



LOQ4263 – Planejamento e Gestão da Manutenção

Prof. Dr. José Eduardo Holler Branco

Lorena



Aula II – Distribuições de Probabilidade

Distribuição Bernoulli



- Condições:
 - Experimento aleatório, ou seja, com incerteza e variabilidade dos resultados esperados;
 - Experimento é realizado repetidas vezes (tentativas), e mantidas as condições (eventos independentes); e
 - Resultado (variável aleatória) pode ser sucesso ou fracasso.

- Exemplos:
 - a) No lançamento de uma moeda não viciada, define-se que Sucesso = “ocorrer cara” e Fracasso = “não ocorrer cara”, ou seja “ocorrer coroa”; e
 - b) Caso uma lâmpada seja escolhida aleatoriamente, define-se Sucesso = “se a lâmpada está queimada” e Fracasso = “se a lâmpada não está queimada”.

Distribuição Bernoulli



- Parâmetros, variáveis e função de probabilidade:

- $P(\text{sucesso}) = p$
- $P(\text{fracasso}) = q = 1 - p$

- Variável aleatória discreta X , tal que $x = 1$ significa sucesso e $x = 0$ fracasso.

- Função de probabilidade P :

$$P(X = x) = p^x \cdot q^{1-x}, \forall x \in \{0,1\}$$

- Esperança matemática:

$$E(X) = \mu = 1 \cdot p + 0 \cdot q = \mathbf{p}$$

- Variância:

$$V(X) = \sigma^2 = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot q = \mathbf{p \cdot q}$$

Obs.: Variância é máxima quando $p=q=0,5$

Distribuição Bernoulli



- Exemplo:
- Considere um experimento aleatório que consiste do lançamento de um dado e observação do resultado. Dada a variável aleatória X , $x = 1$ significa o evento de sucesso que é a observação do número 3 na face do dado, e $x = 0$ é o fracasso. Então, a função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}$$

Distribuição Binomial



- Suponha-se que um Experimento de Bernoulli seja repetido n vezes, de forma independente, e que a variável aleatória discreta X represente o número de ocorrências de sucesso com probabilidade p , ou seja, $x = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ ocorrências de sucesso.
- Supondo inicialmente que o conjunto de experimentos resulte na seguinte sequência:
SSS...SFFF...FFF
- Como foram realizados n experimentos, então esta sequência tem x sucessos e $(n - x)$ fracassos.

... Continua no próximo slide:

Distribuição Binomial



- Sabendo que os eventos são independentes e que a probabilidade de sucesso p e a de fracasso q são constantes para todas as n realizações do experimento, logo, a probabilidade de ocorrência desta sequência pode ser calculada por: $p \cdot p \cdot p \dots p \cdot q \cdot q \cdot q \dots q \equiv p^x \cdot q^{n-x}$
- É possível observar x sucessos e $(n - x)$ fracassos em n realizações do experimento, resultando-se em $C_{n,x}$ combinações (sequências) possíveis, e todas com a mesma probabilidade $p^x \cdot q^{n-x}$

$$p \cdot p \cdot p \dots p \cdot q \cdot q \cdot q \dots q \equiv p^x \cdot q^{n-x}$$

⋮

$$p \cdot q \cdot p \dots p \cdot q \cdot p \cdot q \dots q \equiv p^x \cdot q^{n-x}$$

Distribuição Binomial



- Logo a probabilidade de obter x sucessos em n experimentos é dada por:

$$P(X = x) = p^x \cdot q^{n-x} + p^x \cdot q^{n-x} + \dots + p^x \cdot q^{n-x} \equiv C_{n,x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

Sendo que:

$\binom{n}{x}$ é o número binomial calculado por $\frac{n!}{(n-x)! x!}$

Distribuição Binomial



- Esperança matemática:

Sendo $x_1, x_2, \dots, x_n$ os experimentos de Bernoulli

$$E(X) = \mu = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_n)$$
$$\mu = p + p + \dots + p = n \cdot p$$

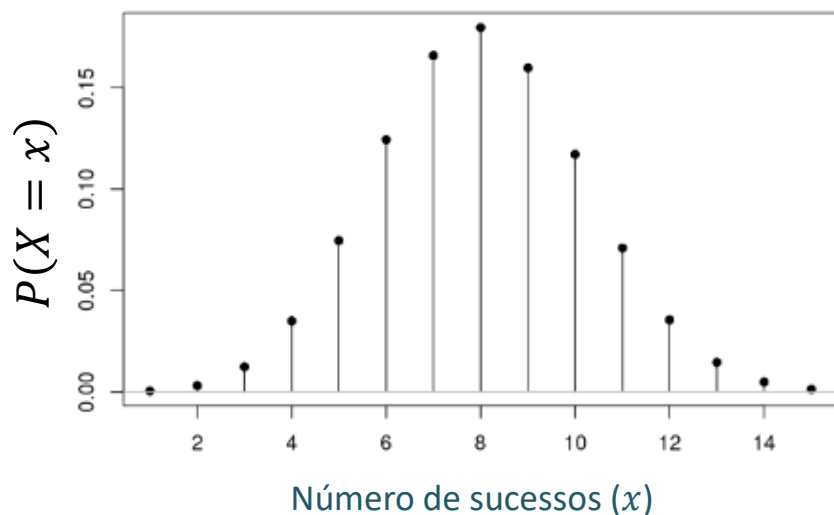
$$V(X) = \sigma^2 = V(x_1) + V(x_2) + \dots + V(x_n)$$
$$\sigma^2 = p \cdot q + p \cdot q + \dots + p \cdot q = n \cdot p \cdot q$$

Distribuição Binomial



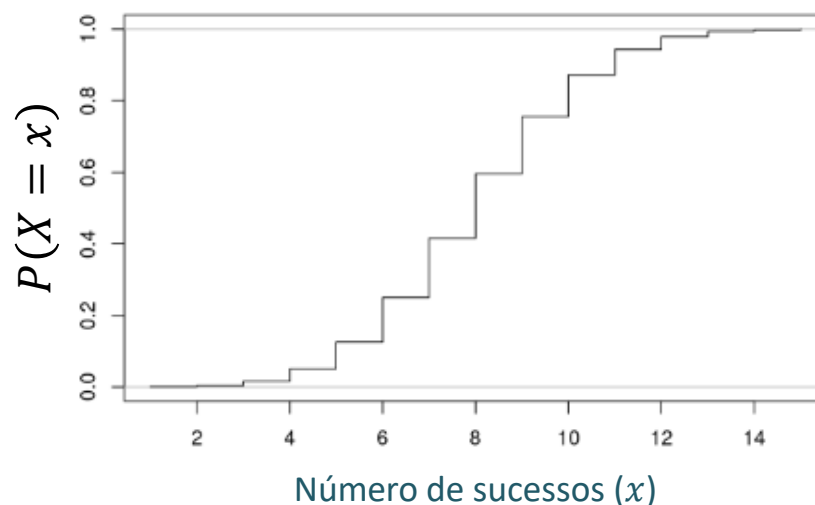
- Análise gráfica da função probabilidade:
 - $n = 20$ experimentos e probabilidade de sucesso $p = 0,4$

Distribuição de probabilidade



$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

Probabilidade acumulada



$$F(X = x) = \sum_x^n P(X = x)$$

Distribuição Binomial



Exercício 01

Testando a partida a frio de veículos a etanol, foram realizados experimentos para verificar a frequência de sucesso nas partidas em temperaturas baixas, encontrando-se uma probabilidade de a partida falhar de 10%. Sabendo que um veículo realiza em média 120 partidas por ano, qual a probabilidade de que o veículo falhe até 2 vezes.

Nesse caso sucesso é a partida falhar!

$$P(X = 0) \binom{120}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{120}$$

$$P(X = 1) \binom{120}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{119}$$

$$P(X = 2) \binom{120}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{118}$$

$$0,033094\%$$

Distribuição Poisson



- Na distribuição de Poisson, a variável aleatória discreta X representa o número de sucessos que ocorrem num certo intervalo contínuo, por exemplo:
 - 1º) Número de acidentes de carros por dia que ocorrem numa determinada cidade;
 - 2º) Número de chamadas telefônica recebidas por hora em uma central telefônica.

Distribuição Poisson



Função de probabilidade P :

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}, \forall x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

λ é o parâmetro da distribuição que corresponde a média de ocorrência de sucesso no intervalo considerado.

Esperança matemática:

$$E(X) = \mu = \lambda$$

Variância:

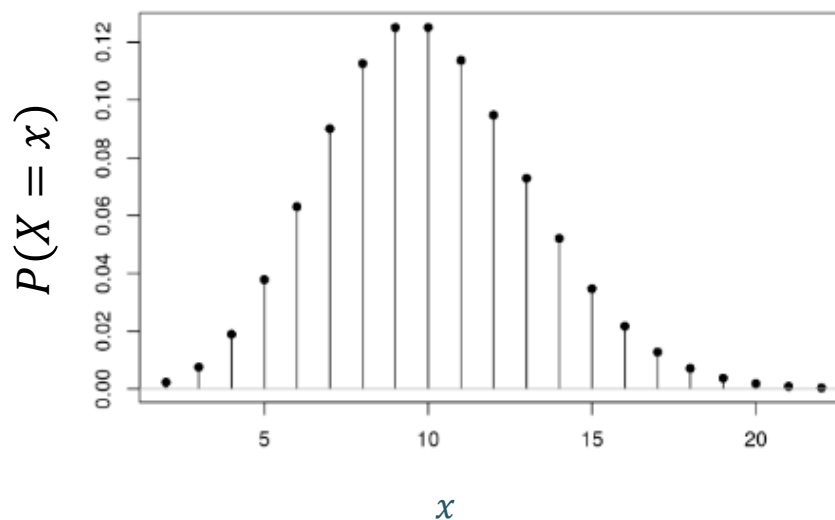
$$V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

Distribuição de Poisson



- Análise gráfica da função probabilidade:
 - $n = 22$ e $\lambda = 0,5$

Distribuição de probabilidade

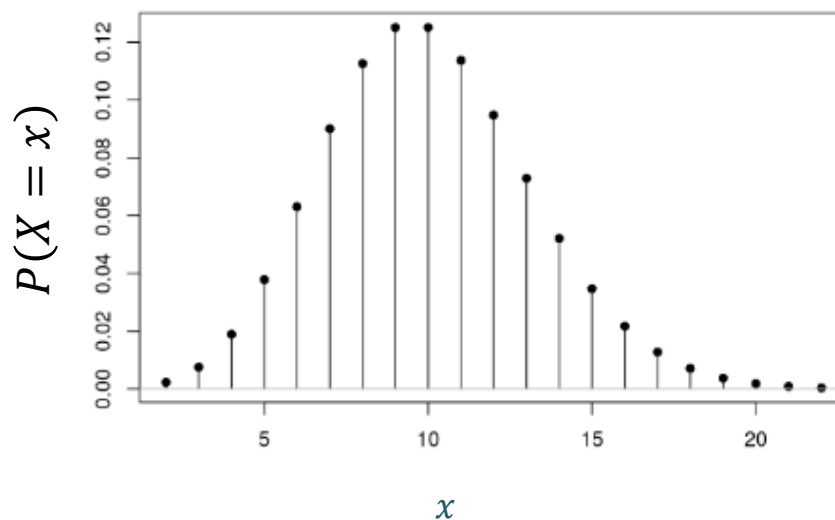


Distribuição de Poisson



- Análise gráfica da função probabilidade:
 - $n = 22$ e $\lambda = 0,5$

Distribuição de probabilidade



Distribuição Normal



Função densidade de probabilidade $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

