

Nota: 9,2/10



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
CENTRO DE INOVAÇÃO - INOVA USP
Curso de Ciências Moleculares



Felipe Amorim - 14569219

Henry Acciari - 14578557

Larissa Meloni - 15467875

Lira Nemi de Freitas - 10366800

RELATÓRIO Nº4 DE AULA PRÁTICA:

Ondulatória

Relatório referente à aula prática ministrada no dia 28/04/2025 na disciplina CCM0122 - Física II do Curso de Ciências Moleculares da Universidade de São Paulo, na modalidade de bacharelado, como requisito parcial avaliativo para aprovação semestral.

Orientador: Prof. Dr. Caetano Rodrigues Miranda

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo explicitar conceitos de ondulatória e demonstrar sua importância dentro da física. Inicialmente, para compreender ondulatória é inato que primeiro oscilações sejam bem fundamentadas, dessa forma, a ordem de estudo dos diferentes sistemas demonstrados foi seguida: sistema massa mola; pêndulo de torção; pêndulo de Wilberforce; molas diferentes e esfera vibrando.

O sistema massa mola, apesar da simplicidade, é capaz de ilustrar com clareza a oscilação harmônica de sistemas e como isso pode ser descrito pela lei de Hook. Em seguida, o pêndulo de torção, que também está dentro do movimento harmônico, viabiliza a observação de variações de período e condições de movimento amortecido. O Pêndulo de Wilberforce é um dos muitos aparelhos fantásticos que ilustram a complexidade da dinâmica ao combinar diferentes movimentos oscilatórios. Por fim, as molas helicoidais e a esfera vibrando uma corda explicitam conceitos de propagação de ondas por diferentes meios e ondas estacionárias.

Dessa maneira, a partir de todos os experimentos e análises, é esperado que torne-se mais claro conceitos como oscilações e ondas, ~~que além de serem razoavelmente visíveis, não carecem de teoria elegante: utiliza-se de aparatos matemáticos sofisticados como Equações Diferenciais, Cálculo, Análise Complexa, Geometria, Trigonometria, que dão abertura para descrever esses fenômenos com grande fidedignidade aos seus comportamentos naturais. Mesmo com tantas ferramentas e métodos para compreender esses fenômenos, ainda sim parecem de natureza fantástica.~~

Oscilações e ondulatória unificam diversas áreas da física e seus estudos viabilizaram muitas tecnologias que hoje são vitais para o funcionamento da sociedade. Dessa maneira, é inegável a importância de tais áreas para a construção do conhecimento como ~~um todo — não é possível dizer que estes conhecimentos ultrapassam as barreiras da área da física, pois enquanto ciência fundamental, é uma das formas de tentar descrever o mundo com toda sua complexidade e particularidades.~~

2 Sistema massa-mola

2.1 Metodologia

Duas diferentes molas foram testadas, cada uma acoplada a duas diferentes massas. Mediu-se primeiramente o comprimento das molas sem carga acoplada, e em seguida seus comprimentos com cada uma das massas acopladas. A análise do seu comportamento foi feita tanto em capacidade estática quanto dinâmica sob oscilação induzida à mão. Todos os sistemas foram medidos sob a influência da gravidade. Comprimentos foram medidos utilizando uma régua com precisão de 1mm, e intervalos de tempo foram medidos usando gravações de vídeo posteriormente analisadas quadro-a-quadro.

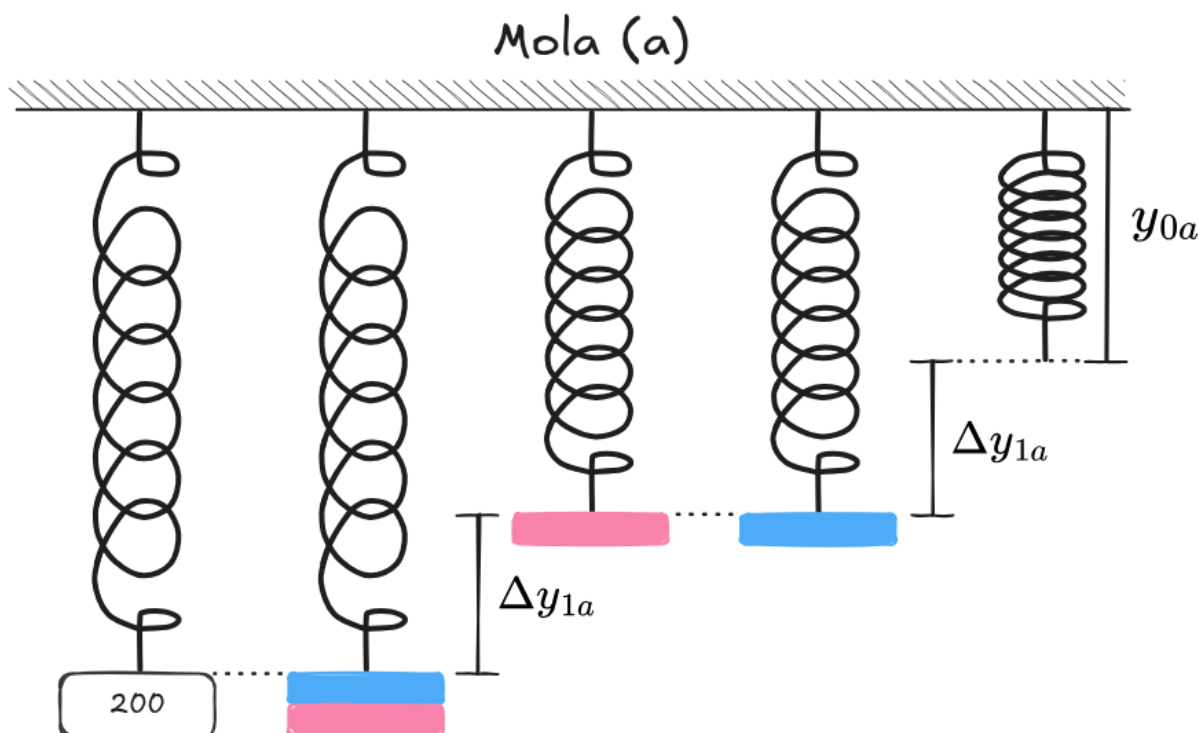
2.2 Resultados e discussão

Um sistema massa-mola é uma configuração que modela um oscilador simples, onde uma mola ideal está acoplada a uma massa que oscila em uma única dimensão. O comportamento desse sistema é derivado de uma relação simples conhecida como Lei de Hooke:

$$m\vec{a} = -k\Delta y$$

Onde m é a massa acoplada, $\vec{a}$ sua aceleração, Δy seu deslocamento ao longo do eixo, e k a constante da mola.

Durante o experimento performed, testou-se a distensão de duas molas diferentes, (a) e (b), com e sem diferentes pesos:



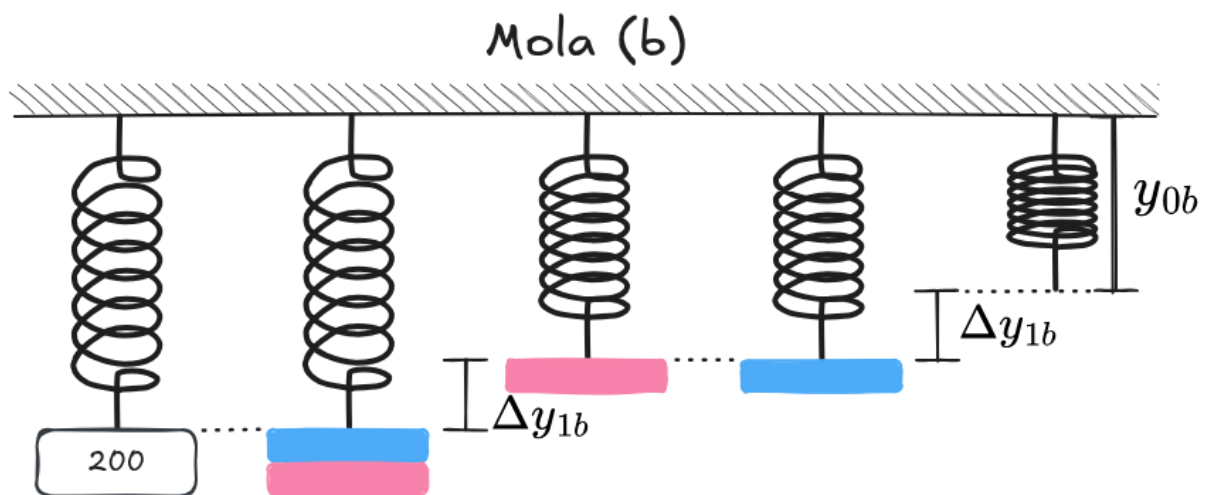
Os comprimentos foram medidos usando uma régua com precisão de 0.1cm. Observou-se uma distensão idêntica para os pesos cor de rosa e azul $\Delta y_{1a} = 24.5 - y_{0a} = 17.5 \pm 0.1$ cm e essa distensão foi dobrada ao acoplar os dois ao mesmo tempo, conforme o comportamento linear descrito pela Lei de Hooke expressada acima.

Ao acoplar o peso marcado 200, essa mesma distensão dobrada foi observada.

Concluiu-se que, se a marcação de 200 indica a massa do objeto em unidades desconhecidas (provavelmente gramas), então os pesos azul e cor de rosa possuem uma massa m de 100 unidades cada.

Assumindo a massa em gramas e $g = -9.81 \text{ m/s}^2$, podemos calcular a constante k_a da mola a partir dessas medidas:

$$m\vec{a} = -k_a \Delta y_{1a} \Rightarrow k_a = \frac{-m\vec{g}}{\Delta y_{1a}} \Rightarrow k_a = \frac{-0.1 \times -9.81}{0.175} \Rightarrow k_a \approx 5.6 \text{ kg/s}$$



Para a mola (b), foi obtido $\Delta y_{1b} = 15.7 - y_{0b} = 11.8 \pm 0.1$ cm. Podemos então fazer o mesmo para obter sua constante k_b

$$m\vec{a} = -k_b \Delta y_{1b} \Rightarrow k_b = \frac{-m\vec{g}}{\Delta y_{1b}} \Rightarrow k_b = \frac{-0.1 \times -9.81}{0.118} \Rightarrow k_b \approx 8.3 \text{ kg/s}$$

Podemos expressar a Lei de Hooke como a seguinte equação diferencial em função do tempo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Resolvendo a equação diferencial ordinária, obtemos a seguinte fórmula para o deslocamento da massa em função do tempo:

$$\Delta y = \cos(t \times \sqrt{k/m})y_0 + \sin(t \times \sqrt{k/m})y_0/\sqrt{k/m}$$

que pode ser simplificada como

$$\Delta y = A \cos(t \times \sqrt{k/m} + \varphi)$$

Onde A , a amplitude, é o deslocamento máximo a partir da posição de equilíbrio e φ é a posição inicial ocupada pelo sistema no espaço de fase. A quantidade $\sqrt{k/m}$ passa também a ser especialmente relevante por conta da relação $T = 2\pi/\sqrt{k/m}$, onde T é o período de oscilação - isto é, o tempo que a massa leva para retornar à sua posição inicial.

Chamamos essa configuração de Oscilador Harmônico Simples.

Nota-se que a relação $T = 2\pi/\sqrt{k/m}$ independe do estado do sistema em qualquer dado momento, permitindo que ignoremos o estado inicial do sistema e forças externas para obter qualquer uma dessas três quantidades a partir das outras duas.

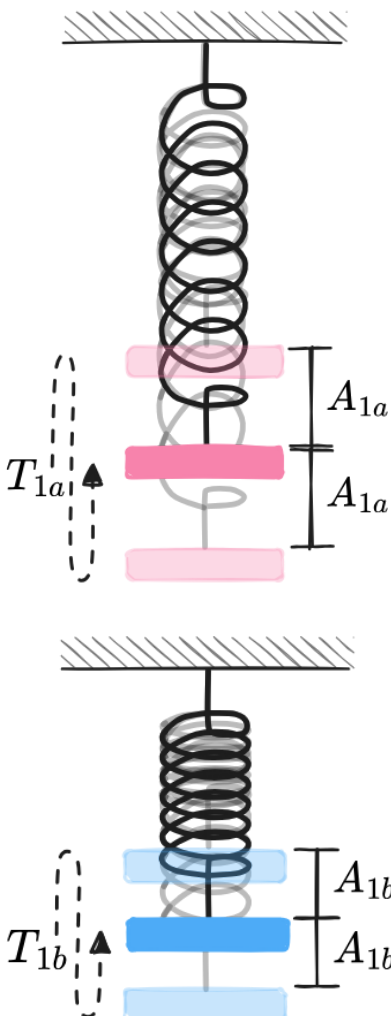
Usando os valores obtidos previamente para k_a e k_b , pode-se então prever valores teóricos T_a e T_b para os pesos de 100g e 200g, respectivamente:

$T_{1a} = 2\pi/\sqrt{k_a/0.1} \approx 0.84s$	$T_{1b} = 2\pi/\sqrt{k_b/0.1} \approx 0.69s$
$T_{2a} = 2\pi/\sqrt{k_a/0.2} \approx 1.19s$	$T_{2b} = 2\pi/\sqrt{k_b/0.1} \approx 0.97s$

Valores condizentes com os obtidos experimentalmente a partir de gravações de vídeo. O erro estimado é obtido a partir da taxa de quadros por segundo do vídeo:

$T_{1a} = 0.85 \pm 0.06s$	$T_{1b} = 0.71 \pm 0.06s$
$T_{2a} = 1.22 \pm 0.06s$	$T_{2b} = 1.02 \pm 0.06s$

Conclui-se que um aumento na massa acoplada a uma mesma mola resulta em um período mais longo de oscilação.



O mesmo pode ser intuitivamente concluído também ao considerar-se a Primeira Lei de Newton, que expressa o conceito de inércia - onde um corpo de maior massa necessita de uma maior força para acelerar ou desacelerar em qualquer dado eixo de movimento.

3 Pêndulo de Torção

3.1 Metodologia

A experimentação do pêndulo de torção, neste caso, dá-se pela análise das suas relações em dois contextos, o pêndulo de torção livre e o pêndulo de torção amortecido, submerso em óleo (**figura 3.1.1**). O pêndulo constitui-se de um suporte onde um fio ligado à ele sustenta um disco com medida dada de 25 cm de diâmetro, logo abaixo do disco há também um disco mais grosso de menor diâmetro que entra em contato com o óleo na segunda parte da experimentação.

O procedimento consiste em torcer o pêndulo por pelo menos 10,0(1) cm da circunferência, para melhor visualização, e mantendo-o na posição inicial para evitar interferências ao máximo: o pêndulo possui uma fita métrica em seu perímetro. Assim, quando o pêndulo é livre para oscilar, o tempo é contado, a partir de um cronômetro, por dez oscilações completas, ou seja, ida e volta. Logo após isto ser feito com o pêndulo de torção, uma vasilha com óleo é colocada abaixo dele, assim, com a parte inferior do pêndulo submersa no óleo repete-se todos os processos anteriores: torção e contagem de tempo.

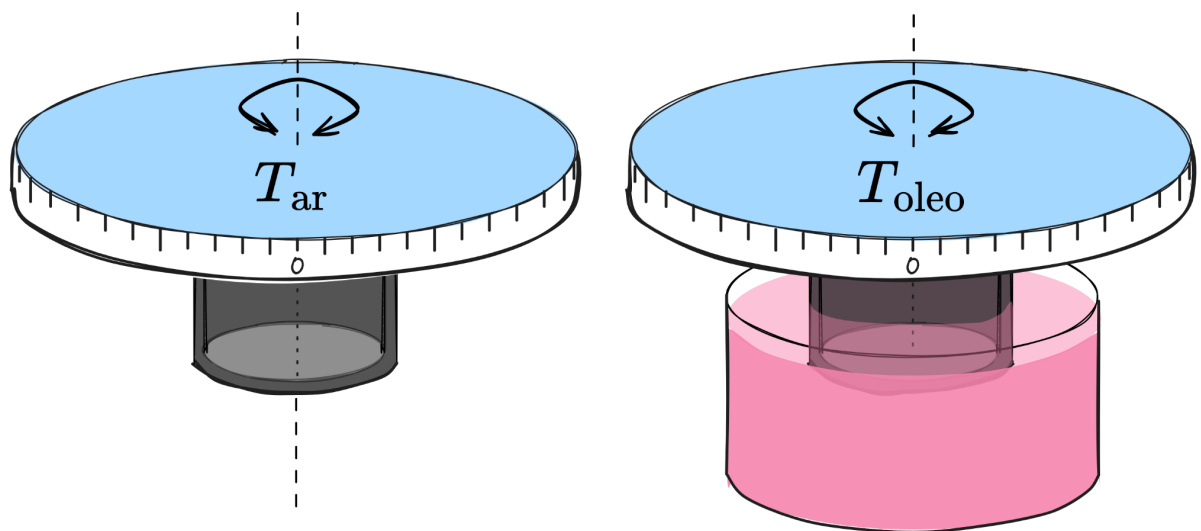


Figura 3.1.1: Pêndulo de torção livre e com óleo

3.2 Resultados e discussão

Este sistema permite a visualização do fenômeno de oscilações, principalmente a sua similaridade com um sistema massa-mola. Quando o disco é girado em torno de seu eixo horizontal, diferente do pêndulo simples, o qual o corpo (ponta do pêndulo) é deslocado da posição de equilíbrio, nesse caso, o fio é deformado e tende voltar ao seu estado inicial dado o torque restaurador gerado, aqui é onde há semelhança com o sistema massa-mola — o que mantém a oscilação do sistema é a força de restauração do material, que resiste às deformações feitas.

A similaridade faz o sistema se comportar como um movimento harmônico simples, ou movimento harmônico amortecido, descrito pela equação $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$, observa-se a constante de mola aparecendo como constante de torção, que ocupa seu lugar.

No geral, as forças envolvidas neste sistema são: torque, força de restauração e atrito. Com isso, podemos tirar que o momento de inércia do disco com a força de restauração da haste descrevem parte dos movimentos observados como frequência (ω) e a própria força de torque (τ).

$$(1) \omega(I, K) = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$(2) \tau = -K\varphi$$

Sendo I momento de inércia, K a força de restauração e φ o ângulo de torção.

Os dados obtidos para dez oscilações do pêndulo simples e amortecido foram, respectivamente, 48,75(1) s e 48,62(2) s. Tendo em mente que a torção inicial foi de 30 cm, em ambos os casos observou-se um fenômeno curioso, os resultados experimentais são extremamente próximos: o esperado pelo grupo era que o pêndulo amortecido por óleo apresentaria maior tempo de oscilação quanto ao pêndulo simples, no entanto, o contrário foi observado.

Comparando os tempos do pêndulo simples e do pêndulo amortecido por óleo, a hipótese levantada pelo grupo é a seguinte:

O fenômeno observado mostra que em regimes pequenos de oscilação o movimento amortecido não gera alterações no tempo total, ou seja, o pêndulo de torção amortecido se comporta como um pêndulo de torção comum.

O esperado para a segunda parte do procedimento é que ele se comportasse, de acordo com as equações de um movimento harmônico amortecido:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0$$

O que é comparável aqui é qual dos três fenômenos de amortecimento se relacionam com o segundo caso do experimento. Sabe-se que existem três tipos de MHA: subamortecimento, amortecimento crítico e superamortecimento. Respectivamente, estes apontam para sistemas que: oscilam com amplitude decrescente, retornam ao equilíbrio no menor tempo sem oscilar e retornam ao equilíbrio lentamente sem oscilar.

O termo β se refere à constante de amortecimento do sistema, que infelizmente não pode ser calculada por falta de dados para a análise, porém há a estimativa de que seja pequena e/ou desprezível visto que durante a oscilação do sistema, apesar de ter havido diminuição leve na amplitude do pêndulo, não houve alteração no tempo total de dez períodos ao se comparar com o pêndulo no ar.

Analiticamente, a frequência amortecida do sistema é dada por:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Sendo a frequência o número de oscilações completas por segundo, quanto maior for o valor da constante de amortecimento do sistema menor será a frequência da oscilação, o que faria a tomada de dado dos dez períodos do pêndulo ser maior no segundo caso. Assim, como em ambos os casos o período foi de aproximadamente 4.8(1) segundos por oscilação, foi tomado que esse valor de atrito é desprezível. Porém, é possível observar que a amplitude do movimento, neste caso, a distância percorrida na circunferência, é gradualmente menor a cada oscilação, pelo atrito entre óleo-pêndulo (ou ar-pêndulo) que atua no sentido contrário do torque do corpo, fazendo-o desacelerar.

Comparando a solução geral do MHS(1) e do MHA(2) e com base nesta análise sobre a força de amortecimento observam-se claramente que os dois fenômenos se aproximam.

$$(1) \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$(2) \theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

O coeficiente exponencial em função de β mostra novamente que este valor é desprezível, uma vez que ambos os procedimentos tiveram resultados iguais.

Por fim, foi possível compreender os fenômenos de MHA e MHS além de demonstrar que eles se aproximam em casos básicos, há a possibilidade de que, se o procedimento fosse feito com um número maior de períodos, o tempo de oscilação e o ângulo de torção seriam alterados de tal maneira de que os dois fenômenos tivessem resultados experimentais distintos.

4 Pêndulo de Wilberforce

4.1 Metodologia

Seu criador, Lionel Robert Wilberforce, trouxe esse experimento à tona pela primeira vez em meados de 1900, no Laboratório Cavendish da Universidade. A proposta de seu experimento era simples: uma mola longitudinal, livre para oscilar verticalmente, acoplada a uma massa cujo momento de inércia é ajustável ao variar d_1 e d_2 , assim como é possível visualizar na **Figura 4.1.1** a seguir:

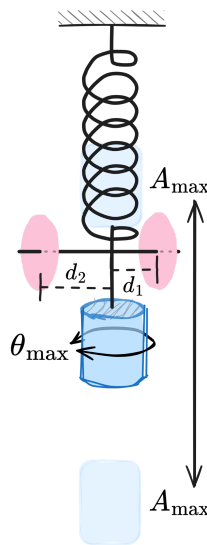


Figura 4.1.1: Pêndulo de Wilberforce.

Assim como Wilberforce, o grupo dispunha de tal aparato para realizar suas experimentações. O processo foi simples: foi garantido (pelos orientadores do experimento) que a distância dos dois pesos da hastes em relação ao centro dela (d_1 e d_2) estivessem exatamente iguais. Esticou-se então a mola até uma distância A_{max} , garantindo apenas a translação vertical do objeto, e em seguida, foi solta. Observou-se que o movimento oscilatório vertical diminuía conforme o surgimento e aumento da amplitude de um movimento rotacional também oscilatório até que este atingisse um ângulo θ_{max} , onde o movimento vertical cessa completamente. O contrário passa então a acontecer até que o movimento seja novamente puramente translacional.

O movimento foi registrado em vídeo com uma taxa de 30 quadros por segundo. A câmera foi mantida exatamente de frente ao pêndulo.

4.2 Resultados e Discussão

Inicialmente, para resolver o problema, o grupo tentou descrever o movimento do sistema a partir de seus dois movimentos oscilatórios: o de torção e o vertical. Esses movimentos foram vistos em torno dos estudos de oscilação e são simples de se descrever individualmente: o torque resultante (ou a força resultante pro movimento vertical) será exatamente igual força restauradora de torção da mola (ou a força conservativa da mola pro movimento vertical), e disso seguem as seguintes equações:

$$I.\ddot{\theta} + \delta.\theta = 0 \quad (1) - \text{Pêndulo de torção}$$

$$m.\ddot{y} + k.y = 0 \quad (2) - \text{Pêndulo vertical}$$

Donde:

I = *Momento de Inércia do Cilindro + Haste + Pesos*

m = *Massa do Cilindro + Haste + Pesos*

δ = *Constante de torção da mola*

k = *Constante de elástica da mola*

θ = *Coordenada da posição do movimento rotacional (angular)*

y = *Coordenada da posição do movimento vertical*

Os dois pontos acima de θ e y representam a segunda derivada em relação ao tempo.

Porém, apesar de serem conhecidas as soluções das duas equações (uma simples EDO com solução senoidal é suficiente), isso ainda é insuficiente para descrever o movimento como um todo, pois tais equações não explicam a alternância entre as oscilações e/ou o acontecimento delas simultaneamente, precisa haver algum termo que corrija o movimento de um pêndulo baseado no movimento de outro. Com isso em mente e a partir de algumas literaturas (referências), é feito um ajuste **empírico**, onde se é adicionado em ambas as equações um coeficiente de acoplamento " ϵ " multiplicado pela coordenada do movimento "contrário" o que explicaria a correção do movimento em ambas (e visto que de fato existe uma mola de torção que alterna o movimento do pêndulo):

$$I.\ddot{\theta} + \delta.\theta + \epsilon.y = 0$$

$$m.\ddot{y} + k.y + \epsilon.\theta = 0$$

Apesar da correção física e matemática na equação proposta pelo grupo, os integrantes não possuem de fato artifícios matemáticos o suficiente para solução deste sistema de equações, mesmo com a ajuda dos artigos encontrados, é insuficiente a o conhecimento de todos para a plena compreensão matemática do problema, portanto a análise do grupo irá se manter em constatar alguns dados qualitativos retirados junto com os supostos resultados dessa equação.

Com a utilização do Software Tracker, as seguintes medidas foram obtidas (escala meramente ilustrativa), a partir da visualização do movimento do pêndulo:

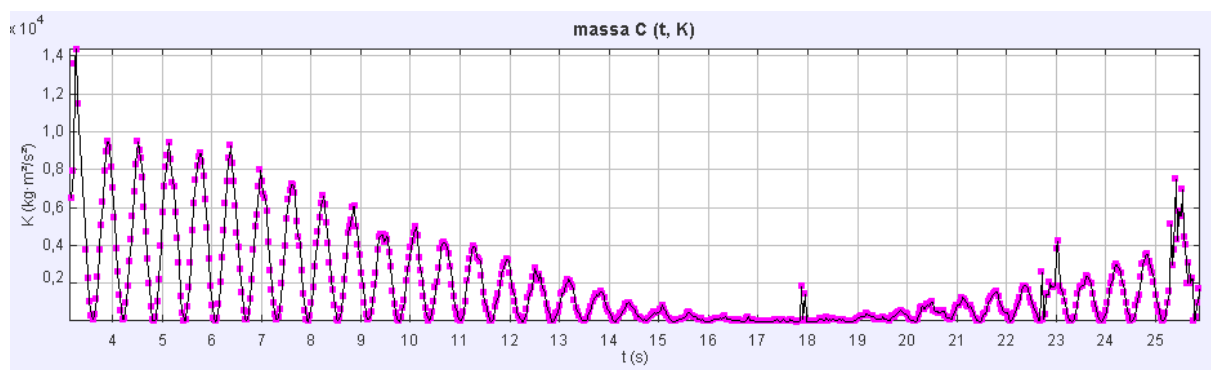


Gráfico 4.2.1: Energia cinética vertical (fora de escala) x tempo (s)

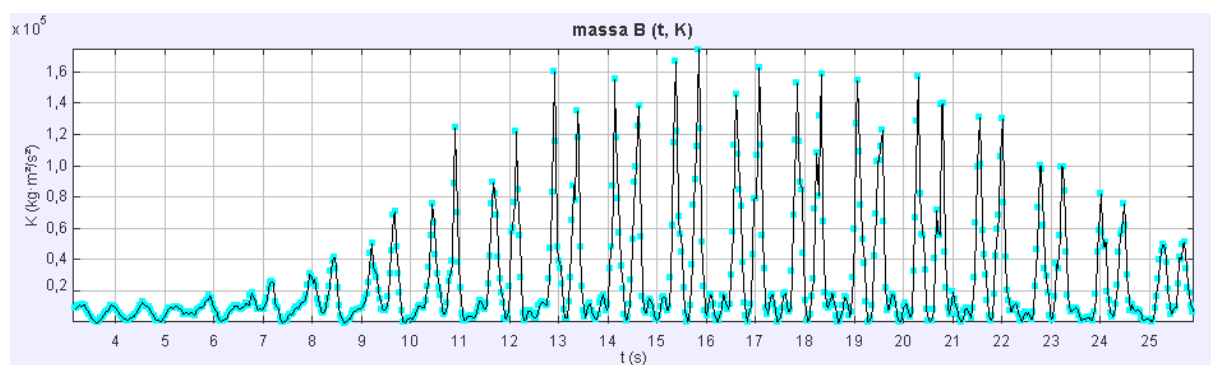


Gráfico 4.2.2: Energia cinética rotacional (fora de escala) x tempo (s)

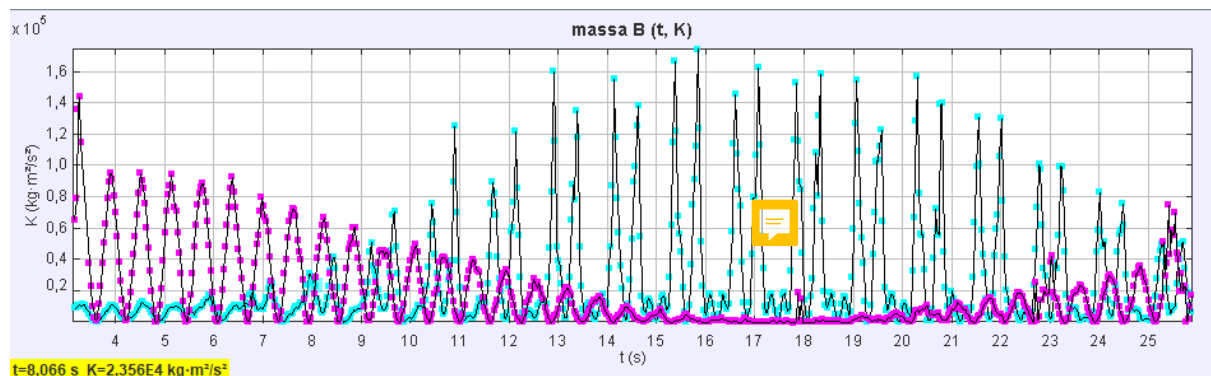


Gráfico 4.2.3: Sobreposição do gráfico 3.2.1 e 3.2.2

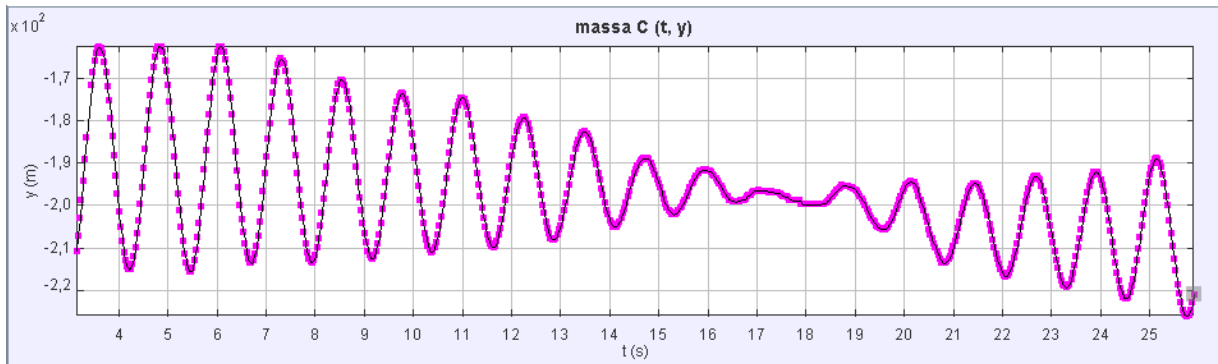


Gráfico 4.2.4: Posição vertical (fora de escala) x tempo (s)

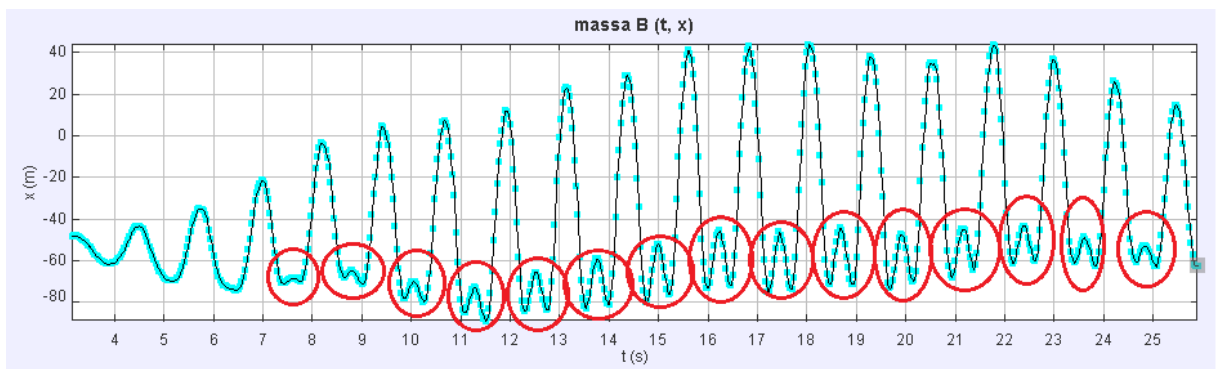


Gráfico 4.2.5: Posição horizontal (fora de escala) x tempo (s)

Os gráficos são diretamente conclusivos: 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3 mostram diretamente que a energia potencial da mola ao soltar o peso é transformada em energia cinética de um movimento que está sendo transmitida para o outro movimento (rotacional para vertical e vice versa) em forma de energia potencial de torção que se torna energia cinética rotacional, tudo isso através da energia de acoplamento que está constantemente troca essas energias, portanto, a energia total do sistema é conservada, o que também era esperado segundo as referências ((1),(2),(3)). Nota-se que a energia do sistema só é transferida em sua plenitude se o sistema estiver em ressonância (ou seja, a frequência natural de oscilação da parte vertical é muito próxima da frequência natural de oscilação da parte de torção), se não estiver de tal maneira, é esperado que o sistema dissipa muito mais energia e fique um pouco mais caótico (5) . Por isso o sistema é dado ao grupo com os pesos a uma distância já fixa dos centros das hastes, pois qualquer alteração nelas alteraria a frequência do sistema de torção, podendo influenciar na ressonância com a parte vertical. Isso decorre diretamente do fato que em um pêndulo de torção, a frequência angular do sistema é dada por $\sqrt{\delta/I}$ (resultado da EDO da equação 1) (veja referências).

Os gráficos 4.2.4 e 4.2.5 são completamente diretos também, nota-se a alternância entre o movimento rotacional e o movimento vertical. Conclui-se ainda que suas frequências são muito próximas e que o sistema está em ressonância, pois os gráficos vão perdendo (ou ganhando) suas amplitudes “devagar”. Apesar do grupo não ter conseguido sobrepor os gráficos, dá para notar uma

diferença de fase maior entre os gráficos de energia do que os gráficos de movimento, o que é condizente visto que o movimento é dado por um senóide e a energia cinética pelo movimento quadrado.

Vale notar que como o grupo gravou o pêndulo apenas de frente, não se obteve um gráfico do movimento angular em si, mas sim do deslocamento horizontal da ponta de uma das hastes, porém é fácil de se notar (e com um pouco de bom senso) que os círculos em vermelho do gráfico 4.2.5 é o movimento rotacional entrando na tela, enquanto os picos mais saltados é o movimento rotacional saindo da tela. No fundo, esse gráfico é a projeção horizontal do movimento rotacional, como em apenas uma dimensão não se tem uma noção de profundidade, parece apenas que o gráfico tem frequência dobrada.

Por último, é possível fazer uma analogia do pêndulo de Wilberforce com uma máquina de lavar! Mas como?

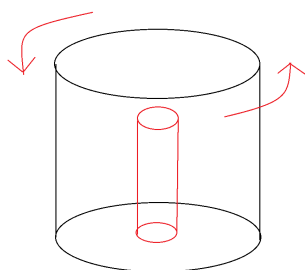


Figura 4.2.1: “Máquina de lavar” ilustrada pelo grupo.

A ideia de uma máquina de lavar é até que bem simples, como ilustrado na figura 4.2.1, é apenas o conjunto de dois tambores cilíndricos, onde o maior (preto) é oco e serve para colocar as roupas dentro e o menor (vermelho) serve para auxiliar no movimento oscilatório angular. Esse movimento oscilatório é realizado por um motor acoplado, através de algumas molas (as quais irão realizar um movimento horizontal/vertical que irá incitar o movimento rotacional na máquina), a esses tambores (Um dos diversos modelos que existem, o grupo está supondo um recente (6)). Sabendo que serão colocadas roupas dentro da máquina, mais certa uma quantidade de água (e alguns produtos de limpeza), isso certamente causará mudanças no momento de inércia do sistema como um todo, mudando assim a frequência angular das rotações durante os ciclos de lavagem e sem um sistema de acoplagem seguro (ou por uso indevido da máquina, como por exemplo, colocar todo peso em apenas um lado dela), a máquina de lavar pode começar a vibrar violentamente (verticalmente e horizontalmente) e até mesmo “sair andando” pela casa no pior dos casos devido a transferência caótica de energia do sistema para as diferentes oscilações que ele se dispõe. Por isso, um bom entendimento do pêndulo de Wilberforce pode ser a chave para um bom engenheiro na hora de se projetar uma máquina de lavar.

5 Molas diferentes e esfera vibrando

Dois sistemas foram tratados: molas helicoidais e cordas. A escolha de analisá-los juntos é devida ao fato de que, apesar de possuírem particularidades, o fenômeno a ser estudado é o mesmo. No caso desta experimentação, foi utilizada uma mola helicoidal e um aparato composto por um brinquedo redondo que vibra acoplado a uma corda. Em ambos os casos, as dimensões dos objetos usados são irrelevantes para a análise a ser feita.

Inicialmente, é importante definir que tipo de onda os dois objetos são capazes de produzir. A corda é apenas capaz de apresentar ondas transversais, ou seja, oscilações perpendiculares à direção de propagação. A mola, por outro lado, consegue produzir ondas transversais e ondas longitudinais, que oscilam na mesma direção da propagação de onda. A **Imagem 5.1** do brinquedo e a **Figura 5.1** de uma mola demonstram de forma didática esses diferentes tipos de propagação de onda.



Imagem 5.1: Produção de ondas em uma corda presa nas suas extremidades. O brinquedo vibra de forma a produzir uma frequência constante na mola. Imagem feita pelo grupo.

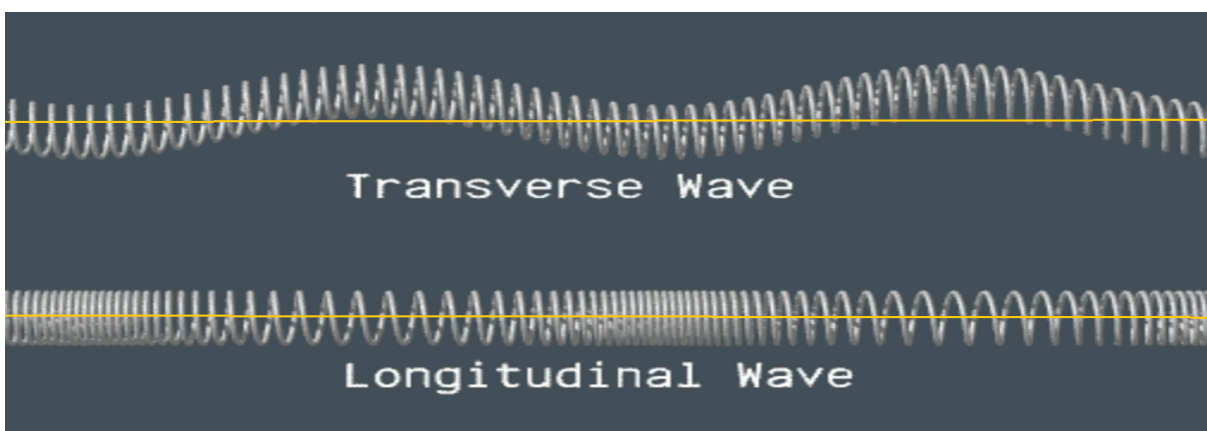


Figura 5.1: Tipos de ondas produzidos por uma mola presa em suas extremidades. A opção do grupo por optar por usar uma figura em vez de imagens reais se dá ao fato de que é mais difícil colocar uma frequência constante a partir de mãos humanas, dessa forma dificultaria a visualização de tais fenômenos.

Fonte: CASA DAS CIÊNCIAS. Ondas numa mola. Disponível em: <https://www.casadasciencias.org/recurso/5916>. Acesso em: 13 maio 2025.

Definindo uma frequência constante e mantendo presas ambas as extremidades dos objetos, observa-se o fenômeno de ondas estacionárias. Este é descrito como uma superposição de duas ondas de mesma frequência, mesma amplitude, mesma direção, mas com sentidos opostos. Os sentidos são opostos porque quando o pulso bate em uma extremidade presa, a onda é refletida. Dessa maneira, há a formação de duas senoidais simétricas opostas.

Dessa forma, temos:

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \text{ e } y_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

Aplicando a superposição:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \Rightarrow y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$$

$$\begin{aligned} \text{Utilizando a relação trigonométrica } \sin(a) + \sin(b) &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \sin(kx)\cos(\omega t) \Rightarrow y(x, t) = 2A \sin(kx)\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Sendo:

$$y(x, t) = \text{Amplitude da onda no ponto } x \text{ e tempo } t$$

$$\sin(kx) = \text{Variação espacial}$$

$$\cos(\omega t) = \text{Variação temporal}$$

$$A = \text{Amplitude máxima}$$

Nesse tipo de onda há pontos chamados ventres, que seriam os pontos de amplitude máxima, e os nós, os pontos de amplitude nula. No primeiro caso há uma interferência construtiva (máxima vibração), no segundo, interferência destrutiva (vibração nula, a amplitude (A) é 0). Com isso, analisando o termo do seno, que descreve a variação espacial da onda, quando há qualquer nó: os nós são os pontos onde a função seno se iguala à 0, portanto, por se tratar de uma função periódica, existem certos valores para seno no qual esse fenômeno é observado:

$$\begin{aligned} \sin(kx) &= 0 \text{ quando } kx = n\pi, \text{ por definição } \Rightarrow \\ &\Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = n \frac{\pi}{k} \Rightarrow x = n \frac{\lambda}{2} \text{ tal que } n \text{ é um inteiro; } n = 1, 2, 3... \\ &\Rightarrow 0, \frac{2}{\lambda}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda... \end{aligned}$$

Sendo:

$$\lambda = \text{Comprimento de onda}$$

$$k = \text{Número de onda}$$

$$n = \text{Número do harmônico}$$

$$x = \text{Posição espacial}$$

Dessa maneira, nos ventres, seno varia entre 1 e -1, continuamente, oscilando entre máximo e mínimo, dado a periodicidade da função trigonométrica seno. Além disso, há formas de se aumentar a quantidade de harmônicos (ou ventres), como ilustrado na **Figura 5.2**, sendo elas o aumento de tensão, diminuição do comprimento e aumentando a frequência de vibração.

A tensão da corda/mola afeta diretamente a velocidade de propagação da onda, a fórmula é dada por $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, a velocidade da onda é diretamente proporcional à raiz quadrada da tensão.

Sendo:

$T = \text{Tensão}$

$\mu = \text{Densidade linear (corda ou mola)}$

$v = \text{Velocidade de propagação}$

Por meio da equação da frequência é possível perceber que esta estabelece uma relação indiretamente proporcional ao comprimento: conforme se aumenta a frequência o comprimento diminui e mais ciclos aparecem no mesmo espaço, vale a recíproca.

A frequência é dada por:

$$f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow \text{como } \lambda = \frac{2L}{n} \Rightarrow f = \frac{vn}{2L} \Rightarrow f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Sendo:

$f = \text{Frequência}$

$v = \text{Velocidade de propagação}$

$\lambda = \text{Comprimento da onda}$

$n = \text{Número do harmônico (ou ventres)}$

$L = \text{Comprimento}$

$\mu = \text{Densidade linear (corda ou mola)}$

$T = \text{Tensão}$

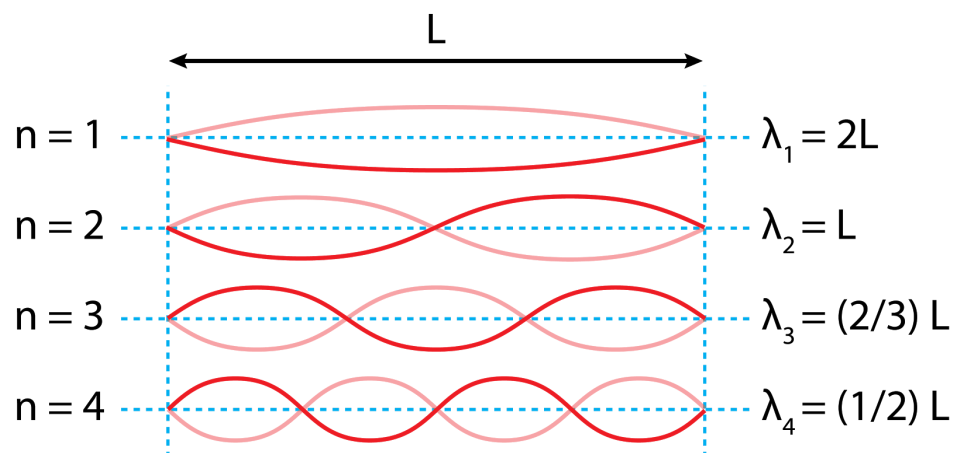


Figura 5.2 – Representação de ondas.

6 Conclusão

Recapitulando os experimentos descritos e as discussões tomadas, o grupo foi capaz de se aprofundar em temas que envolviam movimentos oscilatórios e suas aparições em sistemas de mola, pêndulo e ondas, sendo possível, a partir da observação dos fenômenos, discutir e quantificar os estudos sobre movimento harmônico e ondas estacionárias.

No sistema massa-mola, o grupo se baseou na lei de hook para determinar a constante de duas molas, $k_a \approx 5.6 \text{ k/s}$ e $k_b \approx 8.3 \text{ kg/s}$, e com elas determinadas, foi estudada a dinâmica do sistema entre a força de uma mola e a força gravitacional e a partir disso foi possível chegar em uma equação diferencial que pudesse descrever o comportamento oscilatório do sistema a partir do movimento harmônico simples. A partir da solução da equação diferencial, o grupo foi capaz de determinar os períodos de oscilações das duas molas com dois diferentes pesos, $T_{1a} = 0.85(6)\text{s}$, $T_{1b} = 0.71(6)\text{s}$, $T_{2a} = 1.22(6)\text{s}$, $T_{2b} = 1.02(6)\text{s}$ resultados esses que foram muito próximos dos teóricos, portanto completamente satisfatórios, e com eles foi possível perceber que o aumento da massa do sistema aumenta a oscilação do mesmo.

No pêndulo de torção, o grupo estudou o pêndulo de torção em duas ocasiões diferentes: no meio “ar” e no meio “óleo”, cujos ambos os meios possuem diferentes viscosidades. O grupo foi capaz de achar um equação diferencial que descrevesse o movimento oscilatório dado um meio viscoso, muito semelhante ao experimento anterior, porém com um termo de viscosidade a mais. Apesar do grupo ter achado e desenvolvido tal fórmula, com os dados de oscilação dos dois pêndulos obtidos pelo grupo e a análise teórica, foi possível concluir diretamente que a viscosidade era desprezível em relação a frequência do sistema, alterando apenas a amplitude entre cada oscilação.

No pêndulo de Wilberforce, o grupo identificou que esse experimento é como se fosse uma versão combinada dos dois anteriores: um sistema massa-mola onde a massa na verdade era um pêndulo de torção acoplado à mola que iria além de distender, torcer em si mesma. Apesar do nível de dinâmica ser mais complexo, ainda foi capaz de se observar, mesmo que qualitativamente, a conversão de energia mecânica do sistema e a alternância entre as energias cinéticas e potenciais do mesmo, e como o acoplamento e as equações que descrevem o movimento são a chave para tal compreensão. Por fim, foi feito um paralelo entre esse pêndulo e uma máquina de lavar, e como a ressonância do sistema é essencial para as transformações energéticas serem eficientes e o movimento não se tornar caótico e dissipativo.

Nas molas diferentes e esfera vibrando o grupo estudou e analisou a formação de ondas em diferentes meios e pode concluir como é possível a formação de ondas estacionárias, tal qual sua manipulação matemática.

No geral, os resultados obtidos em todos os experimentos foram condizentes com a teoria estudada e por vezes desafiaram a intuição dos integrantes.

Referências

- (1) UNIVERSITY OF TORONTO. *Wilberforce Pendulum Reference - Berg (2 of 8)*. Disponível em: <https://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforceRefBerg2of8.pdf>. Acesso em: 13 maio 2025.
- (2) UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA. *Wilberforce Pendulum*. Disponível em: <https://phas.ubc.ca/~berciu/TEACHING/PHYS349/Wilberforce.pdf>. Acesso em: 13 maio 2025.
- (3) PHYSICS LAB. *Wilberforce Pendulum*. Disponível em: https://physlab.org/wp-content/uploads/2018/09/Wilberforce_4.pdf. Acesso em: 13 maio 2025.
- (4) WIKIPEDIA. *Wilberforce pendulum*. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Wilberforce_pendulum. Acesso em: 13 maio 2025.
- (5) UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. *Pêndulo de Wilberforce*. Eaulas USP. [Vídeo]. Disponível em: <https://eaulas.usp.br/portal/video?idItem=6530>. Acesso em: 13 maio 2025.
- (6) WIKIPEDIA. *Washing machine*. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Washing_machine. Acesso em: 13 maio 2025.
- (7) INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN. *Módulo 04: Ondas estacionárias*. Disponível em: https://sites.ifi.unicamp.br/graduacao/files/2025/03/Modulo-04_Ondas_Estacionarias.pdf. Acesso em: 13 maio 2025.
- (8) WIKIPÉDIA. *Onda estacionária*. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Onda_estacion%C3%A1ria. Acesso em: 13 maio 2025.
- (9) UNIVERSIDADE DE VALE DO PARAÍBA (UNIVAP). *Apostila de Física Experimental II*. 2022. Disponível em: https://www1.univap.br/irapuan/files/Apostila_FisExpII_IRAPA.pdf. Acesso em: 13 maio 2025.