

Relatório 4 - Ondulatória

Felipe Magina (15451791); Luan Leal (15470820);
Matheus Justino (14598021); Matheus Queiroz (15479562);
Micael Baruch (15578823)

13 de maio de 2025

1 Introdução

O estudo do movimento oscilatório descreve uma série de fenômenos, desde cotidianos como pêndulos e molas, até mais fundamentais como propagação de ondas eletromagnéticas e vibrações moleculares que podem ser tratadas como osciladores harmônicos quânticos ^[1]. Em particular, tais fenômenos podem ser modelados, ao menos de uma forma mais simples (que despreza a ação de forças externas) pelo oscilador harmônico simples (OHS), cuja uma das primeiras descrições foi feita pelo matemático Leonard Euler ^[2], sendo que apresenta a seguinte fórmula:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

em que $x(t)$ corresponde à posição da massa oscilante em função do tempo, A à amplitude do movimento, ω à frequência angular e ϕ à fase. Tendo em vista a importância do estudo do movimento oscilatório, este relatório busca discutir algumas de suas principais características e aplicações, como descrição de sistemas de molas, acoplamento entre diferentes tipos de movimento harmônico em um mesmo objeto, ondas em fios com formação de harmônicos e oscilações amortecidas por atrito.

O primeiro experimento utiliza sistemas massa mola, buscando observar como a variação do tipo da mola e das massas colocadas afetam o movimento, em particular sua frequência. Além disso, pela experimentação é possível obter-se a constante elástica da mola, a partir do uso da Lei de Hooke:

$$F_{el} = -kx$$

em que F_{el} é a força realizada pela mola sobre o objeto, k é a constante elástica e x representa a distorção da mola em relação ao seu comprimento relaxado.

Já o segundo experimento envolve o uso de um pêndulo de Wilberforce, inventado por Lionel Robert Wilberforce para o estudo de propriedades de materiais ^[3]. Tal pêndulo utiliza uma mola capaz de compressão longitudinal e torção transversal, o que possibilita a transferência de energia entre o movimento oscilatório vertical e a rotação, havendo um acoplamento de oscilações. Ademais, além da descrição desse fenômeno, é esperado que possam ser feitas relações com o funcionamento de uma máquina de lavar, por conta do movimento de seu tambor que apresenta características similares às do pêndulo de Wilberforce.

Quanto ao terceiro experimento, nele é analisada a propagação de ondas mecânicas, ou seja, fenômenos de pulsos de propagação de energia em meio material, sem transferência de matéria. São produzidas ondas longitudinais e transversais em molas esticadas, sendo possível gerar ondas senoidais, que visualmente deslocam-se no eixo, com perturbação que varia no tempo, e estacionárias, quando ocorre interferência entre ondas indo e voltando no eixo, causando nós nos pontos de interferência destrutiva e apresentando

padrões de ondas que constituem harmônicos, dependendo de quantos nós são formados. No segundo caso, é necessária uma dada combinação de frequência de oscilação e comprimento para haver a formação de ondas estacionárias, sendo notório ao realizar-se o experimento com um brinquedo que vibra a uma frequência fixa, preso à uma corda que pode ter seu comprimento efetivo alterado, dependendo de onde é segurada. Ademais, é relevante ressaltar a importância dos harmônicos, por exemplo na área do estudo da música, uma vez que as notas musicais são formadas por composição de harmônicos.

Por fim, o quarto experimento visa analisar um caso de oscilador harmônico amortecido, sendo utilizado um pêndulo de torção em meio de ar e posteriormente sob óleo. O atrito de diferentes materiais afeta o movimento oscilatório, removendo-se energia do movimento e afetando o deslocamento e frequência, como mostrado na fórmula para osciladores amortecidos:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$$

onde e é o número de Euler e γ é a densidade do fluido dividida pela massa do objeto que oscila. É esperado que ocorra um amortecimento subcrítico, por tanto o óleo quanto o ar não apresentarem grandes resistências que freiem o movimento rapidamente. Isso deve resultar em uma gradual redução na amplitude do movimento e da frequência ^[4], com consequente aumento do período, sendo que deve ocorrer mais intensamente com o óleo por conta do maior atrito.

2 Metodologia

2.1 Sistema massa–mola

Utilizou-se um conjunto composto por suporte metálico, molas de diferentes constantes elásticas e três massas calibradas, sendo duas delas de 100 gramas e uma de 200 gramas. Cada massa foi acoplada à extremidade inferior da mola, a qual foi fixada ao suporte. A massa foi então deslocada verticalmente e solta, iniciando oscilações. O experimento foi repetido com diferentes massas e molas e foi registrado no formato de vídeo para análises posteriores utilizado o software *Tracker*.

A Figura 1 apresenta o sistema massa–mola montado e os componetes utilizados.



Figura 1: A esquerda, o sistema massa–mola com as massas acopladas à extremidade inferior da mola, a direita, jogo de molas, pesos e suportes utilizados no experimento. Fonte: Fotografias tiradas pelo monitor Pedro

2.2 Pêndulo de Wilberforce

O pêndulo de Wilberforce foi composto por uma mola helicoidal disposta verticalmente, acoplada em sua extremidade inferior a um cilindro metálico. Este cilindro continha discos de dimensões semelhantes,

conectados por meio de uma haste metálica, com posições ajustáveis ao longo do eixo, permitindo o controle da distribuição de massa. Essa configuração possibilita ao sistema oscilar simultaneamente nos modos vertical e rotacional. A extremidade superior da mola foi fixada a um suporte rígido, sustentando o conjunto oscilante. O sistema foi iniciado com oscilação exclusivamente vertical, observando-se posteriormente o acoplamento com o movimento rotacional.

A Figura 2 mostra o sistema em repouso e a representação gráfica do seu movimento.

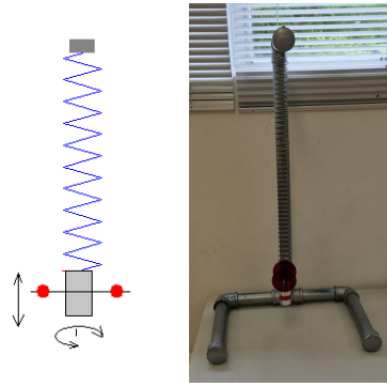


Figura 2: Pêndulo de Wilberforce à direita e representação do movimento do cilindro oscilando vertical e angularmente à esquerda. Fonte: Fotografia tirada pelo monitor Pedro e imagem disponibilizada pelo mesmo.

2.3 Pêndulo de torção

Utilizou-se um fio metálico fino, fixado na extremidade superior, com um cilindro metálico contendo uma fita métrica em seu entorno suspenso em sua extremidade inferior. O sistema realizou oscilações angulares em torno do eixo do fio. O tempo para 10 oscilações foi registrado com cronômetro digital. O experimento foi realizado em dois meios: ar e óleo. No segundo caso, o cilindro foi parcialmente imerso. Foram utilizados os cinco primeiros valores de tempo de cada meio para plotar um gráfico e realizar sua linearização por meio da ferramenta do Google Planilhas, com o objetivo de prever o valor correspondente a dez oscilações e, posteriormente, compará-lo com os dados obtidos empiricamente.

A Figura 3 mostra o pêndulo de torção e os componentes utilizados no experimento.



Figura 3: Materiais utilizados: pêndulo de torção, recipiente contendo óleo e cronômetro. Fonte: Fotografia tirada pelo monitor Pedro

2.4 Propagação de ondas em molas

Foram utilizadas duas molas com diferentes rigidezes, dispostas horizontalmente sobre superfície plana. Ondas transversais e longitudinais foram geradas por impulsos aplicados manualmente em uma extremidade da mola tensionada. Observou-se a propagação da perturbação, a formação de nós e padrões de interferência.

A Figura 4 mostra as diferentes molas utilizadas para a realização desse experimento.



Figura 4: Sistema de molas utilizadas no experimento. Fonte: Fotografia tirada pelo monitor Pedro

2.5 Esfera vibrando

Uma esfera de plástico acoplada a um excitador eletromecânico em seu interior foi suspensa por uma corda. O dispositivo foi ligado gerando perdas na corda suspensa, o comprimento da corda foi ajustado até que padrões de ondas estacionárias fossem observados na mesma.

A Figura 5 ilustra a esfera utilizada no experimento e a corda em que os padrões descritos foram observados.

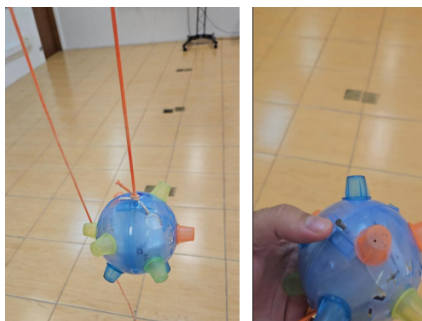


Figura 5: Esfera plástica com o excitador interno desligado suspensa por um corda e repolsanda sobre uma mão. Fonte: Fotografias tiradas pelo monitor Pedro

3 Resultados e discussões

3.1 Sistema massa-mola

A partir dos dados extraídos do Tracker, resumidos nas Figuras 6 a 8, é notável observar o comportamento senoidal de todos os sistemas. É possível estimar a frequência do sistema massa-mola pela observação gráfica. Em Figura 6 a observação indica aproximadamente 1 oscilação por segundo. Enquanto em Figura 7 obtêm-se pouco mais de uma oscilação por segundo. E, em Figura 8 pouco menos de 1 oscilação por segundo.

No entanto, podemos também nos aproveitar do comportamento dos sistemas e obter uma equação para descrever cada um dos sistemas a partir da função horária da posição da massa considerando que tenha comportamento de um oscilador harmônico simples:

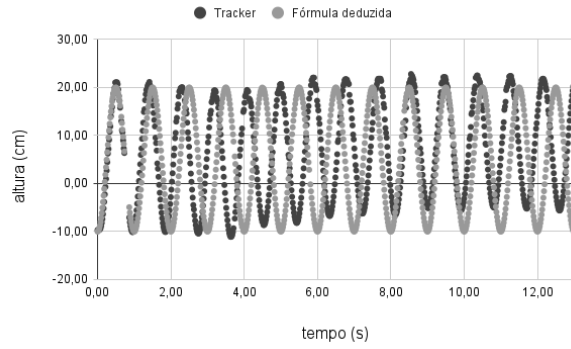


Figura 6: Para mola grande com massa de 100 g, gráfico de dispersão dos dados obtidos no Tracker em comparação aos valores nos mesmos instantes de tempo com a função horária deduzida

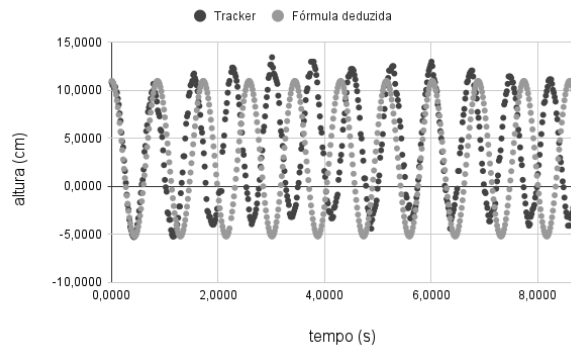


Figura 7: Para mola pequena com massa de 100 g, gráfico de dispersão dos dados obtidos no Tracker em comparação aos valores nos mesmos instantes de tempo com a função horária deduzida

$$x(t) = A \cos(\omega t + \psi) + x_0$$

Para o sistema com a mola maior e a massa de 100 g, considerando os primeiros períodos, obtemos que os pontos de máximo e mínimo são: $x(0) = -10$ cm, $x(0,50) = 20$ cm. Então, podemos extrair a função horária:

$$x_{Gm}(t) = A \cos(\omega t + \psi) + x_{Gm0}$$

$$x_{Gm}(0) = A + x_{Gm0} = 20 \text{ cm}$$

$$x_{Gm}(1) = -A + x_{Gm0} = -10 \text{ cm}$$

$$\implies x_{Gm0} = 5 \text{ cm}$$

$$\implies A = 20 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

Além de que:

$$x_{Gm}(0) \text{ é mínimo } \implies \cos(\psi) = -1$$

$$\implies \psi = \pi$$

$$x_{Gm}(0,50) \text{ é máximo } \implies \cos(0,5\omega + \pi) = 1$$

$$\implies \omega = 2\pi$$

$$\implies x_{Gm}(t) = 15 \cos(2\pi t + \pi) + 5$$

$$\implies x_{Gm}(t) = -15 \cos(2\pi t) + 5$$

Esta é a fórmula deduzida para o sistema massa-mola apresentada em cinza na Figura 6. É notável que a fórmula descreve bem o sistema nos períodos iniciais e começa a se comportar de maneira diferente ao longo de mais períodos. Esta divergência decorre de: (1) a dispersão de energia na forma de calor no sistema real, (2) a trepidação do sistema no eixo x, não oscilando perfeitamente na vertical, (3) a trepidação da câmera que registra o sistema, causando diferenças na altura absoluta da massa com relação a altura observada no software Tracker.

O mesmo processo pode ser utilizada para extrair a função horária da mola menor:

$$x_{pm}(t) = 8,1 \cos\left(\frac{\pi}{0,43}t\right) + 2,9$$

Que também apresenta divergências com relação aos dados extraídos do Tracker pela mesma justificativa que a mola maior, conforme observável na Figura 7. Com as funções horárias é possível determinar a frequência dos osciladores:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\omega}{2\pi} \\ \nu_{pm} &= \frac{\pi}{0,43 \cdot 2\pi} = 1,16 \\ \nu_{Gm} &= \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \end{aligned}$$

Em que, ν_{pm} é a frequência da mola pequena com massa de 100 g e ν_{Gm} é a mola grande com massa de 100 g. Obtemos então, resultados compatíveis com a análise gráfica.

É possível determinar também a constante elástica das molas:

$$k = \omega^2 \cdot m$$

$$k_{pm} = (\pi 2 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0,1 \text{ kg}$$

$$k_{pm} = 3,95 \text{ N m}^{-1}$$

$$k_{Gm} = \left(\frac{\pi}{0,43} \text{ s}^{-1}\right)^2 \cdot 0,1 \text{ kg}$$

$$k_{Gm} = 5,34 \text{ N m}^{-1}$$

A frequência de oscilação do sistema é determinada por $\frac{\omega}{2\pi} = \nu$, com $\omega^2 = \frac{k}{m}$, portanto, a frequência deve ser inversamente proporcional à raiz quadrada da massa. Podemos averiguar isso observando a frequência para o sistema com a mola grande com 200 g. A função derivada para esta mola é $x_{G2m} = 8,84 \cos(\frac{\pi}{0,66}t) - 11,16$, é possível observar a comparação entre esta função e os dados extraídos do Tracker na Figura 8. Desta função, podemos extrair $\nu = \frac{\pi}{0,66 \cdot 2 \cdot \pi} = 0,76 \text{ s}^{-1}$. Como esperado, o valor obtido é menor que a frequência para a mesma mola com uma massa menor.

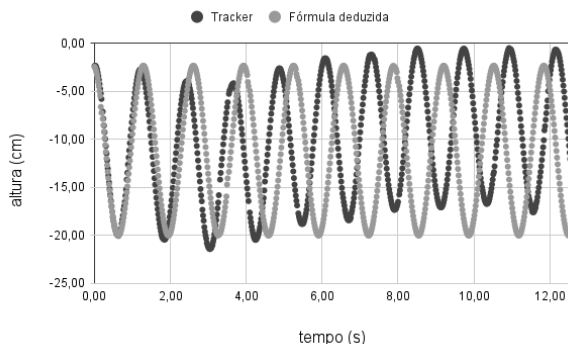


Figura 8: Para mola grande com peso de 200 g, a figura apresenta os dados extraídos do software Tracker em comparação com os valores obtidos nos mesmos instantes de tempo para uma função horária deduzida para este oscilador

3.2 Pêndulo de Wilberforce

Neste experimento, foi analisado o comportamento do Pêndulo de Wilberforce, um sistema que exemplifica de forma clara o fenômeno de oscilações acopladas. O aspecto mais notável do pêndulo é a transferência gradual de energia entre os modos de oscilação longitudinal e rotacional, resultando em alternâncias periódicas entre esses movimentos.

A origem dessa transferência de energia está no acoplamento entre os dois modos de oscilação, causado pelas propriedades geométricas e elásticas da mola. Quando a massa oscila verticalmente, a mola se comprime e se estende. Devido à sua estrutura helicoidal, essas variações induzem uma torção no sistema, influenciando o movimento rotacional. Esse acoplamento permite que a energia seja transferida entre os modos de oscilação, caracterizando o sistema como um oscilador acoplado.

Para que a transferência de energia entre os modos longitudinal e rotacional seja eficiente, é fundamental que suas frequências naturais sejam próximas. Uma forma de ajustar essa proximidade é modificando a frequência do modo rotacional por meio da posição dos discos laterais, o que altera o momento de inércia da massa suspensa. Quando essa condição é atingida, o sistema pode entrar em ressonância, o que favorece a troca contínua de energia entre os dois modos de oscilação.

Durante esse processo, a energia potencial elástica associada à compressão e extensão da mola (modo

longitudinal) e a energia potencial de torção (modo rotacional) são convertidas em suas respectivas formas de energia cinética. A energia cinética translacional está relacionada ao movimento vertical da massa, enquanto a energia cinética rotacional está associada à sua rotação. A alternância entre esses modos resulta em uma oscilação da amplitude de cada movimento, evidenciando a transferência gradual de energia no sistema.

Esse comportamento do Pêndulo de Wilberforce não apenas ilustra princípios fundamentais da física de oscilações acopladas, mas também encontra analogias em sistemas do cotidiano, como a máquina de lavar. Uma vez que, como um pêndulo de Wilberforce, ela realiza oscilações no eixo rotacional e oscilações no eixo longitudinal. Essa dinâmica de um oscilador acoplado, lhe confere a propriedade de transferência gradual de energia entre os modos de oscilação, e dependência da ressonância entre as oscilações para melhor funcionamento do equipamento. Dessa forma, se a frequência da rotação estiver muito descalibrada, devido ao acúmulo de massa em um ponto do cesto da máquina por exemplo, pode ocasionar em uma transferência excessiva de energia para a oscilação longitudinal, o que pode danificar o máquina.

3.3 Pêndulo de Torção

Para analisar o comportamento do pêndulo de torção em diferentes meios, foi medido o tempo necessário para realizar oscilações tanto no ar quanto no óleo. Dessas medições, pontuou-se as 5 primeiras oscilações, e ao realizar uma regressão linear, obteve-se uma expressão que corresponde ao comportamento do pêndulo, tanto no ar quanto no óleo, como é possível observar nas imagens e . Dessa forma, utilizando as expressões que correspondem ao comportamento do pêndulo em diferentes meios para calcular qual seria o tempo necessário para se realizar 10 oscilações, temos:

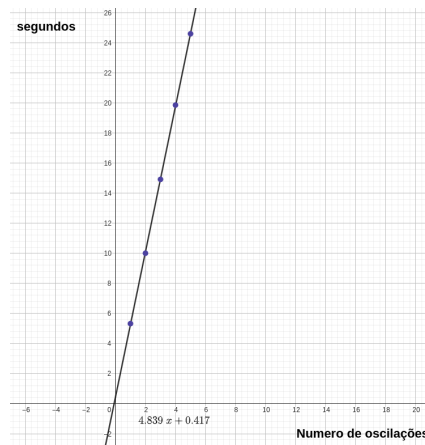


Figura 9: Gráfico do numero de oscilações do pêndulo de torção no ar por tempo, tendo feita a regressão linear com 5 pontos

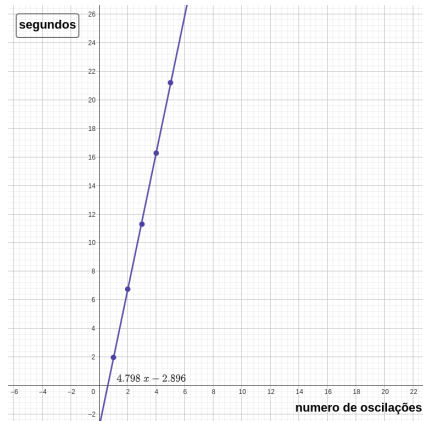


Figura 10: Gráfico do numero de oscilações do pêndulo de torção no óleo por tempo, tendo feita a regressão linear com 5 pontos

Pêndulo no ar:

$$f(x) = 4,839x + 0,417 \text{ Sendo "f(x)" o tempo em segundos, e "x" o numero de oscilações}$$

$$f(x) = 4,839 * 10 + 0,417$$

$$f(x) = 48,807 \text{ s}$$

Pêndulo no óleo:

$$f(x) = 4,798x - 2,896 \text{ Sendo "f(x)" o tempo em segundos, e "x" o numero de oscilações}$$

$$f(x) = 4,798 * 10 - 2,896$$

$$f(x) = 45,084 \text{ s}$$

Tabela 1: Dados obtidos empiricamente do pêndulo de Torção no ar

Oscilação	Tempo (s)	Variação do Tempo (s)
1	00:05.32	00:05.32
2	00:10.00	00:04.68
3	00:14.91	00:04.91
4	00:19.85	00:04.94
5	00:24.59	00:04.74
6	00:29.50	00:04.91
7	00:34.32	00:04.82
8	00:39.24	00:04.92
9	00:44.23	00:04.99
10	00:48.94	00:04.71

Tabela 2: Dados obtidos empiricamente do pêndulo de Torção no óleo

Oscilação	Tempo (s)	Variação do Tempo (s)
1	00:01.97	00:01.97
2	00:06.75	00:04.78
3	00:11.30	00:04.55
4	00:16.27	00:04.97
5	00:21.20	00:04.93
6	00:26.14	00:04.94
7	00:31.08	00:04.94
8	00:35.83	00:04.75
9	00:40.42	00:04.59
10	00:45.46	00:05.04

Como observado nas tabelas 1 e 2, as previsões da regressão linear estão de acordo com os valores empíricos. Além disso, a análise dos dados permite concluir que, no ar, o pêndulo apresentou oscilações com variações de tempo bastante regulares, com valor médio aproximado de 4,86 s por oscilação. Isso sugere que, nesse meio de baixa resistência, o movimento mantém sua periodicidade e conserva energia por mais tempo.

Já no óleo, embora a média das oscilações também tenha se mantido próxima a 4,85 s, a primeira oscilação foi significativamente mais curta (1,97 s), o que pode indicar um erro experimental ou falha na cronometragem. Ao desconsiderar essa medida inicial, a média passa para 4,83 s, valor mais coerente com o esperado para um sistema amortecido.

Assim, ao excluir a primeira medição, conclui-se que o pêndulo no ar representa um sistema quase conservativo, enquanto o pêndulo no óleo evidencia a ação de um meio viscoso, que dissipa energia com mais intensidade, reduzindo a amplitude das oscilações com o tempo.

3.4 Ondas

A formação de ondas transversais na mola maior resultou em ondas se propagando ao longo da mola formando picos e vales na mola transversais ao deslocamento da onda. Ao agitar suficientemente e consistentemente rápido tornou-se possível notar que uma quantidade fixa de vales e picos se formaram em pontos fixos da mola com alguns. Nos pontos de encontro entre um vale e um pico a posição do segmento de mola permaneceu constante, isto é o que denomina-se um nó. Este comportamento é explicado pela reflexão das ondas que ao chegarem do lado oposto ao que foram formadas invertem de fase, então, se a frequência é tal que caiba um número inteiro de meio comprimentos de ondas na mola, as fases opostas se cancelam formando nós e as fases iguais se somam, formando vales e picos mais evidentes.

Ao criar ondas longitudinais ao longo da mola menor, não foi possível observar a formação de nós. Provavelmente devido à não executar os impulsos com a frequência correta para o cenário anteriormente descrito aconteça.

Por fim, as esferas presas às pontas das cordas vibram à uma frequência fixa. Portanto, a única forma de observar a formação de nós é segurando a corda com comprimento suficiente para que, dada a frequência da esfera, o número correto de ondas seja formado. Exatamente este fenômeno foi observado, ainda, é possível notar que ao aumentar suficientemente o comprimento é possível notar a formação de mais nós apenas quando o comprimento foi exato. Ademais, entre a formação de n nós e $n + 1$ nós, os nós formados anteriormente “desaparecem” até que o comprimento seja suficiente para formação dos nós seguintes.

4 Conclusão

Os experimentos realizados demonstraram os princípios fundamentais do movimento oscilatório e suas aplicações práticas. No estudo do sistema massa-mola, a relação linear da Lei de Hooke foi confirmada, com a frequência angular mostrando dependência direta com a constante elástica e a massa. O experimento com o pêndulo de Wilberforce revelou o fenômeno de acoplamento de modos vibratórios, onde se observou a transferência periódica de energia entre os movimentos longitudinal e torsional, relacionando com o movimento periódico de uma máquina de lavar. Na investigação de ondas estacionárias em cordas, verificou-se a formação de harmônicos discretos, com nós em posições bem definidas. Por fim, o estudo do oscilador amortecido evidenciou o decaimento exponencial da amplitude, com o coeficiente de amortecimento mostrando dependência clara com a viscosidade do meio, confirmando o comportamento previsto teoricamente. Estes resultados não apenas corroboram os modelos teóricos, mas também ilustram sua relevância para compreender fenômenos que vão desde aplicações tecnológicas até sistemas naturais complexos.

Referências

- 1 LibreTexts Physics. *7.6: The Quantum Harmonic Oscillator*. n.d. ([https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/University_Physics_\(OpenStax\)/University_Physics_III_-_Optics_and_Modern_Physics_\(OpenStax\)/07%3A_Quantum_Mechanics/7.06%3A_The_Quantum_Harmonic_Oscillator](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/University_Physics_(OpenStax)/University_Physics_III_-_Optics_and_Modern_Physics_(OpenStax)/07%3A_Quantum_Mechanics/7.06%3A_The_Quantum_Harmonic_Oscillator)). Acessado em 10 de maio de 2025.
- 2 BARROS, L. d. S. et al. Oscilador harmônico simples, série e transformada de fourier e operador de sturm-liouville: uma breve discussão. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 45, p. e20230046, 2023.
- 3 BERG, R. E.; MARSHALL, T. S. Wilberforce pendulum oscillations and normal modes. *Lecture-Demonstration Facility, Department of Physics and Astronomy, University of Maryland*, 1990. College Park, Maryland 20742.
- 4 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*. 5. ed. [S.l.]: Editora Edgard Blücher, 2014. v. 2.