PTC3424 - Processamento Digital de Sinais

Aula 10: Amostragem de sinais de tempo contínuo

Prof. Marcio Eisencraft

EPUSP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Abril 2025

Sumário

Sumário

Bibliografia Básica

Principais referências:

- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S. *Sinais e Sistemas*, 2ª edição, Pearson, 2010.
    - Capítulo 7.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.
    - Capítulo 8.

Outras fontes recomendadas:

- OPPENHEIM, A.V.; SCHAFER, R. W. Processamento em tempo discreto de sinais, 3a edição, Pearson, 2012.
    - Seções 4.0 a 4.3.
- Página da Wikipedia sobre o Teorema da Amostragem, sobre o zero-order-hold, sobre o first-order-hold e outras.

Sumário

Sinais de Tempo Contínuo Amostrados

- Muitos sinais do mundo real são de tempo contínuo e analógicos e precisam ser convertidos em sinais de tempo discreto e digitais pelos processos de amostragem e digitalização para podermos aplicar as técnicas de PDS.
- Isso é feito com um conversor A/D, seguido de processamento digital e posterior reconstrução (conversão D/A).
- A análise de Fourier permite descrever os efeitos da amostragem no domínio da frequência, analisar seus efeitos e então planejar a operação de reconstrução.
- Neste curso, assumiremos um número suficientemente grande de níveis de digitalização de forma que seu efeito sobre os sinais discretos seja desprezível. Ou seja, estudaremos apenas o processo de amostragem e reconstrução dos sinais.

Sumário

Transformada de Fourier de Tempo Contínuo

- Seja $x_a(t)$ um sinal de tempo contínuo integrável em módulo.
- Você já aprendeu que a sua transformada de Fourier de tempo contínuo (TFTC) é dada por

$$\boxed{X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t}dt}$$

em que Ω e uma frequência analógica em radianos/s.

- A TFTC inversa é

$$\boxed{x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega}$$

- Analogamente à TFTD, o espectro contínuo fornece uma representação completa da informação em frequência.

Alguns resultados necessários [Oppenheim, S&S, Cap. 4]

Propriedade da Convolução (TFTC)

- Convolução contínua $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$
- Multiplicação no tempo:

$$\boxed{x(t) \cdot h(t) \quad \xleftrightarrow{\text{TFTC}} \quad \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * H(j\Omega)}$$

- TFTC de um pente de impulsos:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad \xleftrightarrow{\text{TFTC}} \quad \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \quad \text{com } \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}}$$

- Propriedade da mudança de escala:

$$\boxed{x(at) \xleftrightarrow{\text{TFTC}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\Omega}{a}\right) \;\; (a \neq 0)}$$

Sumário

Amostragem

- Seja $x_a(t)$ um sinal e $X_a(j\Omega)$ sua TFTC.
- Vamos amostrá-lo com período de amostragem T_S (frequência de amostragem $f_S = 1/T_S$). Em outras palavras, geramos o sinal de tempo discreto:

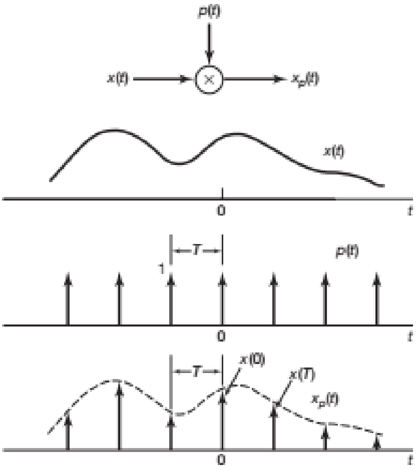
$$x[n] = x_a(nT_S)$$

- Vamos mostrar [vide lousa e Oppenheim, DTSP, Seção 4.2] que a TFTD do sinal amostrado é dada por:

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_S} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left(\frac{\omega}{T_S} - \frac{2\pi\ell}{T_S}\right)\right).}$$

- Isso mostra que o espectro contínuo é replicado a cada 2π no domínio discreto.
- A fórmula acima é conhecida como fórmula do "aliasing". As frequências analógicas e digitais são relacionadas por T_S:

$$\boxed{\omega = \Omega T_S}$$



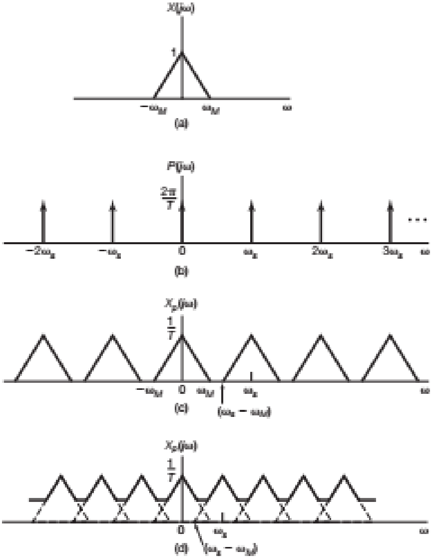


Figura 7.2 Amostragem com trem de impulsos.

Sumário

É possível obter $x_a(t)$ a partir de $x[n]$?

- É possível recuperar a transformada de Fourier $X_a(j\Omega)$ de $X(e^{j\omega})$ (ou, equivalentemente, o sinal $x_a(t)$ a partir de $x[n]$) se as infinitas réplicas de $X_a(j\Omega)$ não se sobrepuserem para formar $X(e^{j\omega})$. Isto pode ocorrer para sinais de banda limitada.

Sinais de tempo contínuo de banda limitada

Existe uma frequência angular finita Ω_M, tal que $X_a(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_M$. A frequência $F_M = \frac{\Omega_M}{2\pi}$ é chamada de largura de banda do sinal em Hz.

- Da figura do Slide 12, se $\Omega_M T_S < \pi$, ou $\frac{F_s}{2} > F_M$, então:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s} \cdot X_a\left(j\left(\frac{\omega}{T_s}\right)\right) \quad \text{para} \quad -\pi < \omega < \pi$$

o que leva ao teorema da amostragem.

Teorema da Amostragem

Teorema de Whittaker–Nyquist–Shannon (1915)

Se $x_a(t)$ é limitado em banda, com largura de banda F_M, ele pode ser reconstruído a partir de $x[n] = x_a(nT_S)$ se:

$$\boxed{F_S > 2F_M}$$

- A mínima frequência de amostragem que permite a reconstrução é chamada de frequência de Nyquist F_N: $F_N = 2F_M$.
- A máxima frequência representável após amostragem é $F_S/2$ que equivale a $\omega = \pi$.
- Se $x_a(t)$ for amostrado com $F_S < F_N$, não é possível a reconstrução perfeita. Ocorre o fenômeno chamado de aliasing.

Exercício importante!

1. Mostre e estude com todo detalhe através de gráficos o processo de amostragem de um sinal de tempo contínuo cuja TFTC tem forma triangular em $|\Omega| < \Omega_0$, nos casos $F_S > 2F_o$ e $F_S < 2F_o$. Este processo foi realizado na lousa durante a aula!

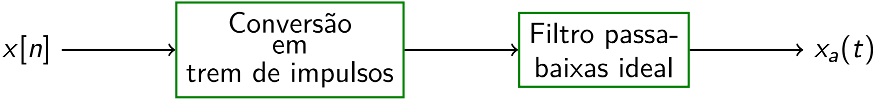
Reconstrução a partir das amostras

- A partir do teorema da amostragem e dos exemplos, vemos que se amostrarmos um sinal de banda limitada $x_a(t)$ acima de sua taxa de Nyquist, podemos reconstruí-lo a partir de suas amostras $x[n]$.
- Esta reconstrução pode ser pensada como um processo de dois passos:

1. Primeiro as amostras são convertidas em um trem ponderado de impulsos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT_S) = \cdots + x[-1]\delta(t+T_S) + x[0]\delta(t) + x[1]\delta(t-T_S) + \cdots$$

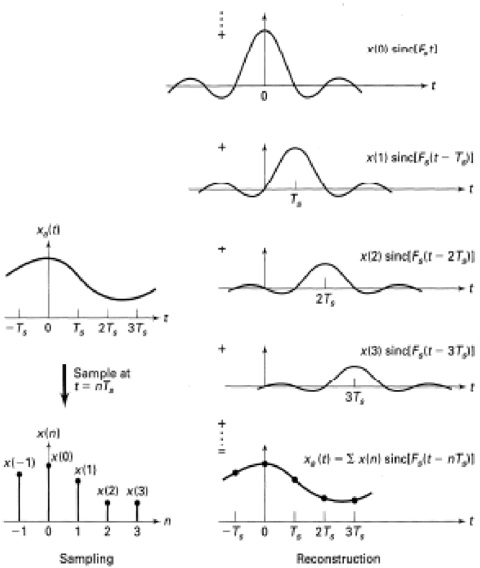
2. Em seguida, este trem de impulsos é filtrado através de um filtro passa-baixas ideal limitado em banda a $\left[-\frac{F_S}{2}, \frac{F_S}{2}\right]$.



Reconstrução ideal

- Como a resposta ao impulso de um filtro passa-baixas ideal tem o formato de sinc(·), o sinal reconstruído de forma ideal pode ser escrito como

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\mathrm{sinc}\left(F_S(t - nT_S)\right)}$$



Sumário

Reconstrução real

- A interpolação ideal não é realizável: filtro necessário é não causal ($h(t)$ estende-se de mais a menos infinito).
- Outra interpretação: preciso da interpolação de todas as amostras de modo a calcular $x_a(t)$ em qualquer ponto.
- Na prática, precisamos de uma abordagem diferente:o processo em duas etapas é possível de ser realizado desde que o filtro passa-baixas ideal seja substituído por um filtro passa-baixas prático.

Interpolação de ordem zero ("Zero-Order-Hold (ZOH)")

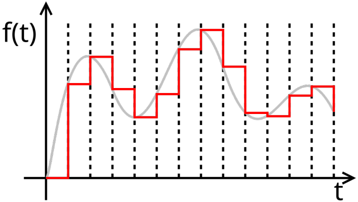
- Nesta interpolação uma dada amostra é mantida na saída pelo intervalo de amostragem até que a próxima amostra seja recebida:

$$\hat{x}_a(t) = x[n], \quad nT_s \leq t < (n+1)T_s$$

- É obtido filtrando o trem de impulsos por um filtro interpolador da forma:

$$h_{ZOH}(t) = \begin{cases} 1/T_S, & 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

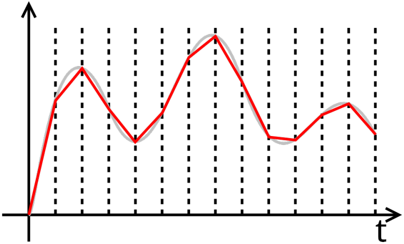
- O sinal resultante é uma forma de onda constante por partes (escada).



(B) Interpolação de ordem um (First-Order-Hold, FOH)

- Neste caso, as amostras adjacentes são ligadas por uma linha reta.
- Ou seja, $\hat{x}_a(t)$ é uma **interpolação linear** entre valores consecutivos de $x[n]$. É o que você obtém ao usar o `plot` no Python, por exemplo.
- Pode ser obtido filtrando o trem de impulsos por:

$$h_{\mathrm{FOH}}(t) = \frac{1}{T_S}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T_S}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T_S}\left(1 - \frac{|t|}{T_S}\right), & \text{se } |t| < T_S, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

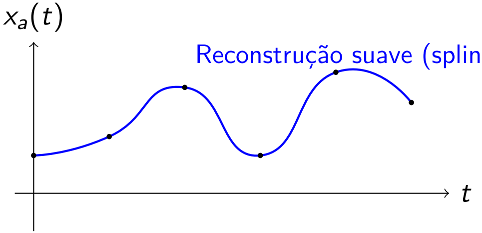


(C) Interpolação "spline" cúbica

- Esta abordagem usa "splines" interpolantes para uma estimativa mais suave, mas não necessariamente mais correta dos sinais analógicos entre as amostras.
- A reconstrução mais suave é obtida usando um conjunto de polinômios de terceiro grau contínuos por partes chamados *spline* cúbicos dados para $nT_s \leq t < (n+1)T_s$ por

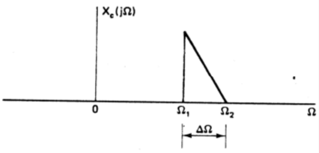
  $$x_a(t) = \alpha_0[n] + \alpha_1[n]\,(t - nT_s) + \alpha_2[n]\,(t - nT_s)^2 + \alpha_3[n]\,(t - nT_s)^3,$$

  em que $\{\alpha_i[n], 0 \leq i \leq 3\}$ são os coeficientes do polinômio, determinados usando análise dos mínimos quadrados das amostra.



Exercício

Um sinal de tempo contínuo passa-banda complexo $x_a(t)$ tem transformada de Fourier mostrada a seguir em que $(\Omega_2 - \Omega_1) = \Delta\Omega$.



Este sinal é amostrado para produzir a sequência $x[n] = x_a(nT_s)$.

(a) Esboce a TFTD $X(e^{j\omega})$ da sequência $x[n]$ para $T_s = \frac{\pi}{\Omega_2}$.

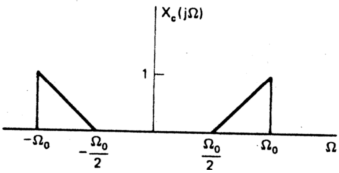
(b) Qual é a maior frequência de amostragem que pode ser usada sem que ocorra "aliasing", isto é, de forma que $x_a(t)$ possa ser recuperado a partir de $x[n]$?

(c) Desenhe um diagrama de blocos de um sistema que pode ser usado para recuperar $x_a(t)$ de $x[n]$.

RESPOSTA: (b) $F_S < \frac{\Delta\Omega}{2\pi}$.

Exercício

Um sinal analógico $x_a(t)$ com transformada de Fourier $X_a(j\Omega)$ mostrada na figura a seguir, é amostrado com um período de amostragem T_s para formar a sequência $x[n] = x_a(nT_s)$.



(a) Esboce a TFTD $X(e^{j\omega})$ para $T_s = \frac{\pi}{\Omega_0}$.

(b) O sinal $x[n]$ deve ser transmitido por um canal digital. No receptor, o sinal $x_a(t)$ deve ser recuperado. Desenhe um diagrama de blocos do sistema de recuperação e especifique suas características.

(c) Em termos de Ω_0, para qual intervalo de valores de T_s podemos recuperar $x_a(t)$ a partir de $x[n]$?