

PTC3424 - Processamento Digital de Sinais

Aula 9: A Transformada de Fourier de Tempo Discreto - TFTD

Prof. Marcio Eisencraft

EPUSP

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Abril 2025

1 Bibliografia

2 A Transformada de Fourier de tempo Discreto (TFTD)

1 Bibliografia

2 A Transformada de Fourier de tempo Discreto (TFTD)

Principais referências:

- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S. *Sinais e Sistemas*, 2ª edição, Pearson, 2010.
 - Capítulo 5.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.
 - Capítulo 10.

Outras fontes recomendadas:

- [Colab](#) com os exemplos da aula.
- Demonstração de algumas propriedades da TFTD pela Profa. Maria D. Miranda, disponível no e-disciplinas.

1 Bibliografia

2 A Transformada de Fourier de tempo Discreto (TFTD)

Definição da TFTD

- Da definição de resposta em frequência da aula passada, é conveniente definir a transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) de um sinal $h[n]$ como:

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- Mostramos na aula passada que esta representação é periódica com período 2π .
- Perceba que ela é formalmente a série de Fourier de tempo contínuo (SFTC) do sinal periódico $H(e^{j\omega})$ que tem período 2π e que $h[n]$ é o coeficiente da série na “frequência” n .
- A TFTD pode ser aplicada a qualquer sinal de tempo discreto que seja somável em módulo, ou seja, que satisfaça

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

Transformada Inversa

- Como $h[n]$ são os coeficientes da SFTC de $H(e^{j\omega})$, eles podem ser obtidos diretamente pela fórmula da SFTC inversa (lembrando que o período de $H(e^{j\omega})$ é 2π):

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- A integral pode ser avaliada em qualquer intervalo de comprimento 2π .
- Temos então a definição do par transformado TFTD:

O par TFTD

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$
$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Propriedades da TFTD [Oppenheim, S&S, Seção 5.3]

- O par TFTD é na verdade uma SFTC. Assim, as propriedades que você aprendeu em Sistemas e Sinais se aplicam quase diretamente:

- Linearidade

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

- Deslocamento no tempo

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

- Deslocamento na frequência

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

- Simetria de $X(e^{j\omega})$

Para $x[n]$ real, $|X(e^{j\omega})|$ é par e $\angle X(e^{j\omega})$ é ímpar.

- Componentes par e ímpar

$$\text{Par } \{x[n]\} \xleftrightarrow{\text{TFTD}} \Re \{X(e^{j\omega})\}$$

$$\text{Ímpar } \{x[n]\} \xleftrightarrow{\text{TFTD}} \Im \{X(e^{j\omega})\}$$

- Relação de Parseval

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

A TFTD e sistemas LIT

- Mostramos na aula passada que se a entrada de um sistema LIT for $x[n] = Ae^{j\omega n}$, a saída será $y[n] = H(e^{j\omega}) x[n]$ sendo $H(e^{j\omega})$ a TFTD da resposta ao impulso $h[n]$, desde que essa seja somável em módulo.
- Hoje vimos que uma sequência qualquer $x[n]$ somável em módulo, pode ser escrita como uma “soma” de exponenciais na forma $e^{j\omega n}$, ou seja,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- Mas como o sistema é LIT, usando as propriedades da linearidade, a saída devida a esta entrada será

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

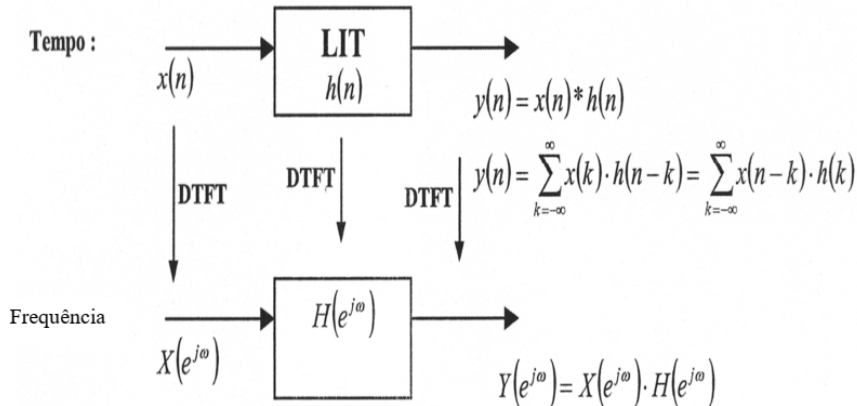
- Comparando então esta equação com a da TFTD inversa, concluímos que a TFTD de $y[n] = x[n] * h[n]$ é $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$!

TFTD: Propriedade da convolução

Em resumo:

Propriedade da convolução

$$y[n] = h[n] * x[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$



- ① Representação no domínio da frequência via TFTD funciona apenas se todos os sinais são somáveis em módulo.
- ② Forma alternativa de calcular a saída de um sistema LIT ao invés da convolução:
 - i) TFTD de $x[n]$
 - ii) Multiplicar para $H(e^{j\omega})$ obtendo $Y(e^{j\omega})$
 - iii) Fazer a TFTD inversa de $Y(e^{j\omega})$ obtendo $y[n]$

Exercícios básicos

1 Encontre a TFTD dos sinais:

a) $x[n] = \alpha^n u[n]$, com $|\alpha| < 1$.

b) $x[n] = \delta[n]$.

c) $x[n] = \begin{cases} 2^n, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

2 Encontre a TFTD inversa de:

a) $H(e^{j\omega})$ com período 2π tal que $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & W < |\omega| < \pi \end{cases}$

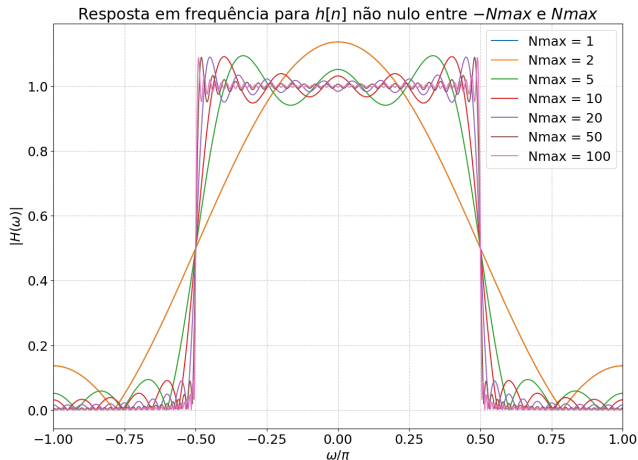
b) $X(e^{j\omega}) = \delta(\omega)$ no intervalo $-\pi < \omega < \pi$ e periódico com período 2π .

c) $X(e^{j\omega}) = 2 \cos(2\omega)$

Exemplo 2a: Resposta em frequência do filtro passa-baixa

```
W = np.pi/2
n = np.arange(-Nmax, Nmax
              +1)
h[n!=0] =
1/(np.pi*n[n!=0])*np.sin(W
 *n[n!=0])
h[n==0] = W/np.pi
w,H = signal.freqz(h, 1,
                  wdesejado)
plt.plot(w/np.pi, np.abs(H
),label=f'Nmax = {
Nmax}')

```



Nota: Série de Fourier para Sinais Contínuos Periódicos

Um sinal $x(t)$ periódico com período T pode ser representado como uma combinação linear de exponenciais complexas:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{com} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Os coeficientes a_n da série são dados por:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Esta expansão permite analisar o conteúdo espectral de sinais periódicos e é fundamental na teoria de sinais e sistemas lineares.