



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #10 – Idealização Estrutural (exemplo)

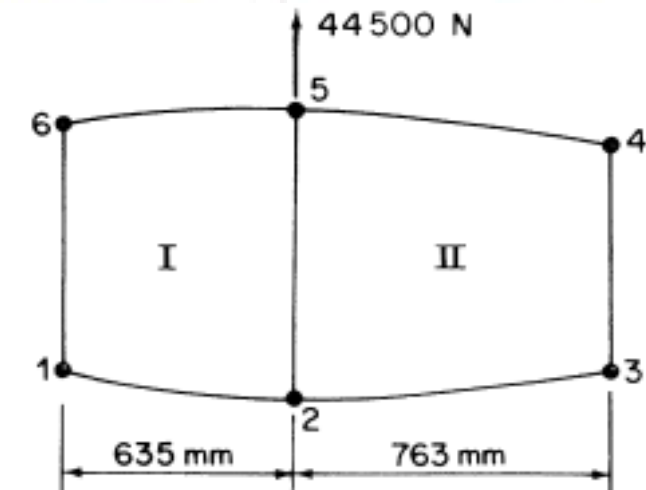
Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

12/09/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

P.23.5 The idealized cross-section of a two-cell thin-walled wing box is shown in Fig. P.23.5 with the data in Table 23.7. If the wing box supports a load of 44,500 N acting along web 25, calculate the shear flow distribution. The shear modulus G is the same for all walls of the wing box. The cell areas are $A_I = 232,000 \text{ mm}^2$, $A_{II} = 258,000 \text{ mm}^2$.



Answer: $q_{16} = 33.9 \text{ N/mm}$, $q_{65} = q_{21} = 1.1 \text{ N/mm}$
 $q_{45} = q_{23} = 7.2 \text{ N/mm}$, $q_{34} = 20.8 \text{ N/mm}$
 $q_{25} = 73.4 \text{ N/mm}$

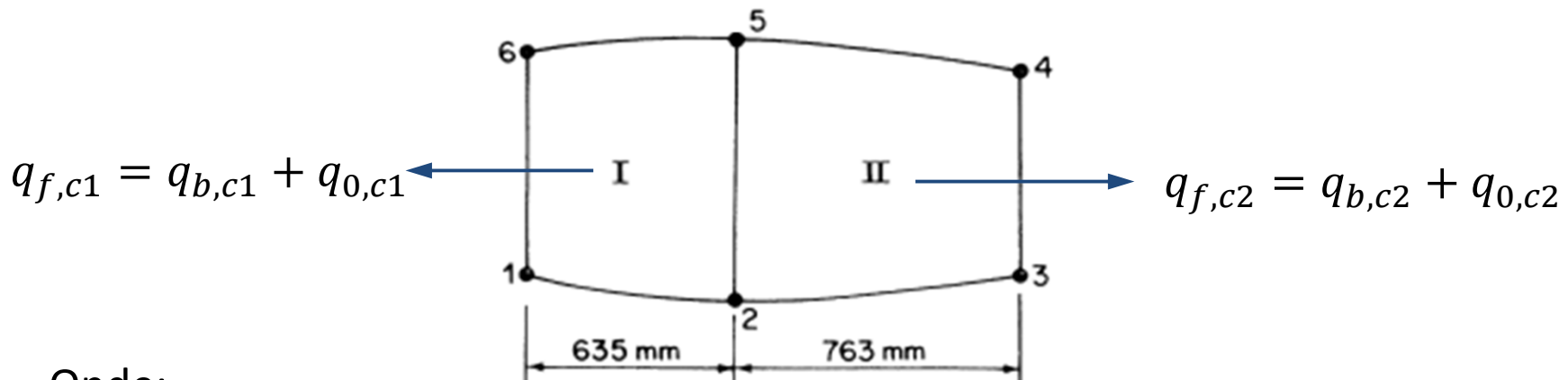
Table 23.7 Problem 23.5

Wall	Length (mm)	Thickness (mm)	Boom	Area (mm ²)
16	254	1.625	1,6	1290
25	406	2.032	2,5	1936
34	202	1.220	3,4	645
12, 56	647	0.915		
23, 45	775	0.559		



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução: Vamos considerar que a seção está simplificada em um arranjo estrutural formado por longarinas (booms), que suportam as tensões normais, e chapas que transmitem apenas tensões cisalhantes (ou seja, não são mais responsáveis por suportar as tensões de flexão). Neste caso, a distribuição do fluxo de cisalhamento em cada uma das células será dada por:



Onde:

$q_{f,ci}$ = Fluxo de cisalhamento final (ou total) na i -ésima célula ($i = 1..2$);

$q_{b,ci}$ = Fluxo de cisalhamento básico na i -ésima célula ($i = 1..2$) (células com cortes);

$q_{0,ci}$ = Fluxo de cisalhamento na posição do corte da i -ésima célula ($i = 1..2$).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A expressão para o fluxo básico de cisalhamento em cada célula é dada por (vide [1], pg.670):

$$q_b(s) = -\frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \left[\int_0^s t_D x ds + \sum B_i x_i \right] - \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \left[\int_0^s t_D y ds + \sum B_i y_i \right]$$

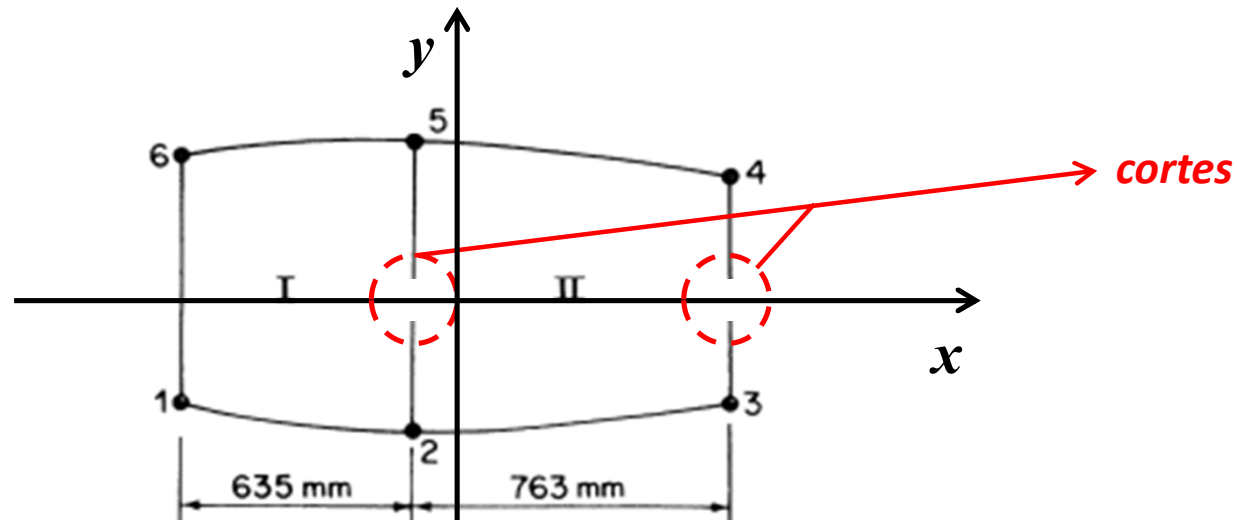
Contudo, admitindo que a seção seja simétrica em relação ao eixo horizontal que passa pelo centroide, teremos: $I_{xy} = 0$. Além disso, como a seção está submetida apenas a uma força transversal S_y , temos: $S_x = 0$. E, finalmente, como se trata de uma seção idealizada (onde os painéis possuem $t_D = 0$), a expressão para o fluxo básico de cisalhamento em cada célula fica simplificada na forma:

$$q_b(s) = -\frac{S_y}{I_{xx}} \sum B_i y_i$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a determinação dos fluxos básicos, consideremos os cortes (um em cada célula fechada) conforme indicado na figura abaixo:



O momento de inércia (I_{xx}) da seção idealizada fica dado por:

$$I_{xx} = 2 \sum_{i=1}^3 B_i y_i^2 = 2[1290 \times (127)^2 + 1936 \times (203)^2 + 645 \times (101)^2] \text{ mm}^4$$

$$I_{xx} \cong 2,1433 \times 10^8 \text{ mm}^4$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:
$$q_b(s) \cong -\frac{4,45 \times 10^4}{2,1433 \times 10^8} \sum_{i=1}^n B_i y_i \cong -2,076 \times 10^{-4} \sum_{i=1}^n B_i y_i$$

$$q_{b,04}(s) = 0$$

$$q_{b,45}(s) \cong -2,076 \times 10^{-4} \times (645 \times 101) \cong -13,53 \text{ N/mm}$$

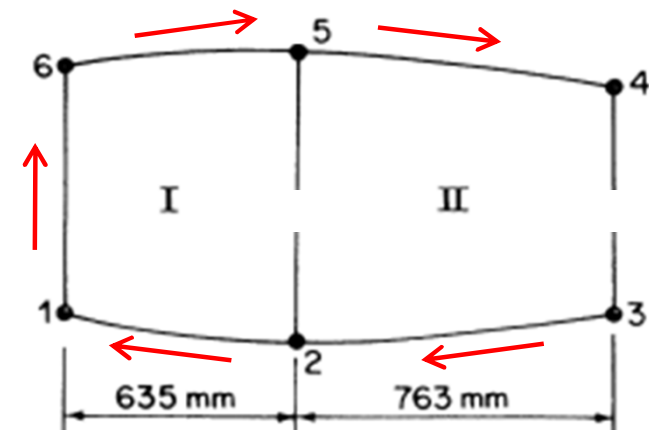
$$q_{b,56}(s) \cong -2,076 \times 10^{-4} \times (645 \times 101 + 1936 \times 203) \cong -95,12 \text{ N/mm}$$

$$q_{b,61}(s) \cong -2,076 \times 10^{-4} \times (645 \times 101 + 1936 \times 203 + 1290 \times 127) \cong -129,14 \text{ N/mm}$$

$$q_{b,12}(s) \cong -95,12 \text{ N/mm}$$

$$q_{b,23}(s) \cong -13,53 \text{ N/mm}$$

$$q_{b,30}(s) = 0$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Uma vez obtidos os fluxos básicos (que correspondem aos fluxos nas paredes devidos à aplicação da força transversal S_y , no centro de cisalhamento da seção aberta), precisamos obter os fluxos nas posições em que foram feitos os cortes, os quais denominaremos: $q_{0,c1}$ (fluxo na parede vertical 2-5) e $q_{0,c2}$ (fluxo na parede vertical 3-4), bem como o ângulo de giro da seção por unidade de comprimento ($d\theta/dz$).

O ângulo de giro deve ser o mesmo para cada célula, conforme vimos anteriormente (vide Aula#7) e é dado por:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2GA_i} \oint_0^{L_i} \frac{q_{f,ci}}{t} ds$$

E, como: $q_{f,ci} = q_{b,ci} + q_{0,ci}$, virá, após substituição:

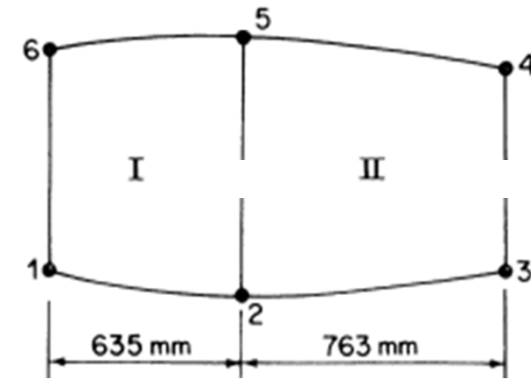
$$2GA_i \frac{d\theta}{dz} = \oint_0^{L_i} \frac{(q_{b,ci} + q_{0,ci})}{t} ds = \oint_0^{L_i} \frac{q_{b,ci}}{t} ds + q_{0,ci} \oint_0^{L_i} \frac{ds}{t}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a célula I (da esquerda), virá:

$$2GA_1 \frac{d\theta}{dz} = \oint_0^{L_1} \frac{q_{b,c1}}{t} ds + q_{0,c1} \oint_0^{L_1} \frac{ds}{t}$$



$$4,64 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz} = q_{b,56} \left(\frac{647}{0,915} \right) + q_{b,61} \left(\frac{254}{1,625} \right) + q_{b,12} \left(\frac{647}{0,915} \right) + q_{0,c1} \left[\frac{406}{2,032} + 2 \times \frac{647}{0,915} + \frac{254}{1,625} \right]$$

$$4,64 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz} = -1,547 \times 10^5 + 1,77 \times 10^3 q_{0,c1} \quad \text{Eq.(1)}$$

Table 23.7 Problem 23.5

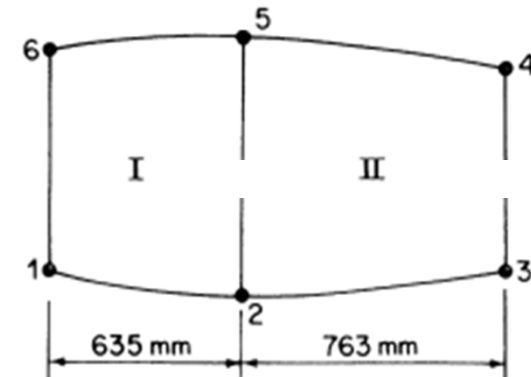
Wall	Length (mm)	Thickness (mm)	Boom	Area (mm ²)
16	254	1.625	1,6	1290
25	406	2.032	2,5	1936
34	202	1.220	3,4	645
12, 56	647	0.915		
23, 45	775	0.559		



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a célula II (da direita), virá:

$$2GA_2 \frac{d\theta}{dz} = \oint_0^{L_2} \frac{q_{b,c2}}{t} ds + q_{0,c2} \oint_0^{L_2} \frac{ds}{t}$$



$$5,16 \times 10^5 \cdot G \frac{d\theta}{dz} = (q_{b,45} + q_{b,23}) \left(\frac{775}{0,559} \right) + q_{0,c2} \left[\frac{202}{1,220} + 2 \times \frac{775}{0,559} + \frac{406}{2,032} \right]$$

$$5,16 \times 10^5 G \frac{d\theta}{dz} = -3,752 \times 10^4 + 3,138 \times 10^3 q_{0,c2} \quad \text{Eq.(2)}$$

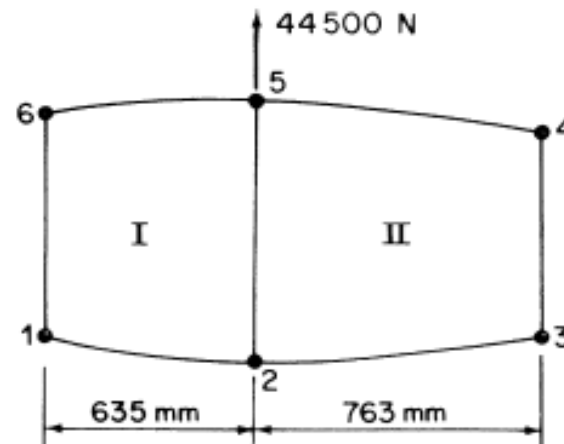
Table 23.7 Problem 23.5

Wall	Length (mm)	Thickness (mm)	Boom	Area (mm ²)
16	254	1,625	1,6	1290
25	406	2,032	2,5	1936
34	202	1,220	3,4	645
12, 56	647	0,915		
23, 45	775	0,559		



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A última equação é a de equilíbrio de momentos: o momento da força externa S_y em relação a um polo qualquer deve igualar o momento das forças internas (fluxos de cisalhamento finais) em relação ao mesmo polo:

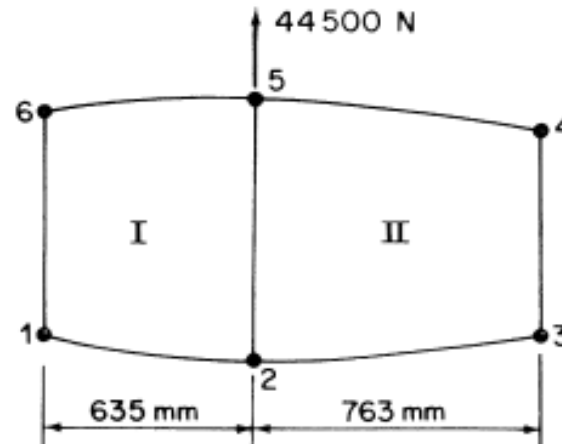


$$S_y \cdot d = \sum_{i=1}^2 \left(\oint (q_{b,ci} + q_{0,ci}) p(s) ds \right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Elegendo o ponto 5 como polo, teremos:



$$\oint (q_{b,c1} + q_{0,c1})p_1(s)ds + \oint (q_{b,c2} + q_{0,c2})p_2(s)ds = 0$$

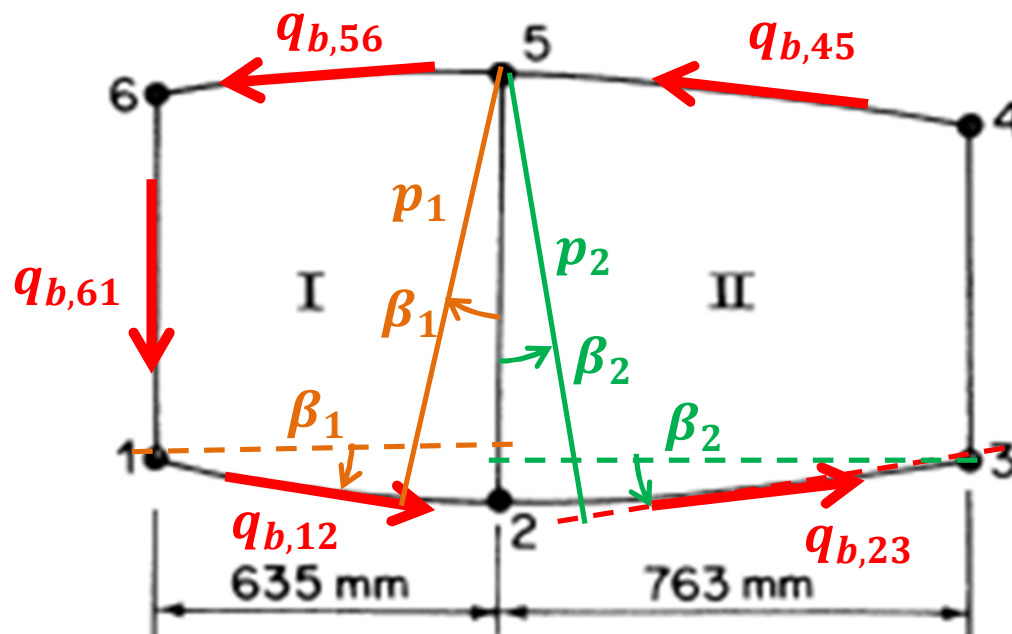
$$\oint q_{b,c1}p_1(s)ds + 2A_1q_{0,c1} + \oint q_{b,c2}p_2(s)ds + 2A_2q_{0,c2} = 0$$

$$2A_1q_{0,c1} + 2A_2q_{0,c2} = -\oint q_{b,c1}p_1(s)ds - \oint q_{b,c2}p_2(s)ds$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

De forma aproximada, já que não foram dados detalhes da geometria da seção, podemos estimar os braços p_1 e p_2 para cada parcela dos fluxos básicos por:



- Para $q_{b,45}$: $p_2 \cong 0$

- Para $q_{b,56}$: $p_1 \cong 0$

- Para $q_{b,61}$: $p_1 = 635 \text{ mm}$

- Para $q_{b,12}$:

$$p_1 \cong (l_{25}) \cos \beta_1 = (406) \frac{635}{647} \cong 398,5 \text{ mm}$$

- Para $q_{b,23}$:

$$p_2 \cong (l_{25}) \cos \beta_2 = (406) \frac{763}{775} \cong 399,7 \text{ mm}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resulta:

$$4,64 \times 10^5 q_{0,c1} + 5,16 \times 10^5 q_{0,c2} =$$
$$= -(q_{b,61} \times 635 \times 254 + q_{b,12} \times 398,5 \times 647 + q_{b,23} \times 399,7 \times 775)$$

$$4,64 \times 10^5 q_{0,c1} + 5,16 \times 10^5 q_{0,c2} =$$
$$= (129,14 \times 635 \times 254 + 95,12 \times 398,5 \times 647 + 13,53 \times 399,7 \times 775)$$

$$4,64 \times 10^5 q_{0,c1} + 5,16 \times 10^5 q_{0,c2} \cong 4,95 \times 10^7 Nmm \quad \text{Eq.(3)}$$

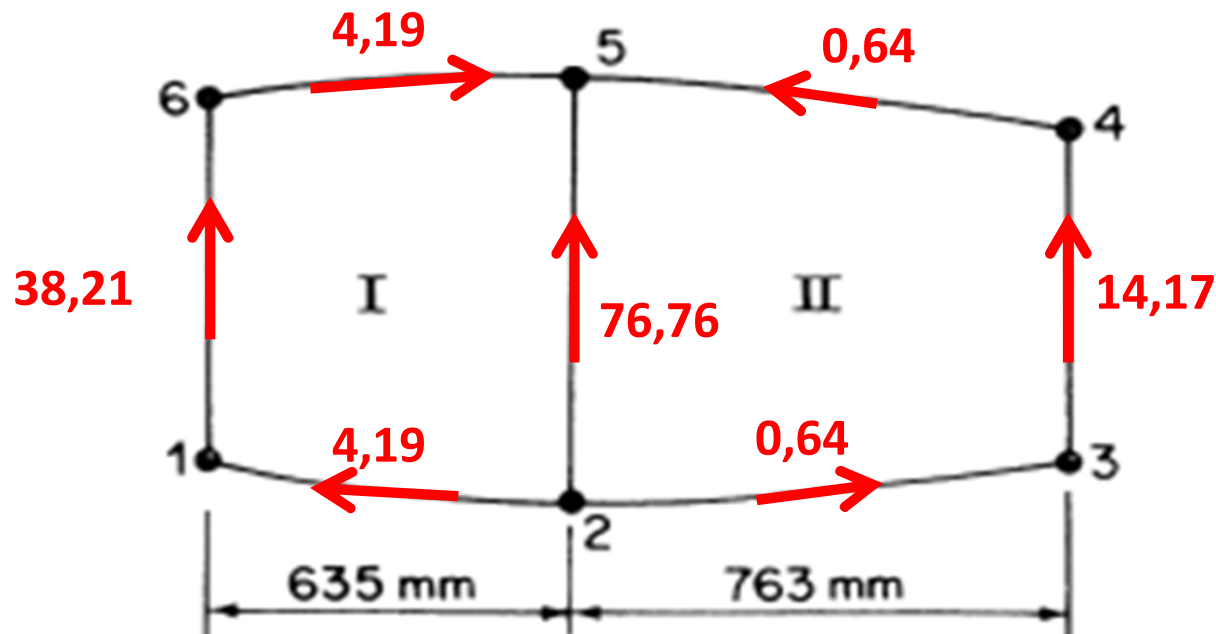
Resolvendo as Eqs.(1-3) para $q_{0,c1}$, $q_{0,c2}$ e para $G \frac{d\theta}{dz}$, teremos:

$$q_{0,c1} \cong 90,93 \text{ N/mm} \quad q_{0,c2} \cong 14,17 \text{ N/mm} \quad G \frac{d\theta}{dz} \cong 0,0134 \text{ N.rad/mm}^3$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Nas faces de orientação positiva, os fluxos de cisalhamento finais ficam então dados (em N/mm) por:

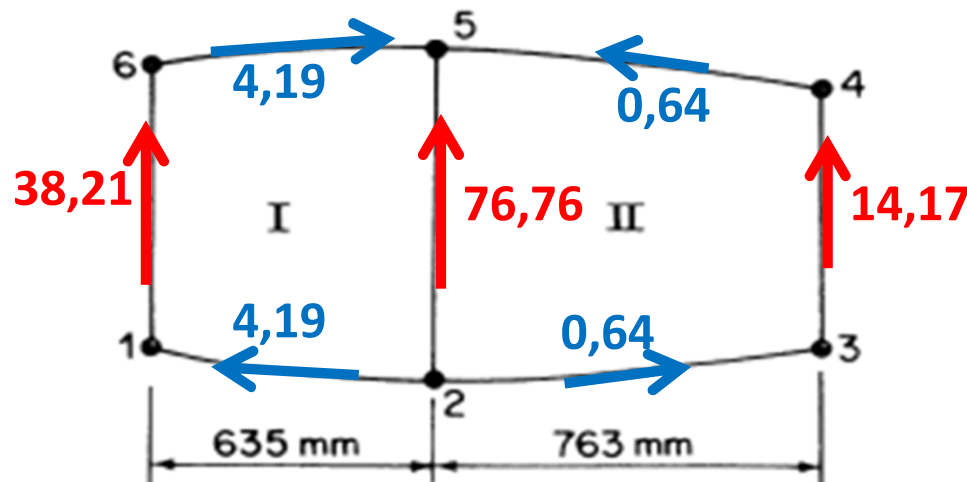


Answer: $q_{16} = 33.9 \text{ N/mm}$, $q_{65} = q_{21} = 1.1 \text{ N/mm}$
 $q_{45} = q_{23} = 7.2 \text{ N/mm}$, $q_{34} = 20.8 \text{ N/mm}$
 $q_{25} = 73.4 \text{ N/mm}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Verificação (equilíbrio de forças na vertical, utilizando nossa resposta):



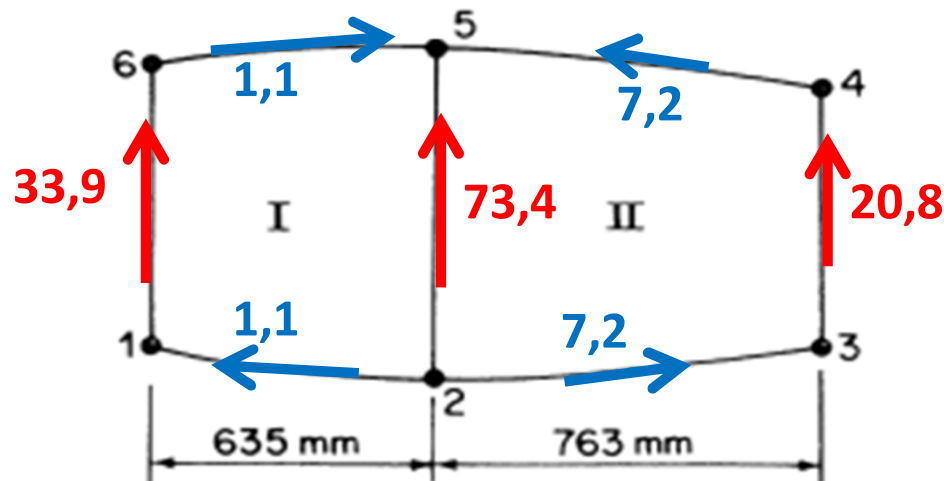
Wall	Length (mm)
16	254
25	406
34	202
12, 56	647
23, 45	775

$$\begin{aligned}
 S_y &= 38,21 \times 254 + 76,76 \times 406 + 14,17 \times 202 + \\
 &+ 2 \times (4,19 \times 647 \times \sin(11^\circ)) + 2 \times (0,64 \times 775 \times \sin(10^\circ)) = \\
 &= 9705,34 + 31164,56 + 2862,34 + 1034,54 + 172,26 = \\
 &= 43732,24 + 1206,80 = 44939 \text{ N (cerca de 1% de diferença percentual} \\
 &\text{em relação à força aplicada)}
 \end{aligned}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Verificação (equilíbrio de forças na vertical, utilizando a resposta do Megson, considerando os mesmos sentidos que encontramos para os fluxos):



Wall	Length (mm)
16	254
25	406
34	202
12, 56	647
23, 45	775

$$\begin{aligned}
 S_y &= 33,9 \times 254 + 73,4 \times 406 + 20,8 \times 202 + \\
 &+ 2 \times (1,1 \times 647 \times \text{sen}(11^\circ)) + 2 \times (7,2 \times 775 \times \text{sen}(10^\circ)) = \\
 &= 8610,60 + 29800,40 + 4201,60 + 271,60 + 1937,90 = \\
 &= 42612,60 + 2209,50 = 44822,1 \text{ N} \quad (\text{diferença percentual de } 0,7\% \text{ em} \\
 &\quad \text{relação à força aplicada})
 \end{aligned}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Megson, T. H. G. *Aircraft Structures for Engineering Students*. 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2016. Cap. 23: Wings
23.4 – Shear (p.670-676)
23.5 – Shear center (p.677)