

PRG0039 Fundamentos da Matemática Elementar

Números Complexos

Anarosa Brandão Fernando Kurokawa



Números Complexos

O conjunto $\mathbb{R}$ foi criado a partir de $\mathbb{Q}$ para que equações do tipo $x^2 - 2 = 0$ tivessem solução.

O conjunto $\mathbb{C}$ (dos números complexos) foi criado a partir de $\mathbb{R}$ para que equações do tipo $x^2 + 2 = 0$ tivessem solução.

Assim: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Definição:

Representa-se por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, cuja forma algébrica é dada por:

$$z = x + yi, \text{ onde } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1 \text{ (} i = \text{unidade imaginária)}$$

Isto é:

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi / x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\} \rightarrow \text{forma algébrica}$$

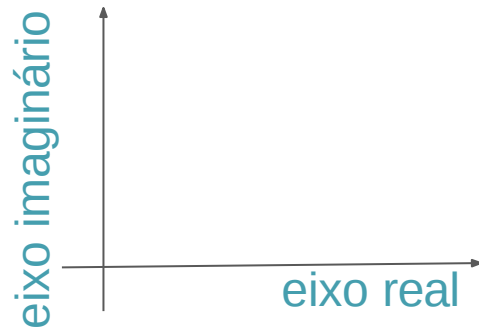
1) Sendo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, define-se:

$$x = \operatorname{Re}(z): \text{ parte real de } z \quad \rightarrow$$

$$y = \operatorname{Im}(z): \text{ parte imaginária de } z$$

$$\operatorname{Re}(3 + 2i) = 3$$

$$\rightarrow \operatorname{Im}(3 + 2i) = 2$$



DEFINIÇÃO

2) $z = x + yi \in \mathbb{C}$

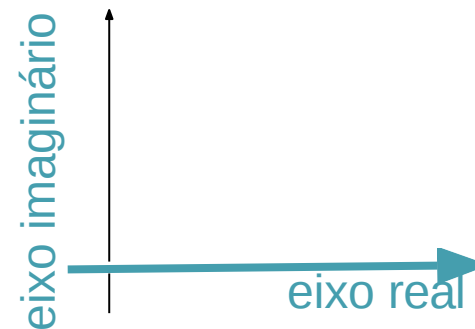
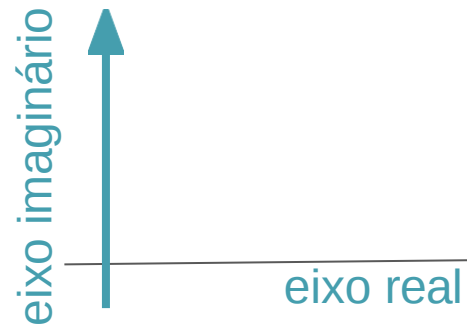
$$y = 0 \rightarrow z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$$

$$x = 0 \rightarrow z = 0 + yi = yi \text{ (imaginário puro)}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, x = x + 0i$

3) Igualdade de complexos:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$



5) Potências da unidade imaginária

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^9 = i^5 \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$$

resto da divisão de 243 por 4

$$\rightarrow i^{243} = i^{4 \cdot 60 + 3} = i^{4 \cdot 60} \cdot i^3 = (i^4)^{60} \cdot i^3 = 1^{60} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$$

Define-se:

Adição: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Multiplicação:

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ \Rightarrow (a + bi) \cdot (c+di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Calcular:

a) $(4+5i) + (7-2i) - (2-6i)$

b) $2(5-2i) - 7(4+i) + 3(2+5i)$

c) $(3+4i) \cdot (5-7i)$

d) $(3+4i)^2$

e) $(6+5i) \cdot (6-5i)$

Determine x e $y \in \mathbb{R}$ para que a igualdade é válida:

(a) $(x + yi) \cdot (2 + 3i) = 1 + 8i$

$$\begin{aligned}(x + yi) \cdot (2 + 3i) &= 1 + 8i \\ 2x + 3xi + 2yi + 3yi^2 &= 1 + 8i \\ 2x - 3y + (3x + 2y)i &= 1 + 8i\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 9x + 6y = 24 \end{cases} \approx \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 9x + 6y = 24 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}4x - 6y &= 2 \rightarrow 13x = 26 \\ \therefore x &= 2 \text{ e } y = 1\end{aligned}$$

Definição:

Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$

- Define-se o conjugado de z , o qual denota-se por $\bar{z}$, como sendo $z = x - yi$, isto é:

$$z = x + yi \Leftrightarrow \bar{z} = x - yi$$

Exemplos:

a) $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$

b) $\overline{1 - 4i} = 1 + 4i$

c) $\overline{3i} = 0 - 3i = -3i$

Propriedades: Considere $z = x + yi$. Então:

(1) $\bar{\bar{z}} = z$

- $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow \bar{\bar{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z$

(2) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \forall z \in \mathbb{C}$

- $z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x = 2\text{Re}(z)$

(3) $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z) \forall z \in \mathbb{C}$

- $z - \bar{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi = 2\text{Im}(z)$

Cont.

$$(4) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(5) \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$(6) \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$(7) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

(8) Se $z \in \mathbb{R}$ então $z = x + 0i$. Daí $\bar{z} = x - 0i = z$.

Sejam $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$ $w \neq 0$ então:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi) \cdot (c-di)}{(c+di) \cdot (c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2 - (di)^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$$

Exercício:

$$\frac{2+3i}{1+4i} = ?$$

Definição: Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Define-se a norma de z , a qual denota-se por $N(z)$, como sendo um número real positivo dado por:

$$N(z) = z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$$

Isto é:

$$N(z) = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

Exemplo: Qual é a norma de $z = 3 + 5i$?

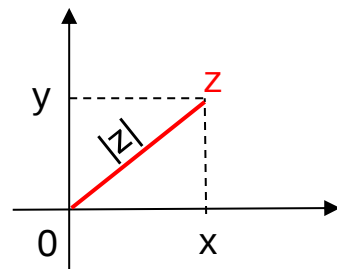
MÓDULO DE UM COMPLEXO

Definição: Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Define-se a módulo de z , o qual denota-se por $|z|$, como sendo o número real positivo dado por:

$$|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

O módulo fornece a distância do ponto (x,y) à origem.



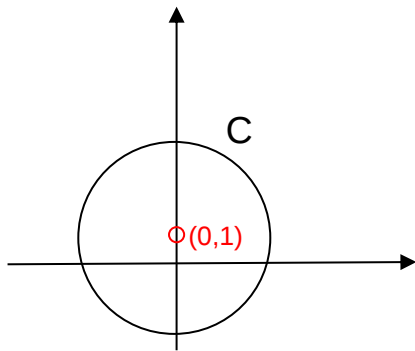
OBSERVAÇÃO: Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Note que se $\bar{z} = x - yi$ então

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Exemplo: Qual é o modulo de $z = 3 - 4i$?

Outras interpretação geométricas

$|z - i| = 3$ significa que:



$z \in C$ (circunferência de centro $(0,1)$ e raio 3):

$$|x + yi - i| = |x + i(y - 1)| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 3$$

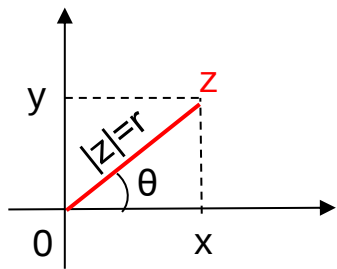
Outras propriedades:

$$(1) \ z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$(2) \ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$(3) \ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Forma Polar



$$\operatorname{Re}(z) = x = r \cos(\theta)$$

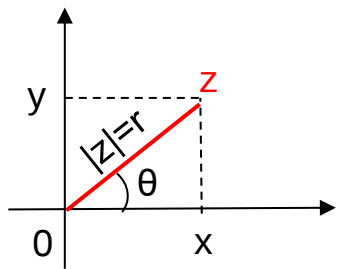
$$\operatorname{Im}(z) = y = r \operatorname{sen}(\theta)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$. A forma polar é dada por $z = r \cos(\theta) + r \operatorname{sen}(\theta)i = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ em que θ é chamado de argumento de z , denotado por $\arg(z)$.

Exemplo: Qual é a forma polar de $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$?

Forma Polar



$$\operatorname{Re}(z) = x = r \cos(\theta)$$

$$\operatorname{Im}(z) = y = r \operatorname{sen}(\theta)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$. A forma polar é dada por $z = r \cos(\theta) + r \operatorname{sen}(\theta)i = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ em que θ é chamado de argumento de z , denotado por $\arg(z)$.

Exemplo: Qual é a forma polar de $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$?

$$\begin{aligned} \bullet \quad r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \bullet \quad x &= r \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \bullet \quad y &= r \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bullet \quad r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \bullet \quad x &= r \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \bullet \quad y &= r \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}} \right\} \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\therefore z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

Exercício: Qual é a forma polar de $\overline{z}$?

Propriedades:

(1) Seja $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1))$ e $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2))$ então:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

(2) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(3) $z^n = (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)), n \in \mathbb{N}$