



Questão 1 (5,0 pontos). Considere um sistema dinâmico cujo modelo matemático é dado por:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

que corresponde à função de transferência:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 4s^2 + 8s}$$

A Fig. 1a mostra o lugar das raízes associado a $G(s)$. A Fig. 1b mostra a resposta a impulso do sistema em malha fechada simulada para três cenários.

a) (0,5) Quais os polos e zeros do sistema em malha aberta (MA)? O que se pode dizer quanto à estabilidade da planta em MA?

b) (1,5) Faça os testes algébricos de controlabilidade e observabilidade, mostrando que as matrizes obtidas em ambos os testes têm posto completo. Por que os testes *algébricos* podem ser utilizados para este sistema?

c) (0,5) Explique quais limitações seriam encontradas para a alocação de polos do sistema em malha fechada caso fosse projetado um controlador proporcional clássico.

d) (1,5) Admitindo que se deseje posicionar os polos do sistema em malha fechada (MF) em $\bar{s} = -1, -2 + 1j, -2 - 1j$ pede-se:

- a expressão do polinômio característico $\bar{p}(s)$ do sistema em MF;
- a matriz K de uma lei de controle da forma $u(t) = -Kx(t)$ que permite alocar os polos em MF nas posições desejadas.

e) (1,0) Um projetista decide explorar três cenários de simulação de resposta a impulso para o sistema em malha fechada:

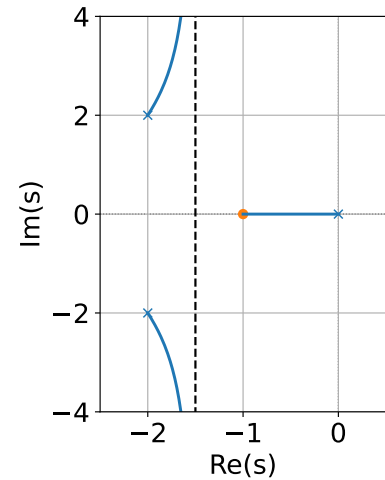
Cenário A Sistema com controle clássico proporcional, com $K = 2$.

Cenário B Sistema com lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, usando a matriz K projetada no item (d) e admitindo realimentação de estado completa.

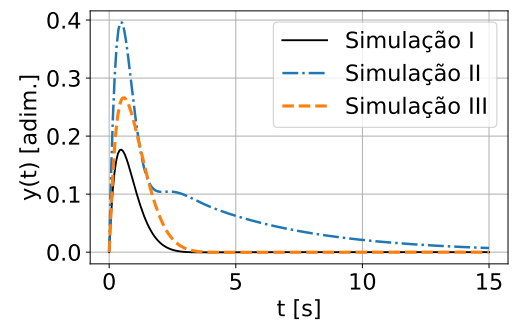
Cenário C Sistema com lei de controle $u(t) = -K\hat{x}(t)$, usando a matriz K projetada no item (d) e um observador de estados *identidade* que adiciona ao sistema em MF polos em $\hat{s} = -4, -5 + 1j, -5 - 1j$.

Faça a correspondência entre os cenários A, B, C descritos acima e os gráficos de simulação indicados como I, II e III na Fig. 1b, justificando sua resposta.

Errata: na prova aplicada, os números destacados na matriz A do modelo matemático original estavam erroneamente em posição trocada. Em outras palavras, os modelos em forma de espaço de estados e o expresso pela função de transferência eram distintos. Qualquer dos modelos usados na solução dos itens que envolviam respostas algébricas foram considerados corretos, não tendo havido qualquer prejuízo na nota atribuída por este motivo.



(a) Lugar das raízes para $G(s)$



(b) Respostas a impulso em malha fechada

Figura 1



Questão 2 (3,0 pontos). Considere o dispositivo didático para ensino de controle denominado “esfera e barra”, mostrado na Fig. 2a. Seu modelo em espaço de estados linearizado para a condição de equilíbrio $x_e = 0$ m e $\theta_e = 0$ rad é dado por

$$\frac{dx}{dt}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -56,8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 52,6 \end{bmatrix} \tau(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t),$$

com $\mathbf{x}(t) = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$. Foi projetado um regulador LQR utilizando uma matriz Q diagonal de ordem 4 com valores $q_{1,1} = 5$ e os demais iguais a 1. Quanto à matriz R (no caso, um escalar), foram testados os seguintes valores: 20; 90; 650; 1650; 7500; 10^6 . A posição da esfera no sistema simulado para a mesma condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0,25; 0; 0; 0]$ para cada um dos valores de R é apresentada na Fig. 2b, nos gráficos numerados de 1 a 6.

- a) (0,5) Explique sucintamente a escolha de um valor diferenciado para $q_{1,1}$.
b) (0,5) Explique sucintamente a função da matriz R no projeto de regulares pelo método linear quadrático;
c) (1,0) Associe a cada valor de R um dos gráficos numerados de 1 a 6.
d) (1,0) Justifique as respostas dadas no item anterior.

Questão 3 (2,0 pontos). Ainda considerando o sistema da Questão 2, na ausência de sensores para medir todas as variáveis de estado, a projetista decidiu adotar um observador identidade por alocação de polos. Para isso, testou 4 conjuntos de polos,

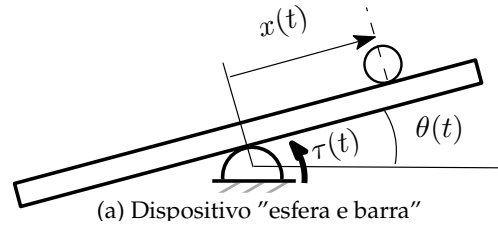
$$\begin{aligned} P1 &= -18 + 2j & -18 - 2j & -11 + 1j & -11 - 1j \\ P2 &= -3 & -2,5 + 4j & -2,5 - 4j & -1 \\ P3 &= -7,5 + 3j & -7,5 - 3j & -5,3 - 2j & -5,3 + 2j \\ P4 &= -2 & -3 & -1 & -4 \end{aligned}$$

que foram incorporados ao sistema com regulador LQR e obteve as respostas simuladas mostradas na Fig. 3 para a posição da esfera a partir de uma mesma condição inicial,

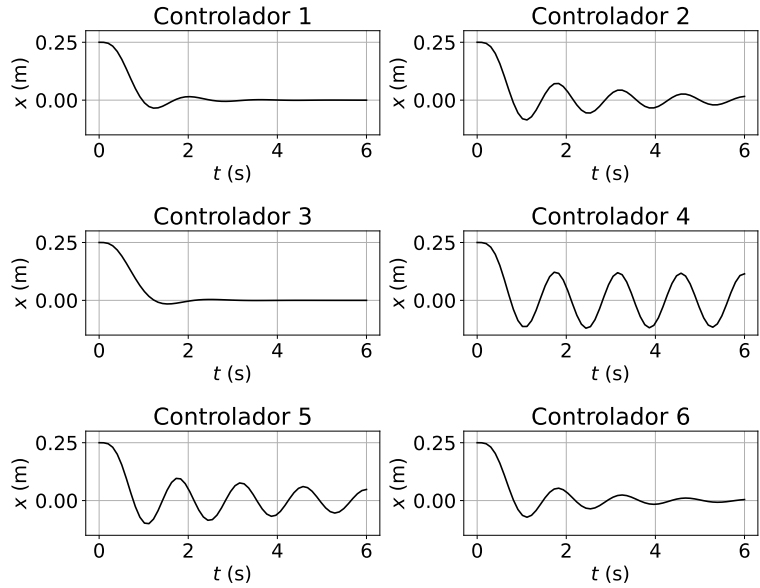
$$\mathbf{x}_a(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(0) \end{bmatrix} = [-0,3; 0; 0,1; 0,3; -0,5; 0; 0,4; 0]^T$$

em que as 4 últimas variáveis de estado de $\mathbf{x}_a$ correspondem respectivamente ao erro $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ na estimativa de $\mathbf{x}$. Sabe-se, ainda, que os polos do sistema com o regulador LQR em malha fechada são $P_{MF} = [-6,8; -3,5; -1,3 + 3,9j; -1,3 - 3,9j]$.

- a) (0,4) Associe cada conjunto de polos $P1$ a $P4$ a um dos cenários de simulação numerados de 1 a 4.
b) (1,6) Justifique sucintamente suas escolhas com base na teoria estudada, comentando as vantagens e desvantagens de cada conjunto de polos escolhido.



(a) Dispositivo “esfera e barra”



(b) Resposta a uma condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0,25; 0; 0; 0]$

Figura 2

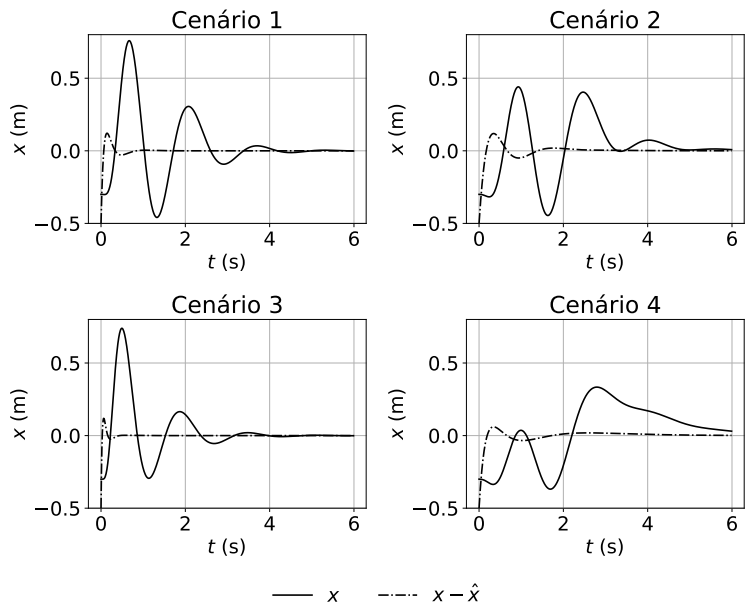


Figura 3: x é a evolução da posição da esfera do sistema em malha fechada (com o regulador LQR sendo realimentado pela estimativa de estado fornecida pelo observador identidade); $x - \hat{x}$ é o erro de estimativa para a posição x .