_{n+1} & = & \frac{1}{2} m (v_{n+1})^2 + \frac{1}{2} k (x_{n+1})^2 \end{array} \right.}$$

- Começando em t=0 [dados x(0),v(0)] podemos calcular em t_1 [x_1,$(v)_1$].
- Temos tudo em t_1, calculamos tudo em t_2.... e assim por diante!

Aula 7 – Tarefa 1 (Fazer upload!)

Um corpo de massa m=1 kg está sujeito a força de uma mola ideal de constante de k=1 N/m. Em t=0s, a mola tem um estiramento de 20 cm em relação à sua posição de equilíbrio e o corpo parte do repouso.

- *Calcule a posição x(t) do corpo nos tempos $t_n=n.\Delta t$ de 0 até $t_N=40s$ com passo de* ***Δt=0.1s*** *usando o método de Euler* (Dicas 1 e 2).
- *Para cada passo, imprima t_n ,$x(t_n)$ e $v(t_n)$ e a Energia com 5 casas.*
- *Faça um gráfico de $x(t_n)$ (use o símbolo '-o') e compare com a solução analítica (use linha contínua).*
- *Em uma outra figura* [**figure(2)**] *faça um gráfico de E versus t_n.*
- *O seu resultado faz sentido físico? Reduzir o passo resolve?*

Dica 1 : Aqui é melhor definir arrays para x_n , v_n e E_n.

Dica 2 : Cuidado para não calcular v_{n+1} usando x_{n+1} ou vice-versa!

Solução numérica: método de Runge-Kutta

Método de Euler: $v(t+\Delta t) \approx v(t) - (k/m)x(t)\ \Delta t$

Aproximação melhor: calcular x em “meio passo” adiante.

$$v(t+\Delta t) \approx v(t) - (k/m)\underline{x\left(t+\Delta t/2\right)}\ \Delta t$$

onde:

$$x(t+\Delta t/2) \approx x(t) + v(t)\ \Delta t/2$$

Temos que fazer o mesmo com x(t)!

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \underline{v\left(t+\Delta t/2\right)}\ \Delta t$$

onde:

$$v(t+\Delta t/2) \approx v(t) - (k/m)x(t)\ \Delta t/2$$

Método de Runge-Kutta 2a ordem (RK2)

Definimos os "k1":

$$\begin{cases} k_1^x &= v(t)\,\Delta t \\ k_1^v &= -(k/m)\,x(t)\,\Delta t \end{cases}$$

"Valores em meio passo":

$$\begin{cases} x(t+\Delta t/2) &= x(t) + k_1^x/2 \\ v(t+\Delta t/2) &= v(t) + k_1^v/2 \end{cases}$$

Definimos os "k2":

$$\begin{cases} k_2^x &= v(t+\Delta t/2)\,\Delta t \\ k_2^v &= -(k/m)\,x(t+\Delta t/2)\,\Delta t \end{cases}$$

Método de Runge-Kutta de 2a ordem (**RK2**):

$$\boxed{\begin{cases} x(t+\Delta t) &= x(t) + k_2^x \\ v(t+\Delta t) &= v(t) + k_2^v \end{cases}}$$

Ou seja, **dados** x(t) e v(t) (e a Energia tb), podemos calcula-los em t+ Δt:

Método de Runge-Kutta de 2a ordem

Para cada passo, calcula-se:

$$\boxed{t_n = n\,\Delta t}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} k_1^x & = & v_n\ \Delta t \\ k_1^v & = & -(k/m)\ x_n\ \Delta t \\ x_{1/2} & = & x_n + k_1^x/2 \\ v_{1/2} & = & v_n + k_1^v/2 \\ k_2^x & = & v_{1/2}\ \Delta t \\ k_2^v & = & -(k/m)\ x_{1/2}\ \Delta t \end{array}\right.$$

RK2:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + k_2^x \\ v_{n+1} & = & v_n + k_2^v \\ E_{n+1} & = & \frac{1}{2}m(v_{n+1})^2 + \frac{1}{2}k(x_{n+1})^2 \end{array}\right.}$$

- Começando em t=0 [dados x(0),v(0)] podemos calcular em t_1 [x_1,$(v)_1$].
- Temos tudo em t_1, calculamos tudo em t_2.... e assim por diante!

Aula 7 – Tarefa 2 (Fazer upload!)

Um corpo de massa m=1 kg está sujeito a força de uma mola ideal de constante de k=1 N/m. Em t=0s, a mola tem um estiramento de 20 cm em relação à sua posição de equilíbrio e o corpo parte do repouso.

- *Calcule a posição x(t) do corpo nos tempos* $t_n=n.\Delta t$ *de 0 até* $t_N=40s$ *com passo de* $\boldsymbol{\Delta t=0.1s}$ *usando o método de RK2 .*
- *Na* [**figure(3)**] , *faça um gráfico de* $x(t_n)$ *(use o símbolo '-o') e compare com a solução analítica (use linha contínua).*
- *Em uma outra figura* [**figure(4)**] *faça um gráfico de E versus* t_n *calculada para o caso exato e RK2.* (Dica 1).

Dica 1 : Coloque labels e legendas nos gráficos. Exemplo:

```
xlabel('Tempo','FontSize',14);
ylabel('Energia','FontSize',14);
legend(,'Energia RK2','Energia Exata');
```