

Números complexos

1. Efetue as operações indicadas:
 - a) $(6 + 7i)(1 + i)$
 - b) $(5 + 4i)(1 - i) + (2 + i)i$
 - c) $(1 + 2i)^2 - (3 + 4i)$
2. Determine $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ para que se tenha:
 - a) $2 + 3yi = x + 9i$
 - b) $(x + yi)(3 + 4i) = 7 + 26i$
 - c) $(x + yi)^2 = 4i$
3. Dado o número complexo $A = 16 + 4i$, qual é o produto entre esse número e seu conjugado?
4. Calcule o valor de z , para $z = 2 - 2i$, é:
5. Calcule o resultado da divisão:

$$\frac{8 - 2i}{1 + i}$$

Gabarito

1. Operamos com complexos na forma algébrica da mesma maneira que fazemos com expressões algébricas, lembrando apenas que $i^2 = -1$:

a) $(6 + 7i)(1 + i) = 6 + 7i + 6i + 7i^2 = 6 + 7i + 6i - 7 = -1 + 13i$

b) $(5 + 4i)(1 - i) = 5 + 4i - 5i - 4i^2 = 5 + 4i - 5i + 4 = 9 - i$

c) $(1 + 2i)^2 - (3 + 4i) = 1 + 4i + 4i^2 - 3 - 4i = 1 + 4i - 4 - 3 - 4i = -6$

2. Vamos aplicar a definição de igualdade no campo complexo:

$$a + \beta i = \gamma + \delta i \Rightarrow a = \gamma \text{ e } \beta = \delta$$

a)

$$2 + 3yi = x + 9i \Rightarrow \begin{cases} 2 = x \\ 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 3$$

b)

$$(3x - 4y) + (4x + 3y)i = 7 + 26i \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 4x + 3y = 26 \end{cases}$$

E, resolvendo o sistema, temos $x = 5$ e $y = 2$.

c)

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 4i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Da primeira equação tiramos $x = \pm y$ e substituímos na segunda:

$$2(\pm y)y = 4 \Rightarrow \pm y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

Portanto $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$.

3. Sabemos que o produto de um número complexo A e seu conjugado $\overline{A}$ é dado pelo quadrado do módulo de A .

O número complexo $A = 16 + 4i$, e seu conjugado é $\overline{A} = 16 - 4i$.

Calculamos o produto:

$$A \cdot \overline{A} = (16 + 4i)(16 - 4i)$$

Utilizamos a propriedade da diferença de quadrados:

$$A \cdot \overline{A} = 16^2 - (4i)^2$$

Como $i^2 = -1$, temos:

$$A \cdot \overline{A} = 16^2 - 4^2(-1) = 256 + 16 = 272.$$

O produto entre A e $\overline{A}$ é:

$$\boxed{272}$$

A alternativa correta é: **b**).

4. Para calcular z^8 , para $z = 2 - 2i$, vamos usar a fórmula de De Moivre:

$$z^n = (r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Primeiro, escrevemos z em sua forma polar:

1. **Módulo de z :

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2. **Argumento de z :

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Assim, podemos escrever z na forma polar como:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Agora, aplicamos a fórmula de De Moivre para z^8 :

$$z^8 = (2\sqrt{2})^8 \left(\cos\left(8 \cdot -\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8 \cdot -\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

3. **Cálculo do módulo $(2\sqrt{2})^8$:

$$(2\sqrt{2})^8 = 2^8 \cdot (\sqrt{2})^8 = 256 \cdot 16 = 4096$$

4. **Cálculo do argumento $8 \cdot -\frac{\pi}{4}$:

$$8 \cdot -\frac{\pi}{4} = -2\pi$$

Como $\cos(-2\pi) = 1$ e $\sin(-2\pi) = 0$, temos:

$$z^8 = 4096 \cdot (1 + 0i) = 4096$$

Portanto, $z^8 = 4096$.

5. Para calcular a divisão entre os números complexos $\frac{8-2i}{1+i}$, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, que é $1-i$:

$$\frac{8-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(8-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

Vamos resolver o numerador e o denominador separadamente.

$$\begin{aligned}(8 - 2i)(1 - i) &= 8 \cdot 1 - 8 \cdot i - 2i \cdot 1 + 2i \cdot i \\ &= 8 - 8i - 2i + 2i^2\end{aligned}$$

Sabemos que $i^2 = -1$, então:

$$\begin{aligned}&= 8 - 8i - 2i + 2(-1) \\ &= 8 - 10i - 2 = 6 - 10i\end{aligned}$$

$$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Agora substituímos o numerador e o denominador:

$$\frac{8 - 2i}{1 + i} = \frac{6 - 10i}{2} = 3 - 5i$$

Portanto, o resultado da divisão é:

$$3 - 5i$$