

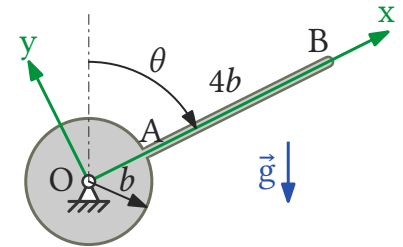


PME 3100 – Mecânica I – Reoferecimento 2025 – Prova 3 – 26 de Junho de 2025

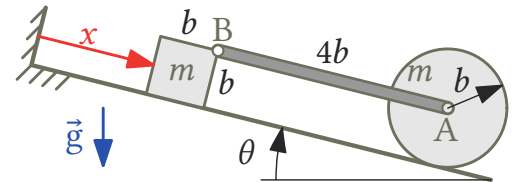
Instruções gerais e formulário estão no caderno de respostas. Se sair antes do término, entregue esta folha ao aplicador.

Questão 1 (3,0 pontos). A figura ilustra um corpo rígido único de massa total $3m$, composto por um disco homogêneo de centro O , raio b e massa $2m$, soldado a uma barra rígida homogênea AB , de comprimento $4b$ e massa m . Este corpo encontra-se articulado, no ponto O , a uma base fixa. O corpo é liberado, a partir do repouso, da posição descrita pelo ângulo θ indicado. Para o instante imediatamente após a liberação do corpo, e considerando o sistema de coordenadas $Oxyz$ fornecido, pede-se:

- (0,6) as coordenadas do centro de massa G do corpo;
- (0,6) o momento de inércia em relação ao eixo Oz ;
- (0,6) o diagrama de corpo livre;
- (0,6) a aceleração angular $\ddot{\alpha}$ do corpo;
- (0,6) as reações vinculares na articulação O .



Questão 2 (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura é formado por um disco homogêneo, de raio b e massa m , conectado a um bloco quadrado, de lado b e massa m , por meio de uma barra esbelta de comprimento $4b$ e massa desprezível, articulada ao centro do disco em A e à extremidade do bloco, em B . O sistema encontra-se sobre um plano de inclinação θ conhecida. Os coeficientes de atrito estático e cinético nos contatos do bloco e do disco com o plano são iguais a μ . Defina $v = \frac{dx}{dt}$ e $a = \frac{dv}{dt}$, respectivamente como a velocidade escalar e a aceleração escalar do bloco. Admitindo que o sistema parte do repouso da posição $x = 0$ e que o disco rola sem escorregar, pede-se:



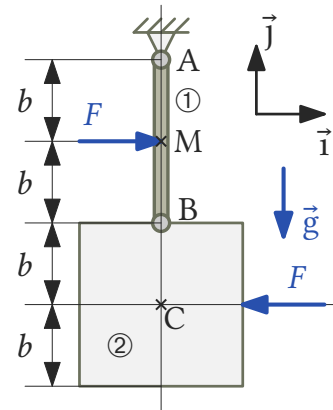
- (0,6) os diagramas de corpo livre do bloco e do disco;
- (0,8) o trabalho total realizado pelos esforços atuantes sobre o sistema em função da posição x ;
- (0,8) a expressão da energia cinética do sistema em função de v ;
- (0,5) a expressão de a ;
- (0,8) a máxima inclinação θ compatível com a condição de não-escorregamento do disco;

Questão 3 (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura ao lado é formado por:

- uma barra esbelta e homogênea AB , de massa m e comprimento $2b$;
- uma placa quadrada homogênea de centro C , massa m e lado $2b$.

A barra é articulada a uma base fixa na extremidade A e ao centro de um dos lados da placa na extremidade B . O sistema parte do repouso da configuração indicada, com os pontos A , B e C verticalmente alinhados e com a aplicação de duas forças horizontais de mesma intensidade F . Para esta configuração, pede-se:

- (0,6) os diagramas de corpo livre da barra e do bloco;
- (0,6) as expressões das acelerações $\vec{a}_M$ e $\vec{a}_C$ dos centros de massa da barra e da placa, respectivamente, em função da aceleração angular $\vec{\alpha}_1 = \alpha_1 \vec{k}$ da barra e da aceleração angular $\vec{\alpha}_2 = \alpha_2 \vec{k}$ da placa;
- (1,8) as equações obtidas da aplicação dos teoremas da resultante e da quantidade de movimento angular à barra e à placa;
- (0,5) as expressões α_1 e α_2 , obtidas a partir da solução do sistema de equações do item anterior.





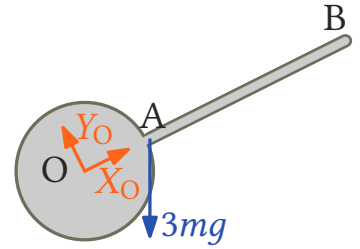
Questão 1 – Resolução

a) Aplicando a expressão geral para o cálculo do centro de massa, tem-se:

$$3m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) = 2m\vec{0} + m3b\vec{i} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{G} - \mathbf{O}) = b\vec{i}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{A}} \quad (0,6) \quad (1)$$

b) Combinando os momentos de inércia do disco e barra, tem-se:

$$J_{Oz} = J_{Oz}^{\text{disco}} + J_{Oz}^{\text{barra}} = \frac{2mb^2}{2} + \left[\frac{m(4b)^2}{12} + m(3b)^2 \right] \Rightarrow \boxed{J_{Oz} = \frac{34mb^2}{3}} \quad (0,6) \quad (2)$$



c) Veja figura ao lado. (0,6) para o DCL completamente correto

d) Aplicando o TQMA ao corpo rígido único (disco+barra) com polo em O (movimento no plano xy), obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{\text{ext}} &= 3m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge \vec{a}_O + (J_{Oz}\alpha)\vec{k}, \quad \vec{a}_O = \vec{0}, \quad \vec{\alpha} = -\ddot{\theta}\vec{k} \\ -3mgb \sin \theta &= -\left(\frac{34mb^2}{3}\right)\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = -\left(\frac{9g \sin \theta}{34b}\right)\vec{k}} \quad (0,6) \quad (3) \end{aligned}$$

e) Aplicando o TR ao corpo rígido único (disco+barra), obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{R}^{\text{ext}} &= 3m\vec{a}_G, \quad \vec{a}_G = \alpha b\vec{j} = -\left(\frac{9g \sin \theta}{34}\right)\vec{j} \quad (0,3) \\ X_O\vec{i} + Y_O\vec{j} &= -\left(\frac{27mg \sin \theta}{34}\right)\vec{j} \Rightarrow \boxed{X_O = 0} \quad \boxed{Y_O = -\left(\frac{27mg \sin \theta}{34}\right)} \quad (0,3) \quad (4) \end{aligned}$$



Questão 2 – Resolução

a) Diagramas de corpo livre representados na figura ao lado. (0,3) para cada DCL

b) Realizam trabalho sobre o sistema as componentes paralelas ao plano dos pesos do bloco e do disco e o atrito A_b , uma vez que há escorregamento no contato entre o bloco e o plano. Aplicando o Teorema da Resultante ao bloco, da componente ortogonal ao plano, obtemos:

$$N_b - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow N_b = mg \cos \theta \Rightarrow \boxed{A_b = \mu N_b = \mu mg \cos \theta} \quad (0,2)$$

Assim:

$$W = (mg \sin \theta + mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta)x \Rightarrow \boxed{W = (2 \sin \theta - \mu \cos \theta)mgx} \quad (0,6)$$

c) O bloco translada com velocidade de módulo $|v|$ ao passo que para o disco, $|\vec{v}_A| = |v|$ e $|\vec{\omega}| = \left|\frac{v}{b}\right|$. Assim:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{bloco}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mb^2}{2}\right)\left(\frac{v}{b}\right)^2}_{\text{disco}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{5}{4}mv^2} \quad (0,8)$$

d) Aplicando o Teorema da Energia Cinética, obtemos:

$$\Delta T = W \Rightarrow \frac{5}{4}mv^2 - 0 = (2 \sin \theta - \mu \cos \theta)mgx \quad (0,3)$$

Diferenciando esta última expressão no tempo, obtemos:

$$\frac{5}{2}mva = (2 \sin \theta - \mu \cos \theta)mgv \Rightarrow \boxed{a = \frac{(4 \sin \theta - 2\mu \cos \theta)g}{5}} \quad (0,2)$$

e) Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular ao disco, com polo em A, obtemos:

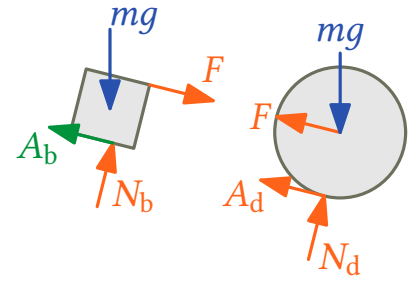
$$\left(\frac{mb^2}{2}\right)\left(-\frac{a}{b}\right) = -A_d b \Rightarrow \boxed{A_d = \frac{(2 \sin \theta - \mu \cos \theta)mg}{5}} \quad (0,4)$$

Aplicando o Teorema da Resultante ao disco, da componente ortogonal ao plano, obtemos:

$$N_d - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow \boxed{N_d = mg \cos \theta} \quad (0,2)$$

Da condição de não-escorregamento:

$$|A_d| \leq \mu N_d \Rightarrow (2 \sin \theta - \mu \cos \theta)mg \leq 5\mu mg \cos \theta \Rightarrow \boxed{\tan \theta \leq 3\mu} \quad (0,2)$$



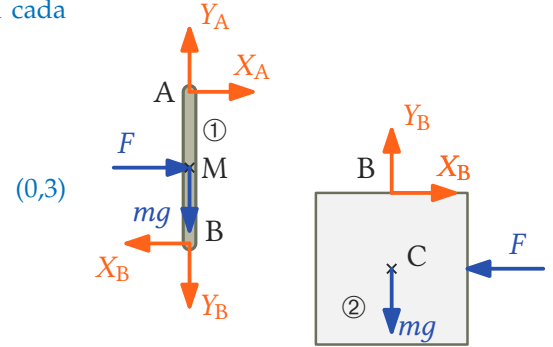


Questão 3 – Resolução

a) Diagramas de corpo livre representados na figura ao lado. (0,3) para cada DCL

b) Do campo de acelerações da barra (corpo ①):

$$\begin{aligned}\vec{a}_M &= \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge (\vec{M} - \vec{A}) - \omega_1^2 (\vec{M} - \vec{A}) \\ &= \vec{0} + \alpha_1 \vec{k} \wedge (-b\vec{j}) - \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_M = \alpha_1 b \vec{i}} \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge (\vec{B} - \vec{A}) - \omega_1^2 (\vec{B} - \vec{A}) \\ &= \vec{0} + \alpha_1 \vec{k} \wedge (-2b\vec{j}) - \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = 2\alpha_1 b \vec{i}}\end{aligned}$$



Do campo de acelerações da placa (corpo ②):

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge (\vec{C} - \vec{B}) - \omega_2^2 (\vec{C} - \vec{B}) \\ &= 2\alpha_1 b \vec{i} + \alpha_2 \vec{k} \wedge (b\vec{j}) - \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_C = (2\alpha_1 + \alpha_2) b \vec{i}}\end{aligned} \quad (0,3)$$

c) Da aplicação do teorema da resultante e do teorema da quantidade de movimento angular à barra (corpo ①), resulta:

$$\begin{aligned}m\vec{a}_M &= \vec{R}^{\textcircled{1}} \Rightarrow m\alpha_1 b = F + X_A - X_B & (1) \quad (0,3) \\ 0 &= Y_A - Y_B - mg & (2) \quad (0,3) \\ J_{Mz}\vec{\alpha}_1 &= \vec{M}_M^{\textcircled{1}} \Rightarrow \frac{m(2b)^2}{12}\alpha_1 = -(X_A + X_B)b & (3) \quad (0,3)\end{aligned}$$

Da aplicação do teorema da resultante e do teorema da quantidade de movimento angular à placa (corpo ②), resulta:

$$\begin{aligned}m\vec{a}_C &= \vec{R}^{\textcircled{2}} \Rightarrow m(2\alpha_1 + \alpha_2)b = F + X_B & (4) \quad (0,3) \\ 0 &= Y_B - mg & (5) \quad (0,3) \\ J_{Cz}\vec{\alpha}_2 &= \vec{M}_C^{\textcircled{2}} \Rightarrow \frac{m[(2b)^2 + (2b)^2]}{12}\alpha_2 = -X_B b & (6) \quad (0,3)\end{aligned}$$

d) Manipulando as equações (6) e (4), temos:

$$X_B = -\frac{2}{3}m\alpha_2 b \quad \text{e} \quad m(6\alpha_1 + 5\alpha_2)b = 3F \quad (7)$$

Manipulando as equações (1) e (3), temos:

$$\frac{4}{3}m\alpha_1 b = F - 2X_B = F + \frac{4}{3}m\alpha_2 b \Rightarrow 4m(\alpha_1 - \alpha_2)b = 3F \quad (8)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (7) e (8), obtemos:

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{27F}{44mb}} \quad \text{e} \quad \boxed{\alpha_2 = -\frac{3F}{22mb}} \quad (0,5)$$