MAC 113 — Introdução à Ciência da Computação

Aula 28

Nelson Lago

1°/2025

Previously on MAC113...

Programando

Programar envolve

1. **Compreender um problema em termos computacionais**
2. **Definir como esse problema pode ser solucionado (*algoritmo*)**
   - Sequência finita de passos bem definidos baseados em um conjunto limitado (vocabulário) de operações possíveis
     - » *O algoritmo é abstrato (como a planta de um prédio ou uma receita de bolo)*
3. ***Implementar* o algoritmo em uma linguagem de programação**
   - Gerando um *programa* que pode ser *executado* para solucionar o problema
4. **Testar o programa**

Programando

Para ser útil, um programa geralmente

1. **Obtém dados**
2. **"Faz alguma coisa" com esses dados**
   - Gerando um resultado
3. **"Faz alguma coisa" com esse resultado**
   - Mostra para o usuário
   - **Utiliza como dado para fazer outra coisa**

Mas como criar o algoritmo “certo”?

Algoritmos

1. Usando ou adaptando um algoritmo que já existe
2. Adaptando ideias de outros contextos
3. Conhecendo técnicas comuns (ou seja, estudo e prática)

Doctor Strange (2016)
dir. Scott Derrickson

Busca linear

Escreva uma função que recebe um vector de números `vec` e um número `n` e informa se o número está ou não no vector (sem usar `%in%`)

```
pertence <- function(vec, n) {
    for (val in vec) {
        if (val == n) { return (TRUE) }
    }
    return (FALSE)
}
```

Busca linear

Escreva uma função que recebe um vector ordenado de números vec e um número n e informa se o número está ou não no vector

```
pertence <- function(vec, n) {
    for (val in vec) {
        if (val > n) { return (FALSE) }
        else if (val == n) { return (TRUE) }
    }
    return (FALSE)
}
```

Mas é assim que procuramos uma palavra em um dicionário?!?!

Busca binária

Quando procuramos em um dicionário:

- **Abrimos o dicionário "em algum lugar perto do meio"**
  - Ih, é antes ⟶ abre "em algum lugar do meio" entre o começo e a página atual
  - Ih, é depois ⟶ abre "em algum lugar do meio" entre a página atual e o fim
- **No caso do dicionário, sabemos o mínimo ("a") e o máximo ("z") da lista, então não abrimos "no meio", mas tentamos "chutar" uma página próxima**
- **Numa lista de números genérica, não temos essa "dica", então o melhor é olhar o "meio" mesmo**

Busca binária

Vamos procurar pelo número 23

Busca binária

Escreva uma função que recebe um vector ordenado de números vec e um número n e informa se o número está ou não no vector

```
pertence <- function(vec, n) {
    i <- 1
    j <- length(vec)
    while (i <= j) {
        meio <- (i + j) %/% 2
        if (n == vec[meio]) { return (TRUE) }
        else if (n > vec[meio]) { i <- meio + 1 }
        else { j <- meio - 1 }
    }
    return (FALSE)
}
```

Busca binária

Escreva uma função que recebe um vector ordenado de números vec e um número n e informa se o número está ou não no vector

```
pertence <- function(vec, n) {
    while (length(vec) > 1) {
        meio <- length(vec) %/% 2
        if (n == vec[meio]) { return (TRUE) }
        if (n < vec[meio]) { vec <- vec[seq_len(meio - 1)] }
        else { vec <- vec[-seq_len(meio)] }
    }
    if (length(vec) == 1) { return (n == vec[1]) }
    return (FALSE)
}
```

Exercício — adivinhando números 3/4

Escreva um programa que tenta adivinhar um número de 1 a 10 escolhido pelo usuário: o usuário responde “<”, “>” ou “=” para indicar se o número correto é maior, menor ou igual ao número gerado pelo computador (repetições até atingir um resultado)

```
library(glue)
main <- function() {
    cat("Escolha um número de 1 a 10, vou tentar adivinhá-lo!", "\n")
    resposta <- "x" # qualquer coisa diferente de "="
    while (resposta != "=") {
        chute <- sample(1:10, 1)
        resposta <- readline(glue('Será {chute}? responda com "<", ">" ou "=" '))
    }
    cat("Aêh, sou vidente!", "\n")
}
main()
```

Exercício — adivinhando números 4/4

Melhore o programa anterior, fazendo uso das informações de maior/menor fornecidas pelo usuário

```
cat("Escolha um número de 1 a 10, vou tentar adivinhá-lo!", "\n")
resposta <- "x" # qualquer coisa diferente de "="
menor <- 1
maior <- 10
while (resposta != "=") {
    chute <- sample(menor:maior, 1)
    resposta <- readline(glue('Será {chute}?; responda com "<", ">" ou "=" '))
    if (resposta == ">") {
        menor <- chute + 1
    }
    if (resposta == "<") {
        maior <- chute - 1
    }
}
cat("Aêh, sou vidente!", "\n")
```

Divisão e conquista

Divisão e conquista

Você sabe somar mais de dois números de uma vez?

$$1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 2) + 3 + 4 = 3 + 3 + 4 = (3 + 3) + 4 = 6 + 4 = 10$$

Imagine que o computador só é capaz de fazer uma soma de cada vez; faça uma função que soma uma lista de números

```
soma <- function(v) {
    s <- 0
    for (n in v) { s <- s + n }
    return (s)
}
```

Pega um por um e soma

(como no exemplo $1 + 2 + 3 + 4$ acima)

Divisão e conquista

Mas podemos pensar um pouco diferente:

```
somatório <- function(l) {
    if (length(l) == 0) { return (0) }
    if (length(l) == 1) { return (l[1]) }
    if (length(l) == 2) { return (l[1] + l[2]) }
    if (length(l) >= 3) { return (l[1] + somatório(l[2:length(l)])) }
}
```

$$1 + 2 + 3 + 4 = 1 + (2 + 3 + 4) = 1 + (2 + (3 + 4)) = 1 + (2 + 7) = 1 + 9 = 10$$

A soma de n números é a soma do primeiro com a soma do restante

Divisão e conquista

```
somatório <- function(l) {
    if (length(l) == 0) { return (0) }
    resto <- seq_len(length(l) - 1) + 1
    return (l[1] + somatório(l[resto]))
}
```

```
somatório <- function (l) {
    resto <- seq_len(length(l) - 1) + 1
    return (l[1] + somatório(l[resto]))
}
```

- **Não dá para fazer chamadas recursivas para sempre!**
  - É preciso haver ao menos um caso em que **não** fazemos a chamada recursiva
  - É preciso garantir que **sempre** vamos chegar nesse caso

Busca binária – divisão e conquista

```
pertence <- function(vec, n) {
    i <- 1
    j <- length(vec)
    while (i <= j) {
        meio <- (i + j) %/% 2
        if (n == vec[meio]) { return (TRUE) }
        else if (n > vec[meio]) { i <- meio + 1 }
        else { j <- meio - 1 }
    }
    return (FALSE)
}
```

Busca binária – divisão e conquista

Escreva uma função que recebe dois vectors ordenados de números `Va`, `Vb` e um número `n` e informa se o número está ou não em um deles

```
pertences <- function(Va, Vb, n) {
    return (pertence(Va, n) || pertence(Vb, n))
}
```

Busca binária – divisão e conquista

Mas uma lista com mais de um elemento é igual a duas sub-listas!

```
pertence(L, n)
```

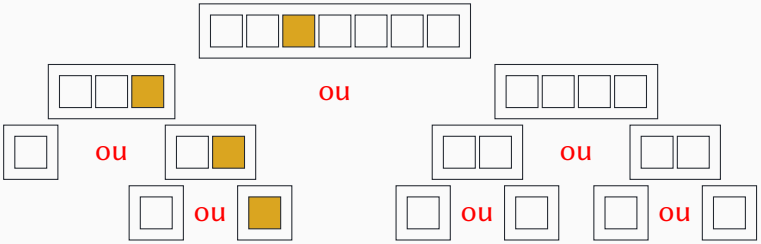
$\Leftrightarrow$

```
pertence(L[1:(length(L)%/% 2)], n) ||
pertence(L[length(L)%/%2 + 1:length(L)]), n)
```

Busca binária – divisão e conquista

Escreva uma versão recursiva da função `pertence()`.

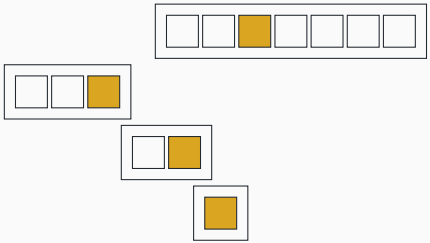
```
pertence <- function(vec, n) {
    if (length(vec) == 0) { return (FALSE) }
    if (length(vec) == 1) { return (vec[1] == n) }
    meio <- length(vec) %/% 2
    return (pertence(vec[1:meio], n) || pertence(vec[(meio + 1):length(vec)], n))
}
```



Busca binária – divisão e conquista

Escreva uma versão recursiva da função `pertence()`.

```
pertence <- function(vec, n) {
    if (length(vec) == 0) { return (FALSE) }
    if (length(vec) == 1) { return (vec[1] == n) }
    meio <- length(vec) %/% 2
    if (vec[meio] > n) { return (pertence(vec[1:meio], n)) }
    return (pertence(vec[(meio + 1):length(vec)], n))
}
```



Recursão

- **Recursão é útil quando você**
  - Sabe como resolver o problema quando ele é “pequeno”
  - Sabe como dividir o problema “grande” em partes menores
    - » *(Até ele ficar “pequeno o suficiente”)*
  - E sabe “re-montar” o problema grande a partir das partes menores
- **Recursões são inspiradas nas demonstrações por indução da matemática**
- **É essencial definir quando a recursão para!**
  - Ou seja, o caso “pequeno” que você já sabe resolver
    - » *(equivalente à base da recursão)*
  - Às vezes há mais de um caso “pequeno”, como no exemplo anterior

Recursão – mesclando listas

Escreva uma versão recursiva da função `mescla()`

```
mescla <- function(v1, v2) {
    if (length(v1) == 0) { return (v2) }
    if (length(v2) == 0) { return (v1) }
    if (v1[1] < v2[1]) {
        novo <- c(v1[1], mescla(v1[-1], v2))
    } else {
        novo <- c(v2[1], mescla(v2[-1], v1))
    }
    return (novo)
}
```

Recursão – mergesort

- **Um algoritmo para ordenar uma lista de inteiros é o *mergesort***
  - (a desvantagem do *mergesort* é que ele precisa criar uma lista auxiliar durante o processamento, ocupando mais memória)
- **Uma lista com zero ou um elementos sempre está ordenada**
- **Para ordenar uma lista maior, basta**
  1. Dividir a lista na "metade"
  2. Ordenar cada uma das partes
  3. Juntar as duas partes mantendo a ordem

Exercício – mergesort

Escreva uma função (recursiva) que implementa o algoritmo *mergesort*

```
mergesort <- function(vec) {
    if (length(vec) <= 1) { return (vec) }
    meio <- length(vec) %/% 2
    esqd <- vec[1:meio]
    drta <- vec[(meio + 1):length(vec)]
    esqd <- mergesort(esqd)
    drta <- mergesort(drta)
    return (mescla(esqd, drta))
}
```

Recursão vs laços

- Maneiras diferentes de pensar repetições
- Muitas vezes “dá na mesma”
- Às vezes, uma é (muito) mais simples de entender que a outra

Ordenação

Escreva uma função que recebe um vector de números
e informa se ele está ordenado

```
ordenado <- function(vec) {
    for (i in seq_len(length(vec) - 1)) {
        if (vec[i] > vec[i + 1]) { return (FALSE) }
    }
    return (TRUE)
}
```

Ordenação — ideias (bozosort)

E como ordenar uma lista?

O computador é rápido, certo? Se embaralharmos a lista várias vezes seguidas, em algum momento a lista vai acabar ordenada.

```
bozosort <- function(vec) {
    while (! ordenado(vec)) {
        vec <- sample(vec)
    }
    return(vec)
}
vec <- c(7,4,8,3,1,9)
cat("Ordenado:", bozosort(vec), "\n")
```

Ordenação — ideias (bubblesort)

Se a lista está fora de ordem, existe algum elemento de índice i tal que `elemento[i]` > `elemento[i+1]`. Se "consertarmos" todos esses casos, a lista fica ordenada.

```
bubblesort <- function(vec) {
    while (! ordenado(vec)) {
        for (i in seq_len(length(vec) - 1)) {
            if (vec[i] > vec[i + 1]) {
                tmp <- vec[i]
                vec[i] <- vec[i + 1]
                vec[i + 1] <- tmp
            }
        }
    }
}
```

Ordenação — ideias (selection sort)

Para ordenar um vector `A`:

"Encontra o próximo e coloca no fim de uma novo vector"

1. **Cria um vector `B` vazio**
2. **Encontra o menor elemento do vector `A` e move esse elemento para o final do vector `B`**
3. **Repete até o vector `A` estar vazio**

Exercício – selection sort

Escreva uma função que recebe um vector, encontra o menor elemento e devolve uma lista com dois itens: o menor elemento encontrado e uma cópia do vector original sem ele

```
encontra_menor <- function(vec) {
    pos <- 1
    for (i in seq_len(length(vec))) {
        if (vec[i] < vec[pos]) { pos <- i }
    }
    parte1 <- seq_len(pos - 1)
    parte2 <- seq_len(length(vec) - pos) + pos
    nvec <- c(vec[parte1], vec[parte2])
    return (list(vec[pos], nvec))
}
```

Exercício – selection sort

Implemente o algoritmo de ordenação por seleção usando a função `encontra_menor()`

```
selection_sort <- function(vec) {
    novo <- integer(length(vec))
    for (i in seq_len(length(novo))) {
        tmp <- encontra_menor(vec)
        menor <- tmp[[1]]
        novo[i] <- menor
        vec <- tmp[[2]]
    }
    return (novo)
}
```

Ordenação — ideias

- **Mas nem precisa de dois vectors!**
- **Basta criar uma divisão imaginária no vector**
  - O pedaço à esquerda da divisão é o vector "novo", que está em ordem
  - O pedaço à direta é o vector "velho", que não está em ordem
  - A linha da divisão imaginária vai avançando a cada passo, de maneira que os elementos "saem" do vector desordenado e "entram" no vector ordenado

Selection sort

Selection sort: Procura o menor de todos e coloca na primeira posição; procura o menor de todos entre os que sobraram e coloca na segunda posição; etc.

Exercício — selection sort

Escreva uma função que recebe um vector e devolve o índice do menor elemento desse vector

```
encontra_menor <- function(vec) {
    pos <- 1
    for (i in seq_len(length(vec))) {
        if (vec[i] < vec[pos]) { pos <- i }
    }
    return (pos)
}
```

Exercício – selection sort

Implemente o algoritmo de ordenação por seleção (“Procura o menor de todos e coloca na primeira posição; procura o menor de todos entre os que sobraram e coloca na segunda posição; etc.”) usando essa nova versão da função `encontra_menor()`

```
selection_sort <- function(vec) {
  for (i in seq_len(length(vec))) {
    jafoi <- i - 1
    falta <- length(vec) - jafoi
    pos <- encontra_menor(vec[seq_len(falta) + jafoi])
    pos <- pos + jafoi
    tmp <- vec[i]
    vec[i] <- vec[pos]
    vec[pos] <- tmp
  }
  return(vec)
}
```

Complexidade computacional

- **Complexidade computacional**
  - O "tamanho do esforço" que o computador deve fazer para resolver um problema de tamanho n
  - Geralmente, estamos preocupados com o tempo de execução, mas às vezes o "esforço" é o consumo de memória ou algum outro aspecto
  - A ideia intuitiva é "mais ou menos proporcional a"
- **Busca linear**
  - O "tamanho do esforço" em termos do tempo de execução é "mais ou menos proporcional" ao tamanho da lista de entrada
    - » *Dizemos que o algoritmo é* **O(n)**
- **Busca binária**
  - O "tamanho do esforço" em termos do tempo de execução é "mais ou menos proporcional" ao número de vezes que podemos dividir a lista de entrada pela metade $\longrightarrow \log_2 n$
    - » *Dizemos que o algoritmo é* **O(log(n))**

Complexidade computacional

- **Em computadores modernos, na maior parte do tempo, a complexidade não importa**
  - Algoritmos com complexidade "ruim" só se tornam perceptivelmente lentos com valores "grandes" de n
  - Nos problemas complexos que envolvem valores grandes de n, você provavelmente vai usar uma biblioteca pronta que implementa uma boa solução para o problema
- **MAS!**
- **Às vezes é preciso levar a complexidade em conta**
  - E é bom saber que existem problemas para os quais não se conhecem soluções com complexidade "boa"

Complexidade dos algoritmos de ordenação

bozosort: NEM IDEIA! 😂

- Não é determinístico (pode não terminar nunca)
- Eu chuto que a probabilidade de encontrar uma solução em um determinado tempo deve ser proporcional a O(n!)
  - » *Com dez elementos, tende a demorar vários segundos!*

Complexidade dos algoritmos de ordenação

bubblesort: $O(n^2)$

1. Troca a posição de todos os elementos fora do lugar (proporcional a n)
2. Repete até todos os elementos estarem no lugar certo (proporcional a n)

selection sort: $O(n^2)$

1. Passa pela lista procurando o menor elemento (proporcional a n)
2. Repete para todos os elementos da lista (proporcional a n)

mergesort: $O(n \times log(n))$

1. Divide a lista na metade (proporcional a $\log n$)
2. Para cada par de "fatias", mescla (proporcional a n)

Complexidade dos algoritmos de ordenação

- **É possível demonstrar que não existe algoritmo de ordenação genérico com complexidade melhor que O(n×log(n))**
  - Na verdade, isso se aplica a algoritmos baseados em comparações diretas entre os elementos
  - Existem alguns algoritmos com complexidade O(n), mas eles não fazem comparações diretas entre os elementos; para isso ser possível, eles dependem de limitações específicas, como um número máximo de dígitos em cada número

Números de ponto flutuante e suas pegadinhas

Números de ponto flutuante

- **Em python (e outras poucas linguagens), números inteiros podem ser tão grandes quanto necessário**
  - (Até o limite da memória disponível)
    - » *A menos que você esteja lidando com números muito grandes, cada um deles ocupa pouca memória*
- **Mas, na maioria das linguagens (incluindo R), geralmente há um tamanho máximo**
  - Em R, números até ~2 bilhões, positivo ou negativo (32 bits)
    - » *Pouco! Uma das razões pelas quais inteiros não são muito usados em R*
  - Em geral, números até ~9 quintilhões, positivo ou negativo (64 bits)

Números de ponto flutuante

- **Mas e números como $\frac{2}{3}$ ou $\sqrt{2}$?**
  - Não é possível representá-los com precisão em um sistema com memória finita
- **E números "pequenos", como 4.30×10^{-7}?**
  - Não são incomuns!
- **Uma representação ingênua é escolher um valor mínimo, como 10^{-12}, e tratá-lo como "1"**
  - Mas com isso os inteiros "normais" passam a gastar mais memória e/ou o número máximo possível fica reduzido
  - Além disso, os números próximos ao mínimo têm pouca precisão
  - O que acontece se precisarmos do número 10^{-13}?
    - » *(ele não é tãããão pequeno assim...)*
- **Essa solução é usada apenas em alguns casos especiais**

Números de ponto flutuante

- **O que fazemos é representar esses números usando a notação científica: mantissa $\times 10^{\text{expoente}}$**
  - É possível representar números em uma faixa muito maior (em R e na maioria das linguagens, de $\sim 1.7 \times 10^{-308}$ a $\sim 1.7 \times 10^{308}$, positivo ou negativo)
  - A precisão dos números é independente de sua grandeza
    - » *depende apenas do tamanho da mantissa (na maioria das linguagens, cerca de 15 dígitos decimais)*
  - O consumo de memória é pequeno
- **MAS**
- **O limite de precisão pode causar surpresas**

Números de ponto flutuante

- **Imagine uma representação em que a mantissa tem até 4 dígitos e o expoente pode variar de 10^{-4} até 10^{5}**
  - O maior número representável seria 9.999×10^{5}, ou seja, 999.900
- **Não seria possível representar o número 34.567!**
  - Seria preciso usar 3.457×10^{4}, ou seja, 34.570

E como lidar com isso?

Imprecisões com ponto flutuante

- **Testes de igualdade**
  - Números que deveriam ser iguais, mas são diferentes por erros de arredondamento, vão causar erros em condicionais (`if`, `while`)

```
if (sqrt(2)**2 == 2){ … }
```

```
epsilon <- 1e-15 # É preciso escolher um valor "razoável"
if (abs(sqrt(2)**2 - 2) < epsilon) { … }
```

Imprecisões com ponto flutuante

- **Multiplicações e divisões não costumam causar problemas**
  - Independentemente da grandeza (expoente), os cálculos são feitos com toda a precisão da mantissa
    - » $(1,234 \times 10^{8}) \times (5,678 \times 10^{-3}) = 1,234 \times 5,678 \times 10^{5}$

Imprecisões com ponto flutuante

- **Somas e subtrações podem causar problemas**
  - Somas/subtrações com números de grandezas muito diferentes
    - » `cat(format(2e10 + 4e-10, digits=22), "\n")`
      `2e+10` 😱
  - Subtrações com números muito próximos
    - » *O resultado da diferença vai ser predominantemente composto pelos dígitos menos significativos, onde o erro é proporcionalmente maior*
      `cat(format(0.1000000000001, digits=22), "\n")`
      `0.10000000000000999950123` *(erros no dígito 18)*
      `cat(format(0.1000000000001 -0.1, digits=22), "\n")`
      (diferença no dígito 13)
      `9.998946115530316092l9e-14` *(erro no dígito 4)* 😳
- **Somatórios podem fazer as imprecisões se combinarem, tornando erros irrelevantes em catastróficos**
  - Para evitar isso, procure processar do “pequeno” para o “grande”

Exercício — calculando π com Gregory-Leibniz

Dado um inteiro $k \geq 0$, é possível calcular um valor aproximado de π através da expansão de Gregory-Leibniz:

$$\pi \approx \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} \cdots + \frac{(-1)^k 4}{2k+1}$$

Escreva um programa que lê um valor para k e realiza o cálculo acima.

Exercício — calculando π com Gregory-Leibniz

$$\pi \approx \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} \cdots + \frac{(-1)^k 4}{2k+1}$$

```
main <- function() {
    k <- as.integer(readline("Digite o valor de k: "))
    cat("O valor de pi é aproximadamente", acha_pi(k), "\n")
}
acha_pi <- function(k) {
    pi <- 0
    sinal <- 1
    if (k %% 2 != 0) { sinal <- -1 }
    while (k > 0) {
        pi <- pi + sinal * 4 / (2*k + 1)
        sinal <- sinal * - 1
        k <- k - 1
    }
    return(pi)
}
main()
```

E como lidar com isso?

Na maior parte do tempo,
não é preciso se preocupar