



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #12

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

25/09/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Equações diferenciais de equilíbrio em coordenadas retangulares
2. Equações diferenciais de equilíbrio em coordenadas cilíndricas
3. Equações diferenciais de equilíbrio em coordenadas esféricas
4. Equações diferenciais de equilíbrio em outros sistemas de coordenadas



1. Equações diferenciais de equilíbrio em coordenadas retangulares

Consideremos o sólido deformável indicado na Figura 1, submetido à ação de forças distribuídas no volume (as quais serão denotadas pelo vetor $\vec{b}$) e por forças distribuídas em sua superfície (as quais serão denotadas pelo vetor $\vec{s}$).

Consideremos também um elemento infinitesimal retirado deste sólido, com faces paralelas aos planos coordenados do sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$ (no instante de tempo t em consideração), o qual constitui um referencial inercial, e designemos por $\vec{a}$ o vetor aceleração absoluta do elemento (medida, portanto, no mesmo referencial $Oxyz$) neste mesmo instante de tempo.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

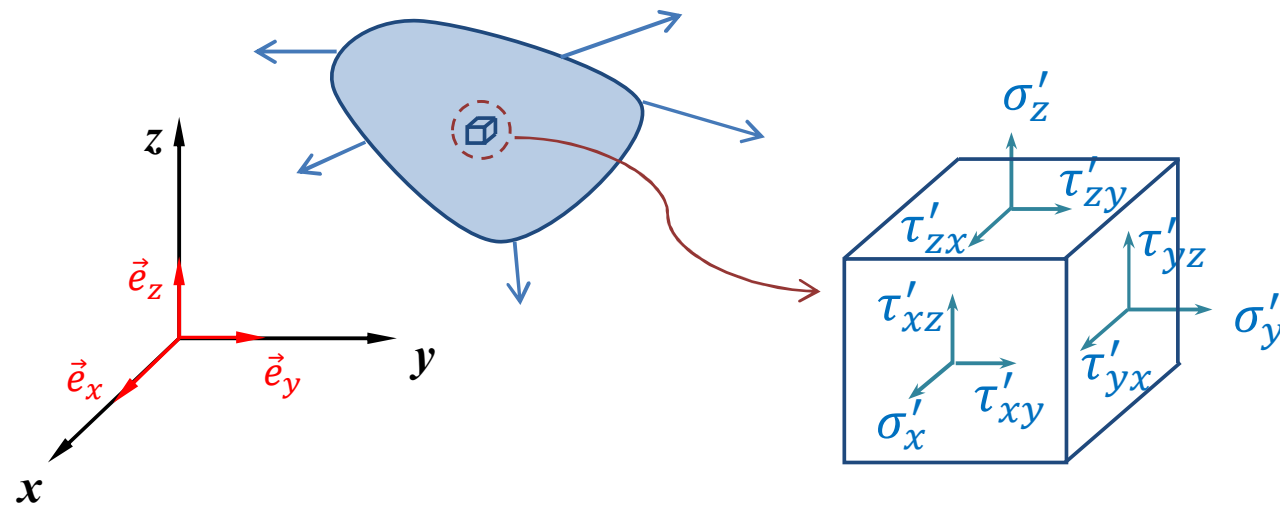


Fig. 1. Sólido deformável submetido a forças distribuídas e elemento infinitesimal retirado do mesmo.

A Figura 1 ilustra também os valores médios das forças distribuídas nas faces de orientação positiva do elemento retirado do sólido. Aplicando a 2ª lei de Newton ao movimento deste elemento, teremos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a} \quad \text{Eq.(1)}$$

onde $\vec{R}$ representa a resultante de todas as forças externas aplicadas sobre o elemento, englobando tanto as forças distribuídas no volume (a exemplo das forças gravitacionais) quanto as forças distribuídas na superfície do elemento. Rescrevendo Eq.(1) na forma das três equações escalares e considerando que $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ e que $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, teremos:

$$R_x = m \cdot a_x$$

$$R_y = m \cdot a_y \quad \text{Eq.(2)}$$

$$R_z = m \cdot a_z$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Designando por dx , dy e dz os comprimentos das faces do elemento medidos, respectivamente ao longo dos eixos x , y e z , podemos considerar as seguintes aproximações de 1ª ordem para os valores médios das forças distribuídas nas faces de orientação positiva do elemento:

- Para a face de normal externa $\vec{n} = \vec{e}_x$:

$$\begin{aligned}\sigma'_x &\cong \sigma_x + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dx \\ \tau'_{xy} &\cong \tau_{xy} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dx \\ \tau'_{xz} &\cong \tau_{xz} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dx\end{aligned} \quad \text{Eq.(3)}$$

onde σ_x , τ_{xy} e τ_{xz} correspondem aos valores médios das forças distribuídas na face de orientação negativa do elemento (face de normal externa $\vec{n} = -\vec{e}_x$).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Para a face de normal externa $\vec{n} = \vec{e}_y$:

$$\tau'_{yx} \cong \tau_{yx} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dy$$

$$\sigma'_y \cong \sigma_y + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dy \quad \text{Eq.(4)}$$

$$\tau'_{yz} \cong \tau_{yz} + \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dy$$

Onde τ_{yx} , σ_y , e τ_{yz} correspondem aos valores médios das forças distribuídas na face de orientação negativa do elemento (face de normal externa $\vec{n} = -\vec{e}_y$).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Para a face de normal externa $\vec{n} = \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}\tau'_{zx} &\cong \tau_{zx} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dz \\ \tau'_{zy} &\cong \tau_{zy} + \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dz \\ \sigma'_z &\cong \sigma_z + \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dz\end{aligned}\quad \text{Eq.(5)}$$

Onde τ_{zx} , τ_{zy} e σ_z correspondem aos valores médios das forças distribuídas na face de orientação negativa do elemento (face de normal externa $\vec{n} = -\vec{e}_z$).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Retomando a Eq.(2-a), teremos, então:

$$\begin{aligned} (\sigma'_x - \sigma_x)dydz + (\tau'_{yx} - \tau_{yx})dxdz + (\tau'_{zx} - \tau_{zx})dxdy + b_x dxdydz = \\ = (\mu dxdydz)a_x \end{aligned} \quad \text{Eq.(6)}$$

Onde μ corresponde ao valor médio da massa específica do material do sólido, naquele dado instante de tempo, para o volume de dimensões dx , dy , dz considerado. Utilizando, agora, as aproximações de 1ª ordem estabelecidas pelas Eqs.(3-5), virá:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dxdydz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dydxdz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dzdxdy \\ + b_x dxdydz \cong (\mu dxdydz)a_x \end{aligned} \quad \text{Eq.(7)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Dividindo todas as parcelas de Eq.(7) pelo volume do elemento $dV = dxdydz$ e levando ao limite para $dx \rightarrow 0$, $dy \rightarrow 0$ e $dz \rightarrow 0$ (de modo que as aproximações de 1ª ordem sejam suficientemente precisas), obteremos a equação diferencial do movimento segundo a direção do eixo Ox :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{Eq.(8)}$$

Procedendo de forma análoga em relação às duas outras direções, teremos:

- Equação diferencial do movimento segundo a direção do eixo Oy :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{Eq.(9)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Equação diferencial do movimento segundo a direção do eixo Oz :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{Eq.(10)}$$

Onde (u, v, w) correspondem às componentes de deslocamento dos pontos do sólido segundo as direções dos eixos coordenados.

Para os casos em que as forças de inércia, decorrentes da aceleração do elemento, forem desprezíveis face às forças distribuídas em suas faces teremos as equações diferenciais de equilíbrio do elemento dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq.(11)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E, ainda, se desconsiderarmos as forças distribuídas no volume (face às forças distribuídas no contorno do sólido e, conseqüentemente, das faces de qualquer elemento interno retirado dele), teremos as equações diferenciais de equilíbrio (em coordenadas cartesianas) na forma mais simples:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad \text{Eq.(12)}$$

Para mais informações sobre o assunto, vide Timoshenko e Goodier [1].



2. Equações diferenciais de equilíbrio em coordenadas cilíndricas

Naturalmente, a aplicação da 2ª lei de Newton para a descrição do movimento do sistema de pontos materiais da seção anterior, também pode ser feita em outros sistemas de coordenadas, que não o sistema de coordenadas cartesianas. A Fig.2 mostra as relações entre o sistema de coordenadas retangulares e o sistema de coordenadas cilíndricas, bem como as bases associadas a cada sistema. Já a Fig.3 ilustra as tensões agindo nas faces de um elemento infinitesimal em coordenadas cilíndricas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

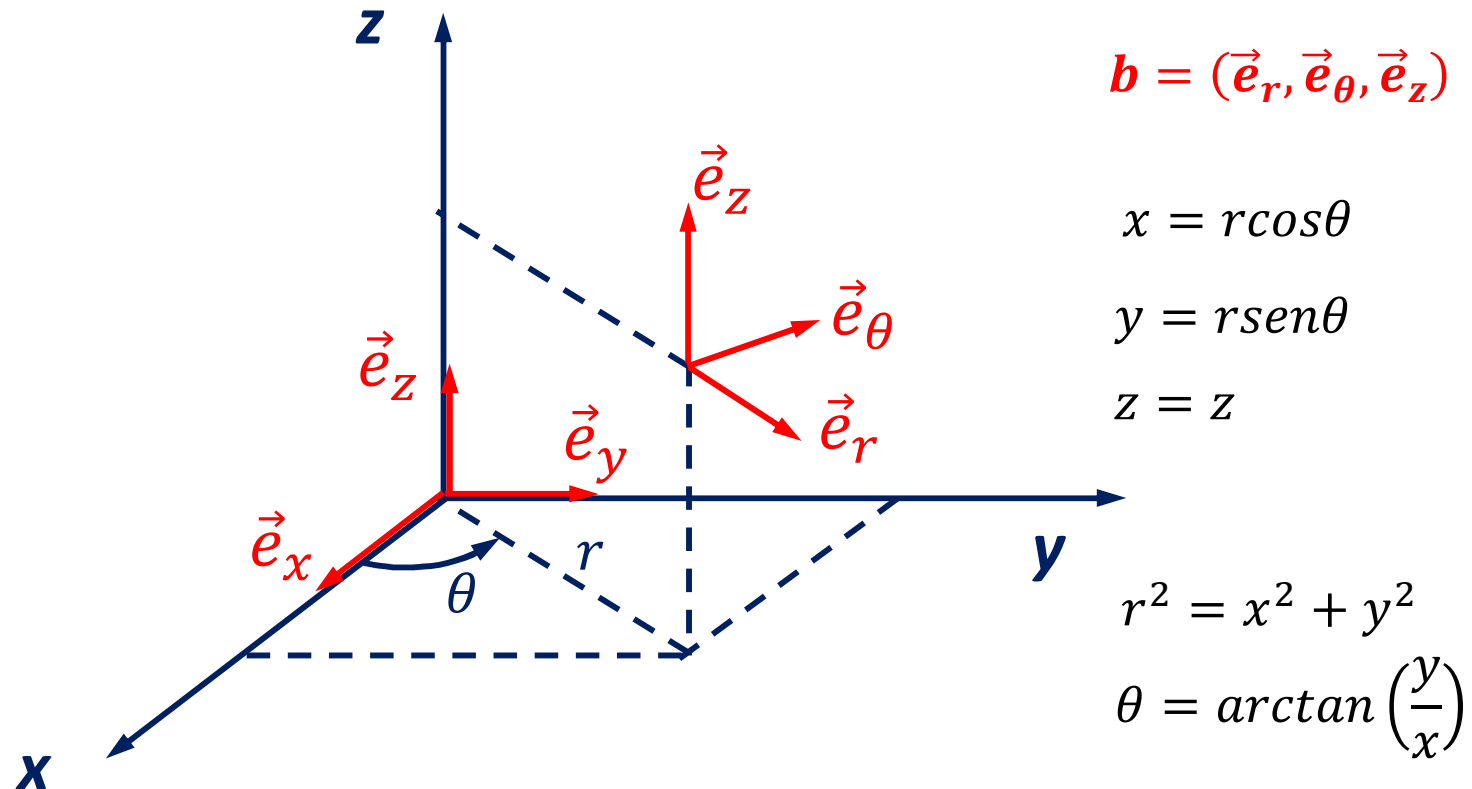


Fig. 2. Sistema de coordenadas retangulares e sistema de coordenadas cilíndricas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

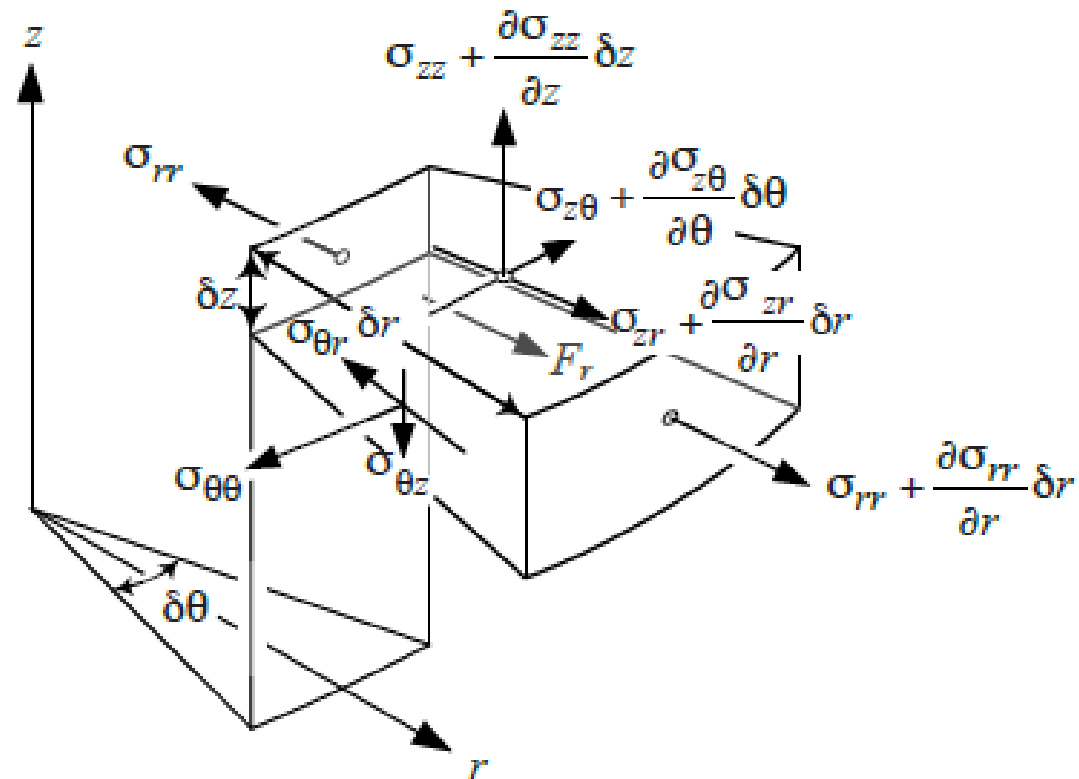


Fig. 3. Tensões nas faces de um elemento infinitesimal em coordenadas cilíndricas [3].



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Mostra-se que as equações do movimento em coordenadas cilíndricas ficam dadas pelas seguintes equações escalares:

- Equação diferencial do movimento segundo a direção radial (versor $\vec{e}_r$):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + b_r = \mu a_r \quad \text{Eq.(13)}$$

- Equação diferencial do movimento segundo a direção circunferencial (versor $\vec{e}_\theta$):

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + b_\theta = \mu a_\theta \quad \text{Eq.(14)}$$

- Equação diferencial do movimento segundo a direção longitudinal (versor $\vec{e}_z$):

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + b_z = \mu a_z \quad \text{Eq.(15)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Decorrem, naturalmente, de Eq.(13-15), as correspondentes equações de equilíbrio do sólido em coordenadas cilíndricas, que ficam (vide, p.ex., Sokolnikoff [2]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + b_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + b_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + b_z &= 0\end{aligned}\quad \text{Eq.(16)}$$

Para mais informações sobre o assunto, vide Timoshenko e Goodier [1].



3. Equações diferenciais de equilíbrio em coordenadas esféricas

Consideremos, por fim, o caso em que se deseja obter as equações diferenciais de movimento dos pontos do sólido deformável no sistema de coordenadas esféricas. A Fig. 4 ilustra um elemento infinitesimal em coordenadas esféricas.

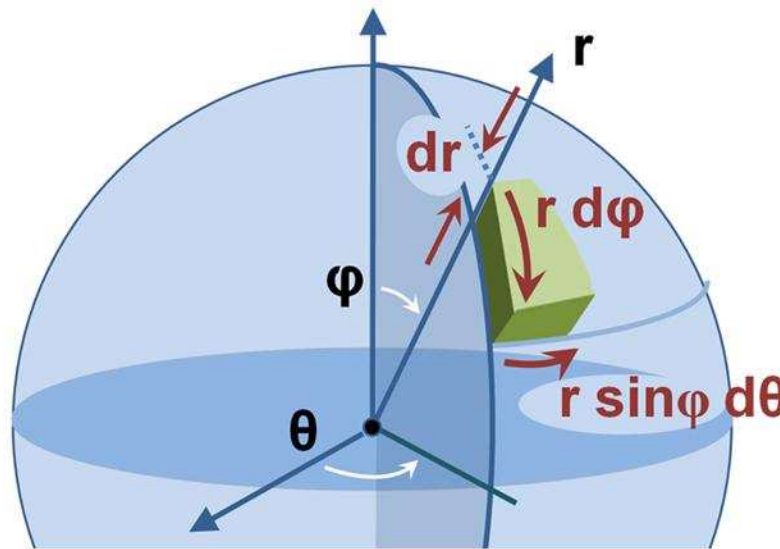


Fig. 4. Elemento infinitesimal em coordenadas esféricas [4].
(Por Brews ohare - Obra do próprio, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5202136>)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A Fig.5 mostra as relações entre o sistema de coordenadas retangulares e o sistema de coordenadas esféricas, bem como as bases associadas a cada sistema.

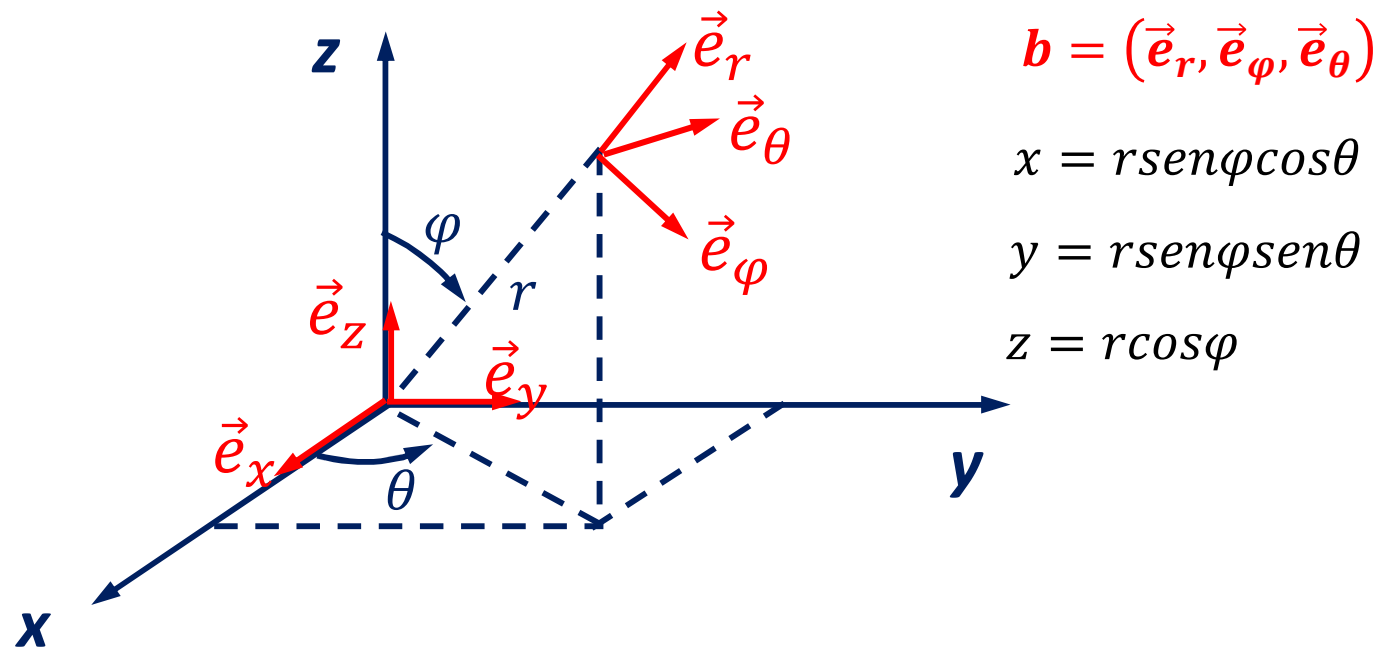


Fig. 5. Sistema de coordenadas retangulares e sistema de coordenadas esféricas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A Fig.6 ilustra as tensões agindo nas faces de um elemento infinitesimal em coordenadas esféricas:

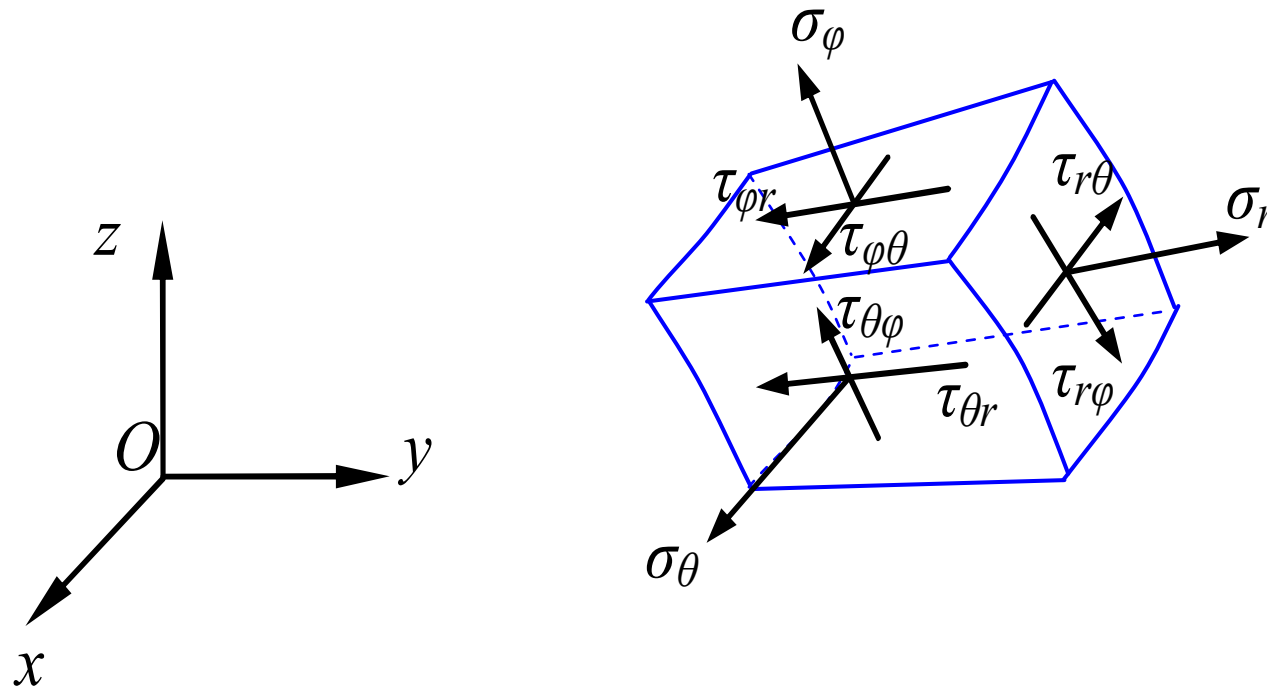


Fig. 6. Tensões nas faces de um elemento infinitesimal em coordenadas esféricas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Neste caso, as equações diferenciais do movimento ficam na forma:

- Equação diferencial do movimento segundo a direção do versor $\vec{e}_r$:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{\varphi r} \cot g \varphi}{r} + b_r = \mu a_r \quad \text{Eq.(17)}$$

- Equação diferencial do movimento segundo a direção do versor $\vec{e}_\varphi$:

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \cot g \varphi + 3\tau_{r\varphi}}{r} + b_\varphi = \mu a_\varphi \quad \text{Eq.(18)}$$

- Equação diferencial do movimento segundo a direção do versor $\vec{e}_\theta$:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{3\tau_{r\theta} + 2\tau_{\varphi\theta} \cot g \varphi}{r} + b_\theta = \mu a_\theta \quad \text{Eq.(19)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Decorrem de Eq.(17-19), as correspondentes equações de equilíbrio do elemento em coordenadas esféricas que ficam (vide, p.ex., Timoshenko e Goodier [1] ou Sokolnikoff [2]):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{\varphi r} \cot g \varphi}{r} + b_r = 0 \quad \text{Eq.(20)}$$

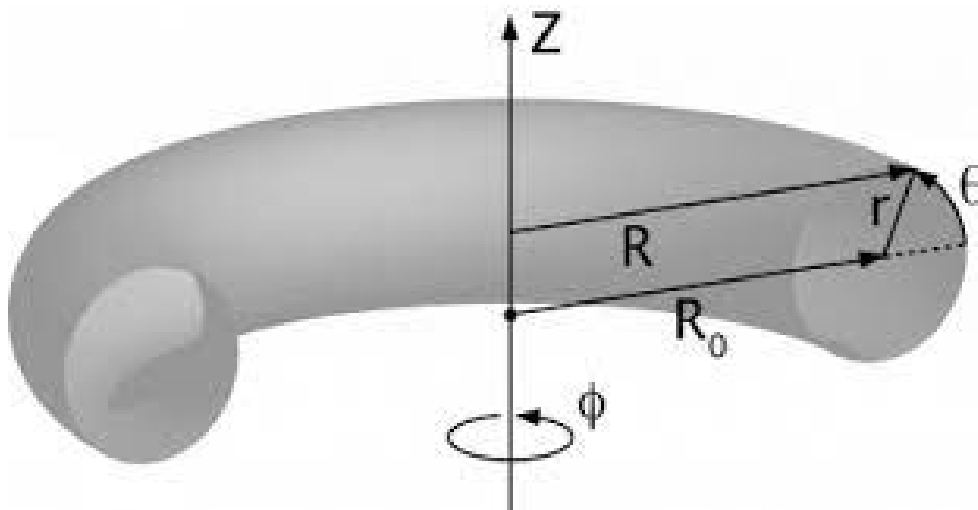
$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \cot g \varphi + 3\tau_{r\varphi}}{r} + b_\varphi = 0 \quad \text{Eq.(21)}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{3\tau_{r\theta} + 2\tau_{\varphi\theta} \cot g \varphi}{r} + b_\theta = 0 \quad \text{Eq.(22)}$$



4. Equações diferenciais de equilíbrio em outros sistemas de coordenadas

Procedendo de forma análoga, podemos obter as equações diferenciais de equilíbrio em quaisquer outros sistemas de coordenadas, como em coordenadas toroidais:



$$(x, y, z) \Rightarrow (r, \theta, \varphi)$$

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \Rightarrow (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

...ou coordenadas helicoidais:



Fig.7. Elementos de um cabo umbilical (vide [5])



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970.
- [2] Sokolnikoff, I.S., Mathematical Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, 1956.
- [3] Vitturi, M.M., Navier-Stokes Equations in Cylindrical Coordinates: Derivation of the Equations.
- [4] https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_esférico_de_coordenadas
- [5] <https://vimeo.com/198936173>