PTC3424 - Processamento Digital de Sinais

Aula 11: A Série de Fourier Discreta (SFD) e suas propriedades

Prof. Marcio Eisencraft

EPUSP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Abril 2025

Sumário

Sumário

Bibliografia Básica

Principais referências:

- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S. *Sinais e Sistemas*, 2ª edição, Pearson, 2010.
  - Capítulo 3, Seções 3.6 e 3.7.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.
  - Capítulo 10.

Outras fontes recomendadas:

- OPPENHEIM, A.V.; SCHAFER, R. W. Processamento em tempo discreto de sinais, 3a edição, Pearson, 2012.
  - Seções 8.1 e 8.2.
- Notas de aula da Profa. Maria D. Miranda sobre a SFD disponível no e-disciplinas.
- Colab com exemplos da aula.

Sumário

Caminho para uma Transformada de Fourier Discreta

- Apesar de sua utilidade, a TFTD $X\left(e^{j\omega}\right)$ de um sinal $x[n]$ tem alguns inconveniências importantes, a começar pelo fato de ser um sinal contínuo na frequência.
- Assim, ela é complicada de trabalhar computacionalmente, dificultando processamentos que poderiam ser feitos no domínio da frequência.
- Precisamos da definição de uma transformada de Fourier que seja discreta. Ou seja, dado um sinal de tempo discreto $x[n]$, queremos obter uma representação espectral $X[k]$ que seja uma sequência também.
- Esta será a Transformada de Fourier Discreta (TFD ou DFT), um dos algoritmos mais importantes do PDS e que está por trás de muitas e muitas aplicações práticas.
- Para chegar lá, vamos começar, na aula de hoje, tratando especificamente de sinais periódicos, para os quais definiremos uma Série de Fourier Discreta. Este será o embrião para a TFD à qual chegaremos nas próximas aulas.

Sumário

Série de Fourier Discreta (SFD)

- Seja $\tilde{x}[n]$ uma sequência periódica de período fundamental N, ou seja,

$$\tilde{x}[n+N] = \tilde{x}[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

  e N é o menor inteiro positivo que satisfaz esta relação. Definimos na Aula 03 a frequência fundamental deste sinal como $\omega_0 \triangleq \frac{2\pi}{N}$.
- Da mesma forma como você aprendeu em Sistemas e Sinais para sinais de tempo contínuo, podemos representar $\tilde{x}[n]$ por uma soma de exponenciais complexas da forma

$$\tilde{x}[n] = \sum_k \tilde{X}[k] \left(e^{j\omega_0 k}\right)^n$$

- Porém, há uma diferença importante entre o caso contínuo e o discreto. No primeiro pode ser necessário um número infinito de componentes exponenciais para representar o sinal.

Série de Fourier Discreta (SFD)

- No caso discreto, porém, só existem N exponenciais complexas $\left(e^{j\omega_0 k}\right)^n$ diferentes já que

$$\left(e^{j\omega_0(k+\ell N)}\right)^n = \left(e^{j\omega_0 k}\right)^n \cdot e^{j2\pi\ell n} = \left(e^{j\omega_0 k}\right)^n$$

- Assim, os coeficientes $\tilde{X}[k]$ e $\tilde{X}[k+\ell N]$ representam a mesma frequência e podemos escrever simplesmente

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \tilde{X}[k] \left(e^{j\omega_0 k}\right)^n \tag{1}$$

- O símbolo $k =< N >$ significa que a somatória pode ser feita sobre qualquer conjunto de N valores de k (0 a $N-1$, $-N/2$ a $N/2-1$ para N par, etc.): apenas N coeficientes são necessários para qualquer $\tilde{x}[n]$!

Série de Fourier Discreta (SFD)

- A SFD de uma sinal com período N tem exatamente N coeficientes complexos.

Importante: Ortogonalidade das exponenciais complexas discretas

Considere a função:

$$a[k] \ = \ \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\,\frac{2\pi}{N}\,k\,n}.$$

(a) Demonstre que $a[k] = N$ para $k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \ldots$.

(b) Demonstre que $a[k] = 0$ sempre que k não é um inteiro múltiplo de N. *Dica:* Use a fórmula da soma da PG finita para mostrar o resultado.

(c) Repita os itens (a) e (b) se

$$a[k] \ = \ \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j\,(2\pi/N)\,k\,n},$$

modificando adequadamente a demonstração.

A SFD inversa

Multiplicando ambos os membros de (1) por $e^{-jr\omega_0 n}$ e somando sobre N parcelas,

$$\begin{aligned}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n]\, e^{-j\, r\, \omega_0\, n} &= \sum_{n=\langle N\rangle} \sum_{k=\langle N\rangle} \tilde{X}[k]\, e^{j\, k\, \omega_0\, n}\, e^{-j\, r\, \omega_0\, n} \\ &= \sum_{n=\langle N\rangle} \sum_{k=\langle N\rangle} \tilde{X}[k]\, e^{j\,(k-r)\,\omega_0\, n}\end{aligned}$$

Trocando a ordem do somatório no membro direito, temos:

$$\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n]\, e^{-j\, r\, \omega_0\, n} = \sum_{k=\langle N\rangle} \tilde{X}[k] \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j\,(k-r)\,\frac{2\pi}{N}\, n}. \tag{3.92}$$

Do exercício do slide anterior, a soma mais interna em n é zero, a menos que $k - r = 0$ ou um múltiplo inteiro de N. Assim,

$$\tilde{X}[r] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n]\, e^{-j\, r\, \frac{2\pi}{N}\, n}. \tag{3.93}$$

Par SFD

Forma usual: Na literatura de PDS costuma-se utilizar $\boxed{W_N \triangleq e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$
Assim, temos o seguinte par SFD

Par SFD

Dado $\tilde{x}[n]$ periódico com período fundamental N,

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \tilde{X}[k]\, W_N^{-k\,n}$$

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]\, W_N^{k\,n}$$

Sumário

Propriedades importantes da SFD

(A) Linearidade

Linearidade

Sejam $\tilde{x}_1[n] \overset{SFD}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_1[k]$ e $\tilde{x}_2[n] \overset{SFD}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_2[k]$ de mesmo período N. Então, para constantes escalares a e b,

$$a\,\tilde{x}_1[n] + b\,\tilde{x}_2[n] \overset{SFD}{\longleftrightarrow} a\,\tilde{X}_1[k] + b\,\tilde{X}_2[k].$$

Demonstração:

- Basta substituir $x[n] = a\,\tilde{x}_1[n] + b\,\tilde{x}_2[n]$ na expressão:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

- Distributividade da soma e fatoração de a, b permitem separar os termos, resultando em

$$a\,\tilde{X}_1[k] + b\,\tilde{X}_2[k].$$

Propriedades importantes da SFD

(B) Deslocamento no Tempo

Deslocamento no tempo

Se $\tilde{x}[n] \overset{SFD}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$, então

$$\tilde{x}[n-n_0] \quad \overset{SFD}{\longleftrightarrow} \quad \tilde{X}[k]\, W_N^{kn_0}.$$

Demonstração (Esboço):

- Defina $\tilde{y}[n] = \tilde{x}[n-n_0]$ que tem o mesmo período: $\tilde{y}[n+N] = \tilde{y}[n]$.
- Calcule a SFD:
$$\tilde{Y}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{y}[n]\, W_N^{k\,n}.$$
- Substituindo $\tilde{y}[n] = \tilde{x}[n-n_0]$ e fazendo mudança de variável, obtém-se o fator de fase $W_N^{k\,n_0}$.

Propriedades importantes da SFD

(C) Convolução Cíclica

Sejam duas sequências periódicas $\tilde{x}_1[n]$ e $\tilde{x}_2[n]$ de período N, com SFD $\tilde{X}_1[k]$ e $\tilde{X}_2[k]$, respectivamente. Definimos a convolução circular ou cíclica ou periódica como

$$\boxed{\tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n] \triangleq \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\, \tilde{x}_2[n-m].}$$

Então,

$$\boxed{\tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n] \stackrel{SFD}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_1[k] \cdot \tilde{X}_2[k].}$$

$$\boxed{\tilde{x}_1[n] \cdot \tilde{x}_2[n] \stackrel{SFD}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}\tilde{X}_1[k] \circledast \tilde{X}_2[k].}$$

Demonstração: Seção 8.2.5 do PTDS do Oppenheim.

Outras propriedades da SFD (material Profa. M. Miranda)

Propriedade	$\tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k)$
Simetria	$\tilde{x}^*(n)$	$\tilde{X}^*(-k)$
	$\tilde{x}^*(-n)$	$\tilde{X}^*(k)$
	$\mathrm{Re}\{\tilde{x}(n)\}$	$\frac{1}{2}\left(\tilde{X}(k)+\tilde{X}^*(-k)\right)$
	$j\mathrm{Im}\{\tilde{x}(n)\}$	$\frac{1}{2}\left(\tilde{X}(k)-\tilde{X}^*(-k)\right)$
	$\frac{1}{2}\left(\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)\right)$	$\mathrm{Re}\{\tilde{X}(k)\}$
	$\frac{1}{2}\left(\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)\right)$	$j\mathrm{Im}\{\tilde{X}(k)\}$
Linearidade	$a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)$	$a\tilde{X}_1(k)+b\tilde{X}_2(k)$
Deslocamento	$\tilde{x}(n-m)$	$W_N^{km}\tilde{X}(k)$
	$W_N^{-\ell n}\tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k-\ell)$
Dualidade	$\tilde{X}(n)$	$N\tilde{x}(-k)$
Convol. Periódica	$\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$	$\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$
Modulação	$\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\tilde{X}_1(\ell)\tilde{X}_2(k-\ell)$

- Igualdade de Parseval:

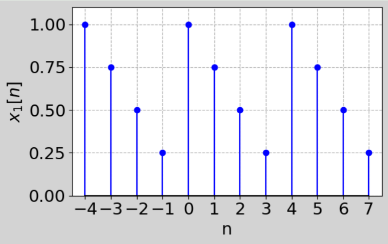
$$\sum_{n=0}^{N-1}|\tilde{x}(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\tilde{X}(k)|^2.$$

Sumário

Exemplos

Exemplo 1: Convolução cíclica com $N = 4$

Seja o $\tilde{x}_1[n]$ mostrado a seguir.



Determinar

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_1[n].$$

```
x = np.array([1.0, 0.75, 0.5, 0.25])
X = np.fft.fft(x)
Y = X * X
cconv_fft = np.fft.ifft(Y)
Convolucao circular (cconv) = [1.625 1.75  1.625 1.25 ]
```

Exemplo 2: SFD de uma senoide

Seja

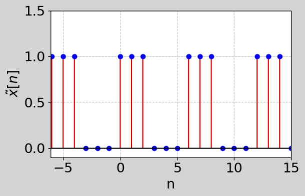
$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{8} + \phi\right).$$

Encontre a representação por SFD deste sinal.

Exemplos

Exemplo 3: SFD de uma onda quadrada

Encontre os coeficientes da SFD para a onda quadrada com $N = 6$ da figura.

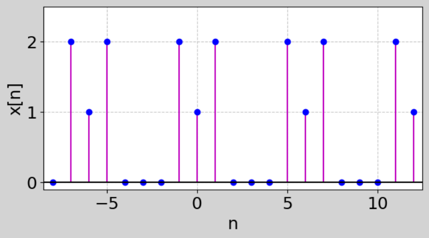



```
x_period = np.array([1, 1, 1, 0, 0, 0], dtype=float)
N = len(x_period)
X = np.fft.fft(x_period)
for k in range(N):
    print(f"  k={k}: X[{k}] = {X[k]:.4f}")
Serie de Fourier Discreta (coeficientes X[k]):
  k=0: X[0] = 3.0000+0.0000j
  k=1: X[1] = 1.0000-1.7321j
  k=2: X[2] = 0.0000+0.0000j
  k=3: X[3] = 1.0000+0.0000j
  k=4: X[4] = 0.0000+0.0000j
  k=5: X[5] = 1.0000+1.7321j
```

Exemplos

Exemplo 4: SFD de sinal par

Determine os coeficientes da SFD para o sinal periódico na figura a seguir.




```
x_period = np.array([1, 2, 0, 0, 0, 2], dtype=float)
N = len(x_period)
X = np.fft.fft(x_period)
for k in range(N):
    print(f"  k={k}: X[{k}] = {X[k]:.4f}")
Serie de Fourier Discreta (coeficientes X[k]):
  k=0: X[0] = 5.0000+0.0000j
  k=1: X[1] = 3.0000+0.0000j
  k=2: X[2] = -1.0000+0.0000j
  k=3: X[3] = -3.0000+0.0000j
  k=4: X[4] = -1.0000+0.0000j
  k=5: X[5] = 3.0000+0.0000j
```