

PROF. DR. FLÁVIO CELSO TRIGO

PME 3481 – CONTROLE E APLICAÇÕES

NOTAS DE AULA

PREFÁCIO

Estas notas de aula representam a modesta compilação de diversos manuscritos e algum material digital produzido ao longo de anos de docência na área e em áreas correlatas. O material original contou com contribuições de meus mestres, colegas e orientados em trabalhos de conclusão de curso, dissertações de mestrado e teses de doutorado, cuja participação ficará clara nas referências ao longo do texto.

Evidentemente, o material aqui exposto deve ser utilizado como coadjuvante na complementação aos conteúdos abordados em sala de aula; por exemplo, exercícios e simulações numéricas dos temas abordados não irão, pelo menos em princípio, fazer parte desta compilação. No entanto, poderão eventualmente ser adicionados em versões posteriores. Mais importante, entretanto, é que a(o)s estudantes recorram também à bibliografia recomendada, referências clássicas no assunto, além de consultar a imensa gama de conteúdo disponível nos canais digitais.

Por fim, gostaria de salientar que a colaboração de leitores no sentido de apontar erros ou incongruências no texto em si e, mais importante, nas críticas (de preferência, construtivas) ao conteúdo são sempre bem-vindas.

FLÁVIO CELSO TRIGO, 2025

SUMÁRIO

Parte I: MÓDULOS 1–4	1
1 Introdução	2
1.1 Algumas definições fundamentais	3
2 Diagramas de blocos	6
2.1 Álgebra de diagramas de blocos	8
3 Ações de controle	10
3.1 Introdução	10
3.2 Erro em estado estacionário	10
3.3 Sensibilidade	13
3.4 Tipos de Sistemas	15
3.5 Entradas de teste para erro	15
3.6 Avaliação do erro em estado estacionário	17
3.7 Ações de Controle	20
Ação de controle de duas posições	21
Ação de controle proporcional (P)	22
Ação de controle integral (I)	23
Ação de controle derivativa (D)	24
Ação de controle proporcional e integral (PI)	24
Ação de controle proporcional e derivativa (PD)	26
Ação de controle proporcional-integral-derivativa (PID)	27
4 Métodos de Ziegler e Nichols	30
4.1 Especificações de projeto para sistemas de 2a. ordem	30
4.2 Métodos de Sintonia de Ziegler e Nichols	32
4.3 Exemplos	37
5 Critérios de desempenho globais	44
5.1 Critérios de desempenho	44

5.2	Coeficientes para o critério ITAE	46
5.3	Projeto de controladores PID pelo método ITAE	47
6	Análise de resposta transitória	56
6.1	Introdução - Sistemas de 1 ^a e 2 ^a ordem	56
6.2	Resposta transiente a uma excitação conhecida	57
6.3	Especificações de projeto para resposta transitória de sistemas de 2 ^a ordem	67
7	Estabilidade relativa	69
7.1	Sistemas de ordem superior	69
7.2	Localização dos polos e a resposta transitória	70
8	Lugar das raízes	72
8.1	Propriedades do Lugar das Raízes	72
8.2	Construção do Lugar das Raízes	75
8.3	Sintonia de Controladores PID com auxílio do Lugar das Raízes	84
8.4	Projeto de compensadores pelo método do Lugar das Raízes	91
9	Métodos de resposta em frequência	100
9.1	Saídas em regime permanente para entradas senoidais	100
9.2	Diagrama de Bode – fundamentos	103
9.3	Gráficos Polares: Gráfico de Nyquist	115
9.4	Estabilidade relativa utilizando diagramas de Bode	118
Parte II: MÓDULOS 5–8		120
10	Funções de transferência e espaço de estados	121
10.1	Conversão de FT para EE	122
10.2	Solução do sistema em espaço de estados	125
10.3	Controlabilidade e observabilidade	130
11	Projeto de controladores: reguladores	135
11.1	Projeto de reguladores por realimentação de estado: método de alocação de polos	135
11.2	Projeto de reguladores por realimentação de estado: controlador linear quadrático – LQ	139

12 Observadores	144
12.1 Introdução	144
12.2 Observadores de estado para sistemas contínuos	145
13 Projeto de controladores: seguidores de referência	154
13.1 Seguidores de referência por modelos assumidos	154
13.2 Seguidores de referência via controle linear quadrático	157
Referências	161

Notas de aula – Prof. F. Trigo

PARTE I

MÓDULOS 1–4

Notas de aula – Prof. F. Trigo

1 INTRODUÇÃO

O QUE É CONTROLE?

A primeira pergunta que surge quando se fala em controle é: o que é e qual a utilidade de um sistema de controle? A questão é bastante abrangente e, desde a Antiguidade, ocupa posição de destaque no desenvolvimento tecnológico. Imagine, por exemplo, encher um copo de água para beber, ação bastante corriqueira no dia-a-dia das pessoas. A sequência de ações necessárias pode ser resumida da seguinte maneira:

1. verifica-se a disponibilidade do copo (vazio) e do recipiente que contém a água armazenada;
2. levanta-se o recipiente para leva-lo até o copo;
3. derrama-se o líquido no copo monitorando continuamente sua altura até o nível desejado.

O processo acima é um exemplo de um sistema de controle típico com todos os elementos que o compõem. Em primeiro lugar, identificar a existência do copo vazio e do recipiente cheio envolve normalmente a visualização desses dois elementos, caracterizando o *sensoriamento*, isto é, a maneira como a informação é captada. Na sequência, o *controlador* humano (o cérebro) identifica configurações e prevê esforços necessários para a realização da tarefa contando com o auxílio de modelos armazenados internamente (não é importante agora como esses modelos neurais foram aprendidos). Posteriormente, o mesmo controlador envia aos músculos dos braços (os *atuadores*) os comandos elétricos de ativação para executar a tarefa. Novamente, a *inspeção visual* constantemente monitora o nível do líquido, enviando essa informação ao cérebro que, no limite de extravasamento, comanda o término da ação do braço que sustenta o recipiente-fonte.

Em uma perspectiva mais abrangente, pensemos o mundo em termos de sistemas dinâmicos cujo estado pode ser matematicamente descrito por meio de conjuntos de equações diferenciais ordinárias (EDOs), características de modelos a parâmetros concentrados, forma que tem sido utilizada largamente em com bons resultados na modelagem de fenômenos do mundo real, como o movimento planetário, a dinâmica de populações, a disseminação de doenças, a dinâmica de sistemas automotivos e robóticos, só para citar alguns exemplos.

O refinamento desses modelos a partir de sua validação com dados do mundo real permite-nos não só construir modelos preditivos do comportamento natural (não-forçado) do sistema, mas também manipulá-lo para obter respostas desejadas pela imposição de lógicas de controle especificamente projetadas *a priori*.

1.1 Algumas definições fundamentais

As definições a seguir serão amplamente utilizadas no estudo de sistemas de controle.

- *sistema de controle* é um conjunto de componentes físicos relacionados de maneira a regular dinamicamente a si mesmos ou a outros sistemas. Um sistema é dito dinâmico se sua resposta depender da excitação passada. O primeiro passo para o projeto de um sistema de controle eficaz é a descrição, por um bom modelo, do sistema físico que se deseja controlar;
- um *modelo* nada mais é que uma representação matemática de uma situação real; o modelo será utilizado para prever o desempenho do sistema físico em serviço;
- *malha aberta*: o controle em malha aberta consiste basicamente em ações pré-programadas para as quais não há informação sobre o resultado (a saída do sistema). Por exemplo:
 - um regador automático de jardim programado para ligar todos os dias pela manhã durante 10 minutos irá efetuar essa ação independentemente de outros fatores como a pressão da água, a humidade do ar ou das plantas ou mesmo que em determinado momento esteja chovendo. Nota-se a ausência de sensores que forneçam informação para que alguma "inteligência" adapte o regador às condições do meio ou prescritas;
 - motores de passo são frequentemente controlados em malha aberta. As bobinas são acionadas em uma sequência que envolve determinado número de passos e, em princípio, não há garantia de que a posição angular desejada tenha sido atingida, mesmo com o correto dimensionamento em função da carga. Isso ocorre pois, na ausência de sensores (deslocamento angular, corrente nas bobinas), não há maneira de corrigir eventuais erros.
- *malha fechada*, também denominado *com realimentação* ou *feedback*, como aparece normalmente nas referências clássicas sobre o assunto: o controle em malha fechada, devido à presença do mecanismo de realimentação, permite-nos lidar com variações nas condições de operação dentro dos limites de projeto. Observe a diferença causada pela existência de um mecanismo de realimentação nos dois exemplos anteriores:
 - não é possível prever o exato momento em que irá começar a chover; portanto, se quisermos que o regador automático seja desligado quando isso ocorre, é necessário fornecer essa informação a uma "inteligência" (o sistema de controle) que corte o fornecimento da água nesse instante e que retorne a operação caso a chuva pare em menos que os 10 minutos programados;
 - no caso do motor de passo, o sistema de controle, realimentado com o sinal de deslocamento angular, poderia atuar no sentido de corrigir passos que deveriam mas que não foram dados; para tanto, outro conjunto de bobinas poderia ser acionado, por exemplo.

Como iremos ver, a introdução da realimentação permite que a dinâmica do sistema seja alterada de forma que a resposta obtida seja direcionada para a configuração desejada. A figura 1 apresenta o diagrama de blocos de um sistema dinâmico genérico que possui todos os elementos mencionados nos exemplos anteriores. A entrada ou sinal de referência R é o objetivo buscado, encher o copo até a altura limite, Y , que é a saída do

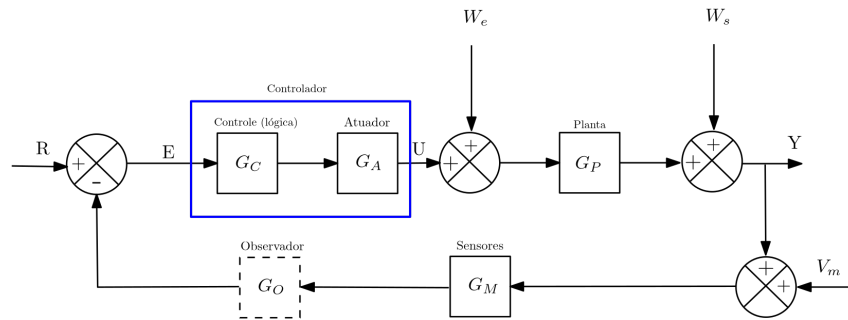


Figura 1: provisória 0

sistema, altura medida com a ajuda de sensores, no caso, os olhos do operador. O erro E é a diferença entre a altura do líquido a cada instante e o que é requerido. Esse erro é utilizado pelo processador (o cérebro), elemento inteligente do sistema responsável pelo envio de sinais ao atuador (o braço) que executa a ação. Esse conjunto está identificado como controlador, embora na literatura atuadores e controladores também aparecem de forma separada, com o sinal de controle U sendo enviado ao atuador e não diretamente à planta. Ambas as representações são válidas e estão corretas.

No diagrama aparecem ainda entradas não modeladas que são denominadas distúrbios, W_e e W_s respectivamente antes e depois da planta, além de perturbações V_m , que afetam os sensores e são inerentes a todo processo de medição. O bloco em linha pontilhada denominado *Observador* será estudado mais adiante quanto abordarmos o controle moderno.

Resumindo o que foi visto até aqui, podemos afirmar que um *sistema de controle* é um conjunto de componentes físicos relacionados de maneira a regular dinamicamente a si mesmos ou a outros sistemas. Um sistema é dito dinâmico se sua resposta depender da excitação passada. O primeiro passo para o projeto de um sistema de controle eficaz é a descrição, por um bom modelo, do sistema físico que se deseja controlar. Um *modelo* nada mais é que uma representação matemática de uma situação real; o modelo é utilizado para prever o desempenho do sistema físico em serviço.

Nosso interesse particular neste curso é nos **sistemas de controle em malha fechada** como o mostrado na figura 1, fato evidenciado pela presença da malha de realimentação. O motivo para tal interesse é que um sistemas de controle em malha fechada bem projetados possuem, idealmente, as seguintes características não necessariamente presentes no processo ou planta original:

- resposta assintoticamente estável;
- acompanhamento de referências;
- rejeição de perturbações;
- robustez.

A importância de cada um desses requisitos ficará mais clara à medida que o curso for se desenrolando.

Um sistema dinâmico pode ser matematicamente representado no domínio do tempo por um conjunto de equações diferenciais; tais equações podem ser *ordinárias* (sistema a parâmetros concentrados) ou *parciais* (sistema a parâmetros distribuídos). O sistema de equações diferenciais relaciona como serão as *saídas* do sistema em função de suas entradas. Vários processos podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias lineares, que são combinações lineares da variável dependente e de suas derivadas. A equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 - \cos(2t))x = 0 \quad (1.1)$$

é um exemplo de um sistema linear variante no tempo. Neste curso, estamos interessados em sistemas que podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes e, portanto, invariantes no tempo.

Quando, a um sistema linear de equações diferenciais ordinárias, é aplicado o operador $\mathcal{L}$ de Laplace, o sistema passa a ser descrito por um conjunto de equações algébricas no domínio da variável s de Laplace, *complexo* ou da *frequência*. No domínio matemático em que a representação acima é válida, o sistema fica representado por uma *função de transferência*, expressão matemática que permite caracterizar a saída a partir das entradas e das condições iniciais do sistema.

Uma maneira de representar a função de transferência é através de *Diagramas de Blocos*, especialmente quando se deseja visualizar os diversos sub-sistemas componentes de um sistema maior e as interações entre eles. Veremos, a seguir, como é feita esta representação e regras para simplificar diagramas de sistemas complexos.

2 DIAGRAMAS DE BLOCOS

Como já vimos anteriormente, um sistema de controle de malha fechada é caracterizado pela *realimentação* de um sinal proveniente da saída até a entrada, para que possa ser *comparado* a um sinal de referência. Em relação às trajetórias do sinal em um sistema de controle em malha fechada, pode-se definir o que se chama de *ramo direto*, *ramo de alimentação* e *ramo de realimentação*.

O *ramo direto* é aquele que sempre conduz o sinal na direção entrada-saída e, geralmente porém não obrigatoriamente, as funções de transferência de seus blocos são representadas por $G_i(s)$, onde i é um número inteiro.

O *ramo de alimentação* está sempre disposto em paralelo ao ramo direto e também conduz o sinal na direção entrada-saída; suas funções de transferência são igualmente representadas por $G_i(s)$.

Finalmente, o *ramo de realimentação* contém os blocos responsáveis por conduzir o sinal da saída para a entrada. As funções de transferência eventualmente existentes neste ramo são normalmente designadas por $H_i(s)$. A fig. 2 ilustra o exposto acima.

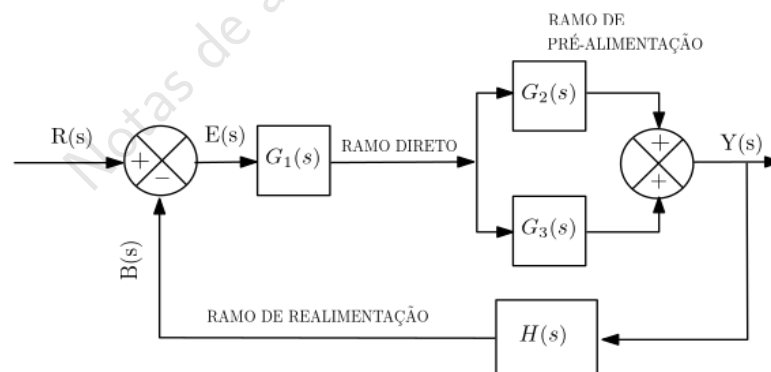


Figura 2: Ramos direto, de alimentação e de realimentação

A partir da representação de um sistema em diagrama de blocos, pode-se utilizar a álgebra decorrente da transformação de Laplace para reduzir o diagrama a um único bloco correspondente à função de transferência que descreve o comportamento dinâmico do sistema como um todo.

O ramo de realimentação de um sistema de malha fechada pode ou não conter uma função ou um conjunto de funções de transferência $H_i(s)$, dependendo da necessidade. Quando a realimentação é feita **sem** a introdução de qualquer função de transferência, ela é denominada *realimentação unitária*, conforme mostrado pela linha tracejada vermelha na fig. 3. Por outro lado, a introdução de funções de transferência no ramo de realimentação caracteriza o que

se denomina simplesmente *sistema realimentado*, conforme mostrado no traço preto contínuo nessa mesma figura. As funções de transferência em sistemas controlados recebem deno-

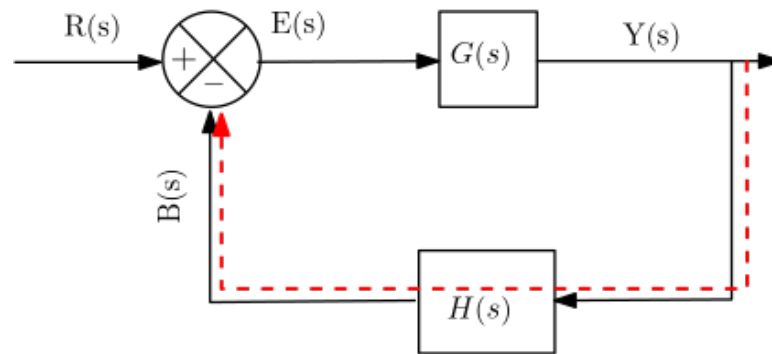


Figura 3: Sistema com realimentação unitária (linha tracejada vermelha) e realimentado (linha preta).

minações específicas de acordo com o fluxo de sinais no diagrama de blocos correspondente. Com respeito à fig. 3, podemos definir a *função de transferência de malha aberta* (FTMA) como a relação entre o **signal de realimentação** $B(s)$ e o **signal de erro** $E(s)$, ou seja

$$FTMA \triangleq L(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s) \cdot H(s) \quad (2.1)$$

A relação que existe entre o **signal de saída** $Y(s)$ e o **signal de erro** $E(s)$ é denominada *função de transferência do ramo direto*, dada por

$$\text{função transf. ramo direto} = \frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) \quad (2.2)$$

Note que, quando a realimentação for unitária, a FTMA e a função de ramo direto coincidem.

A razão entre o **signal de saída** $Y(s)$ e o **signal de entrada** $R(s)$ é a *função de transferência de malha fechada* (FTMF), calculada conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} Y(s) &= E(s)G(s) \\ E(s) &= R(s) - B(s) \\ \text{portanto, pode-se escrever} \\ Y(s) &= [R(s) - B(s)]G(s) \\ \text{porém } B(s) &= Y(s)H(s) \\ Y(s) &= [R(s) - Y(s)H(s)]G(s) \\ \text{assim } [I + G(s)H(s)]Y(s) &= R(s)G(s) \quad \text{e, portanto,} \\ FTMF = T(s) \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{I + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + L(s)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Repare que quando a realimentação é **negativa** (sinal “-” no somador), o denominador da FTMF possui o sinal positivo entre o termo independente e o termo em s ; por outro lado, uma realimentação **positiva** (sinal “+” no somador) implicaria na existência de um sinal negativo entre os termos do denominador da FTMF.

Pode-se concluir, com base na eq. 8.2, que a saída $Y(s)$ é influenciada tanto pela função

de transferência de malha fechada quanto pela entrada de referência $R(s)$, de acordo com a equação

$$Y(s) = R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.4)$$

A partir daí, o procedimento para obter a resposta no tempo é o mesmo visto anteriormente, ou seja, efetuar a decomposição do polinômio em s em frações parciais e utilizar as tabelas de transformadas de Laplace; alternativamente, pode-se empregar algum programa capaz de efetuar tais cálculos, como Matlab, Scilab ou Octave.

2.1 Álgebra de diagramas de blocos

Os diagramas de blocos representam as funções de cada componente de um sistema, bem como o fluxo de sinais entre eles e as inter-relações existentes (??). A disposição dos blocos no diagrama permite classificar as associações entre os subsistemas em *cascata* (ou em *série*) e em *paralelo*. A fig. 4 representa as duas associações

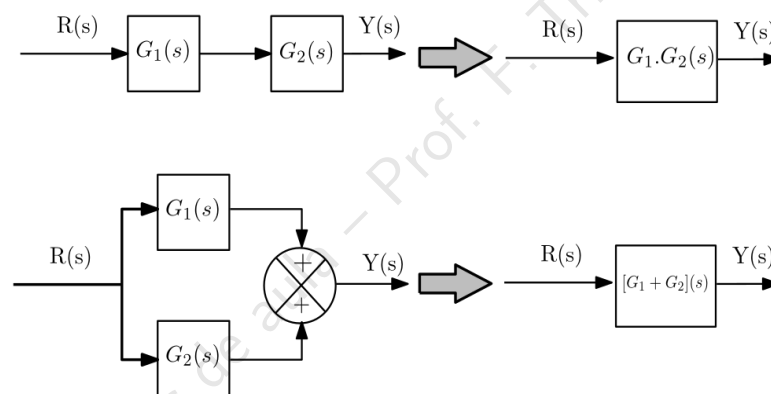


Figura 4: Associações entre sistemas: (a) - em cascata; (b) - em paralelo

Sistemas mais complexos, que possuem muitos subsistemas (e funções de transferência correspondentes), geram representações em diagramas de blocos em que a relação entre a saída e a entrada não pode ser imediatamente visualizada. Uma das maneiras de simplificar a representação é a *redução de diagrama de blocos*. O procedimento de redução consiste basicamente em deslocar blocos, somadores e ramificações para outros pontos do diagrama original sem entretanto modificar a função de transferência original de cada subsistema. Ogata (1990) estabelece as seguintes regras práticas para a redução de um diagrama de blocos:

1. o produto das funções de transferência de ramo direto deve permanecer o mesmo;
2. o produto das funções de transferência ao redor da malha deve permanecer o mesmo.

O deslocamento propicia a criação de novas associações cuja álgebra é mais simples e direta (como uma associação em cascata, paralelo ou um conjunto que pode ser reduzido a uma FTMF utilizando diretamente a eq. 8.2). Exemplos de redução de diagramas de blocos serão dados em sala de aula.

Sistema de malha fechada submetido a um distúrbio

é comum em sistemas reais a existência de perturbações ou distúrbios. Por exemplo, deseja-se que um mecanismo posicionador de uma máquina operatriz mantenha a mesa em uma posição fixa durante certa operação de usinagem. No ambiente industrial, as vibrações produzidas por outros equipamentos podem influenciar o posicionamento desejado da mesa, provocando pequenos deslocamentos indesejáveis para o processo em execução. O sistema de controle de posicionamento da máquina deve ser robusto o suficiente para suprimir tais distúrbios a fim de não prejudicar o processo.

O diagrama da fig 5 representa um sistema de controle de malha fechada submetido a um distúrbio externo. Utilizaremos os conceitos de redução de diagrama de blocos para obter a função de transferência deste sistema de duas entradas.

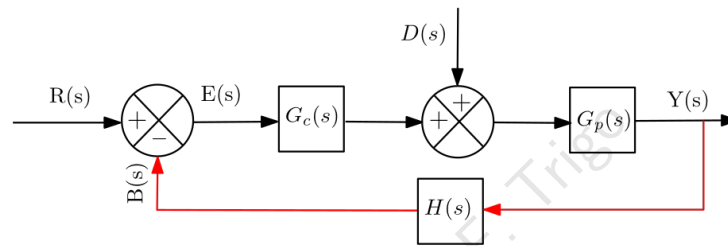


Figura 5: Sistema de malha fechada que sofre uma perturbação externa

Como o sistema é, por definição, *linear* o resultado final de várias entradas é a somatória dos efeitos que seriam causados se cada uma das entradas agisse separadamente. Assim, comecemos avaliando o efeito apenas do distúrbio $D(s)$ na ausência hipotética de $R(s)$. Se $R(s) = 0$, a FTMF do sistema de malha fechada com distúrbio ficaria

$$\frac{Y_d(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (2.5)$$

resultado em que utilizamos diretamente a eq. 8.2.

Agora, consideremos que não haja distúrbio. A FTMF da malha resultante será

$$\frac{Y_r(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (2.6)$$

onde novamente utilizou-se a eq. 8.2.

A somatória dos efeitos, eqs. 2.5 e 2.6 permite-nos obter a resposta final $Y(s)$:

$$Y(s) = Y_d(s) + Y_r(s) \quad (2.7)$$

$$Y(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s) + \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) \quad (2.8)$$

Simplificando a equação acima obtém-se

$$Y(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}[G_1(s)R(s) + D(s)] \quad (2.9)$$

que é a função procurada.

3 AÇÕES DE CONTROLE

3.1 Introdução

Diversos sistemas industriais utilizam-se atualmente de controladores automáticos para monitoramento e ajuste de seus processos. A função básica de qualquer controlador é fazer com que a operação do equipamento ou sistema ocorra estritamente dentro da faixa especificada em projeto, ou ainda impedir que os eventuais desvios previstos não ultrapassem os valores admissíveis.

Talvez os mais conhecidos atuadores industriais sejam os de ação proporcional, integral e derivativa, abreviadamente denominados *controladores PID*. O objetivo deste módulo é fornecer uma visão geral sobre as principais ações de controle e como utilizá-las para regular a operação de sistemas.

Antes de tratarmos das ações de controle e dos controladores PID, cabe-nos ressaltar que qualquer ação de controle baseia-se na avaliação do *erro* existente entre o sinal de referência e a saída do sistema. Desta forma, é necessário primeiro verificarmos como o *erro* se manifesta em diferentes tipos de sistemas. Inicialmente, estudam-se os erros em *estado estacionário* ou em *regime permanente* ($\Rightarrow t \rightarrow \infty$).

3.2 Erro em estado estacionário

3.2.1 Definição

Considere o sistema em malha aberta mostrado na figura abaixo:

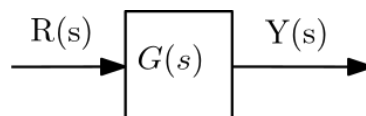


Figura 6: Representação de um sistema em malha aberta

O erro neste sistema é

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (3.1)$$

$$E(s) = R(s) - R(s)G(s) \quad (3.2)$$

$$E(s) = R(s)[1 - G(s)] \quad (3.3)$$

Um dos parâmetros mais importantes no projeto de sistemas de controle é o *erro em estado estacionário*, também denominado *erro em regime permanente*. O erro em estado estacionário é a discrepância existente entre o estado que se pretendia atingir e o estado efetivamente atingido por um sistema dinâmico quando o *tempo* tende ao infinito. Em outras palavras, dado um sinal (um comando de posicionamento, por exemplo), o sistema deve buscar atingir exatamente o estado comandado ou, na nomenclatura de controle, seguir a *referência*. Não por acaso, em nossos diagramas de blocos o sinal de entrada principal é representado por $R(s)$. Vejamos agora como determinar de forma prática o erro em estado estacionário.

O erro em estado estacionário, daqui em diante denominado e_{ss} , é calculado com base no Teorema do Valor Final (TVF),

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)[1 - G(s)] \quad (3.4)$$

Supondo, por exemplo, uma entrada em degrau unitário $r(t) = u(t)$ em $t = 0s$, temos $R(s) = \frac{1}{s}$ e

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} [1 - G(s)] = 1 - G(0) \quad (3.5)$$

O valor de $G(s)$ quando $s = 0$ é chamado *ganho estático* e, geralmente, é maior que 1. Como pode-se ver, um sistema de malha aberta sujeito a uma entrada em degrau irá apresentar erro em regime permanente que pode ser significativo, dependendo do valor de $G(0)$. No entanto, pode-se tentar ajustar $G(0) = 1$ de forma a fazer o ganho em regime estático nulo na equação acima. Este ajuste não garante que, durante a operação, $G(s)$ sofra modificações devido a perturbações, alterando assim o ajuste inicial de $G(0)$ e fazendo com que o erro persista. Uma das maneiras de diminuir tal efeito é utilizar a retroação negativa. Considere agora a figura abaixo, onde um sistema de controle com realimentação unitária é mostrado.

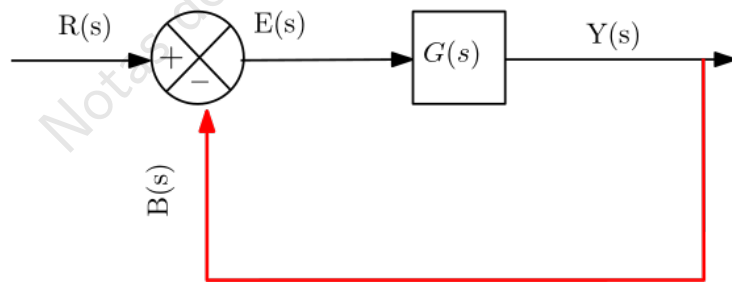


Figura 7: Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com retroação unitária negativa

Como estamos interessados no erro, é conveniente determinarmos a função de transferência relacionando o erro $E(s)$ com a entrada $R(s)$. Da álgebra de diagrama de blocos podemos escrever obter o erro $E(s)$ como

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (3.6)$$

Desenvolvendo obtemos

$$E(s) = R(s) - E(s)G(s) \Rightarrow \quad (3.7)$$

$$E(s) [1 + G(s)] = R(s) \Rightarrow \quad (3.8)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad (3.9)$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)} \quad (3.10)$$

Aplicando o TVF para obter o erro em estado estacionário,

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)} \quad (3.11)$$

A eq. 9.67 pode ser utilizada de maneira genérica para determinar o erro em estado estacionário de um sistema com retroação unitária negativa. Os benefícios da utilização da retroação, sistema mais caro e complexo, ficam evidentes como mostra o exemplo a seguir.

1. Exemplo 1

Considere-se a função de transferência em malha aberta $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$, que representa a dinâmica do controle em um sistema elétrico, térmico ou mecânico (controlador de nível de líquido em um tanque). Supondo-se $K > 1$, como é usual, o erro em estado estacionário do sistema em malha aberta, quando submetido a um *degrau unitário* na entrada é, de acordo com a eq. 3.4:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \frac{1}{s} = 1 - G(0) = 1 - K \quad (3.12)$$

O mesmo erro, em malha fechada seria, pela eq. 9.67

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(1/s)}{1 + \frac{K}{\tau s + 1}} = \frac{1}{1 + K} \quad (3.13)$$

Se o ganho K sofrer uma variação de 10%, por exemplo devido a alguma razão imprevista, o erro do sistema em malha aberta, com relação à referência, seria de 10%, ao passo que, no sistema em malha fechada com retroação unitária, seria 0,1%, justificando a introdução deste sistema de controle (com retroação), mais complexo e de maior custo.

Consideremos novamente o sistema da fig. 7. A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \triangleq \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (3.14)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= G(s)E(s) \\
 E(s) &= R(s) - Y(s) \Rightarrow \\
 Y(s) &= G(s)(R(s) - Y(s)) \\
 Y(s)(1 + G(s)) &= G(s)R(s) \Rightarrow \\
 \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)}
 \end{aligned}$$

3.3 Sensibilidade

Seja um sistema com uma entrada e uma saída (UEUS, ou SISO em inglês), conforme o mostrado na fig. 8. Define-se a *Sensibilidade*:

$$S(s) \triangleq \text{sensibilidade} = \frac{E(s)}{R(s)} \quad (3.15)$$

Para generalizar este conceito, suponhamos agora que a função de transferência do ramo direto, $G(s)$, seja composta pelo arranjo em série (ou cascata) de um controlador $G_c(s)$ com a planta $G_p(s)$ de tal forma que a função de transferência de malha aberta seja dada por (vide fig. 8)

$$L(s) = G_c(s) \cdot G_p(s) \quad (3.16)$$

A partir da introdução do controlador, há necessidade de adequar a nomenclatura da seguinte

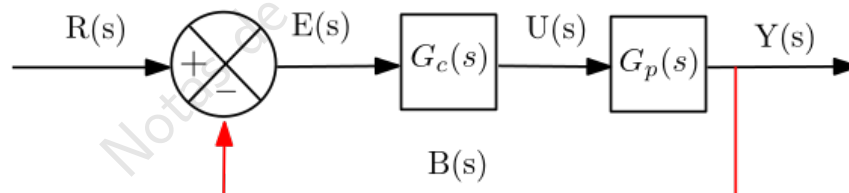


Figura 8: Diagrama de blocos de sistema com realimentação unitária e ramo direto contendo controlador e planta em série.

forma, tendo como base a fig. 8:

$$\begin{aligned}
 \text{FTMA ou canal direto} \quad L(s) &= G(s) = G_c(s) \cdot G_p(s) \\
 \text{FTMF} \quad T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c \cdot G_p(s)}{1 + G_c \cdot G_p(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}
 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} E(s) &= S.R, \quad E = R - Y, \quad Y = E.G \Rightarrow \\ E(s) &= R - E.G \Rightarrow E[1 + G] = R \Rightarrow \\ S(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad e \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$T(s) = G(s)S(s) \quad (3.18)$$

Vamos estudar agora o efeito que uma *variação* no sistema (função $G(s)$) irá provocar na FTMF $T(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial G} &= [1 + G]^{-1} \cdot 1 + (-1) [1 + G]^{-2} \cdot 1 \cdot G \\ \frac{\partial T}{\partial G} &= \frac{1}{1 + G} + \frac{G}{(1 + G)^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} = \frac{1}{(1 + G(s))^2} = S^2(s) \quad (3.20)$$

Processos como o envelhecimento costumam afetar a planta. Assim, estuda-se a influência de variações no desempenho da planta sobre o desempenho do sistema em malha fechada como um todo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial G_p} &= \frac{\partial}{\partial G_p} \left(\frac{G_c G_c}{(1 + G_c G_p)} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial G_p} &= \frac{\partial}{\partial G_p} (G_c G_p [1 + G_c G_p]^{-1}) \\ \frac{\partial T}{\partial G_p} &= G_c [1 + G_c G_p]^{-1} + (-1) G_c G_p [1 + G_c G_p]^{-2} G_c(s) \\ \frac{\partial T}{\partial G_p} &= (G_c [1 + G_c G_p] - G_c^2 G_p) [1 + G_c G_p]^{-2} \\ \frac{\partial T}{\partial G_p} &= \frac{G_c [1 + G_c G_p] - G_c^2 G_p}{[1 + G_c G_p]^2} = \frac{G_c}{[1 + G_c G_p]^2} = S \frac{G_c}{1 + G_c G_p} \\ \frac{\partial T}{\partial G_p} &= S \frac{G_c}{1 + G_c G_p} \times \left(\frac{G_p}{G_p} \right) = S \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} \frac{1}{G_p} \Rightarrow \\ \frac{\partial T(s)}{\partial G_p(s)} &= S(s) \frac{T(s)}{G_p(s)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

De maneira análoga, obtém-se

$$\frac{\partial T(s)}{\partial G_c(s)} = S(s) \frac{T(s)}{G_c(s)} \quad (3.22)$$

3.4 Tipos de Sistemas

A forma da função de transferência em malha aberta de um sistema com retroação (unitária ou não) determina as características do erro em estado estacionário. A FTMA de um sistema pode ser escrita, de forma genérica, como

$$FTMA = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^r \prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad (3.23)$$

onde K representa uma constante qualquer. É importante observar que esta classificação não possui relação com a *ordem da planta* $G(s)$, que estudaremos mais tarde.

O *tipo* de um sistema é definido em função do número de integradores que sua FTMA possui. Na função de transferência, cada polo em zero ($s=0$) corresponde a um integrador¹. Exemplos de sistemas tipos 0, 1 e 2 seriam, respectivamente,

$$\begin{aligned} FTMA &= K \frac{(s-1)(s-3i)(s+3i)}{s^0(s-4)(s-8i)(s+8i)(s+3)} \\ FTMA &= K \frac{(s-1)(s-3i)(s+3i)}{s^1(s-4)(s-8i)(s+8i)(s+3)} \\ FTMA &= K \frac{(s-1)(s-3i)(s+3i)}{s^2(s-4)(s-8i)(s+8i)(s+3)} \end{aligned}$$

3.5 Entradas de teste para erro

A avaliação do comportamento de um sistema controlado em malha fechada, e de sistemas em geral, é baseada na resposta deste sistema à aplicação de alguns tipos de sinais-padrão de teste. Os mais comumente utilizados são o degrau, a rampa e a parábola.

3.5.1 Entrada em degrau

Estudaremos a resposta de sistemas dos tipos 0, 1 e 2 à entrada em forma de degrau de amplitude A , ou seja $f_u(t) = A.u(t)$. Aplicando-se a transformada de Laplace a este sinal obtém-se

$$\mathcal{L}[Au(t)] = \frac{A}{s} \quad (3.24)$$

¹O nome integrador deve-se ao fato de que a transformada de Laplace da integral de uma função é dada por

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(t) dt$$

ou seja, a cada integração um termo em s é obtido no polinômio do denominador da função transformada.

3.5.2 Entrada em rampa

A função rampa é a integral no tempo da função degrau, explicitamente,

$$f_R(t) = \int_0^t f_u(t)dt = \int_0^t A \cdot u(t)dt = At \quad (3.25)$$

Para calcular a transformada de Laplace da rampa, podemos utilizar a propriedade da transformada da integral,

$$\mathcal{L}[f_R(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t A \cdot u(t)dt\right] = \frac{\mathcal{L}[A \cdot u(t)]}{s} = \frac{A}{s^2} \quad (3.26)$$

3.5.3 Entrada parabólica

Lembrando que

$$f_P(t) = \int_0^t f_R(t)dt = \frac{At^2}{2} \quad (3.27)$$

e utilizando as propriedades da transformada de Laplace, obtemos

$$F_P(s) = \frac{A}{s^3}, \quad (3.28)$$

onde a constante A engloba também o fator $\frac{1}{2}$ oriundo da integração de At . A fig. 9 representa as três entradas para teste mais comuns.

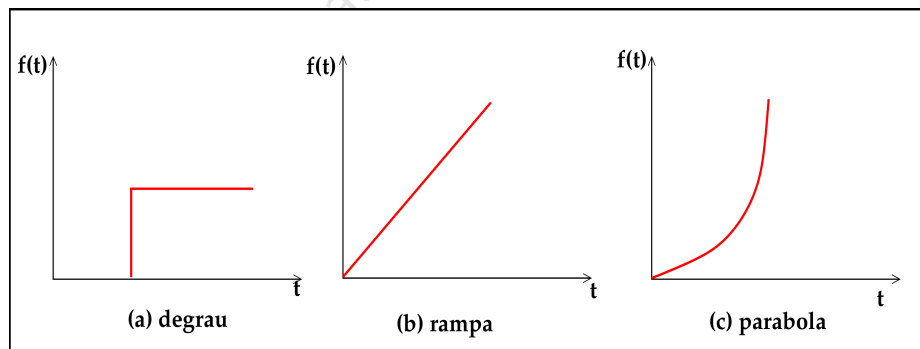


Figura 9: Entradas de teste mais utilizadas na avaliação de sistemas de controle.

3.6 Avaliação do erro em estado estacionário

3.6.1 Erro para uma entrada em degrau

Sistema do tipo 0

Seja a FTMA de um sistema,

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^0 \prod_{j=1}^n (s + p_j)}, \quad (3.29)$$

Utilizando a equação genérica para cálculo do erro, eq. 9.67, com $R(s) = \frac{A}{s}$,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}} \quad (3.30)$$

$$= \frac{A}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (z_i)}{\prod_{j=1}^n (p_j)}} = \frac{A}{1 + K_p} \quad (3.31)$$

onde

$$K_p \triangleq \frac{\prod_{i=1}^m (z_i)}{\prod_{j=1}^n (p_j)} \quad (3.32)$$

é denominada constante de erro de posição.

Sistemas dos tipos 1 e 2

Observemos o que ocorre quando a entrada em degrau é aplicada a sistemas cujas FTMA's possuem integradores. Por exemplo, para o sistema do tipo 1, teremos

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^1 \prod_{j=1}^n (s + p_j)}, \quad (3.33)$$

O erro em estado estacionário fica, aplicando-se a equação 9.67,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \prod_{j=1}^n (s + p_j)}} \quad (3.34)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A s \prod_{j=1}^n (s + p_j)}{\left[s \prod_{j=1}^n (s + p_j) + K \prod_{i=1}^m (s + z_i) \right]} = 0 \quad (3.35)$$

O termo independente em s no numerador da equação acima, quando levado ao limite zero, anula o resultado. Conclui-se, portanto, que a presença de mais integradores (sistemas do tipo 2 em diante) fará com que o comportamento do erro seja idêntico ao relatado acima.

3.6.2 Erro para uma entrada em rampa

Sistema tipo 0

Utilizando-se a eq. 9.67 com $R(s) = \frac{A}{s^2}$ obtém-se, para um sistema cuja FTMA $G(s)$ é do tipo zero,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^2} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^n (s+p_j)}} = \frac{A}{0} \frac{1}{1 + G(0)} = \infty \quad (3.36)$$

Assim, um sistema do tipo 0 é incapaz de acompanhar uma entrada em rampa. Como veremos a seguir, há necessidade de incluir integradores na função de transferência para tornar esta ação possível

Sistema tipo 1

Imediatamente, através da eq. 9.67 tem-se, para um sistema cuja FTMA $G(s)$ é do tipo 1,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^2} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s \prod_{j=1}^n (s+p_j)}} \quad (3.37)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s} \frac{s \prod_{j=1}^n (s+p_j)}{s \prod_{j=1}^n (s+p_j) + K \prod_{i=1}^m (s+z_i)} = \frac{A \prod_{j=1}^n (p_j)}{K \prod_{i=1}^m (z_i)} = \frac{A}{K_V} \quad (3.38)$$

A constante K_V , definida como

$$K_V \triangleq K \frac{\prod_{i=1}^m (z_i)}{\prod_{j=1}^n (p_j)} \quad (3.39)$$

é conhecida como *constante de erro de velocidade* e mostra que um sistema com um integrador, sob a ação de uma entrada em rampa, apresenta um erro constante em regime permanente.

Sistema tipo 2

De maneira análoga, aplicando-se a eq. 9.67 a um sistema cuja FTMA $G(s)$ é do tipo 2 obtém-se

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^2} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s^2 \prod_{j=1}^n (s+p_j)}} \quad (3.40)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s} \frac{s^2 \prod_{j=1}^n (s+p_j)}{s^2 \prod_{j=1}^n (s+p_j) + K \prod_{i=1}^m (s+z_i)} = 0 \quad (3.41)$$

Conclui-se que a presença de dois integradores possibilita a um sistema do tipo 2 acompanhar uma entrada em rampa.

3.6.3 Erro para uma entrada parabólica

Sistemas tipos 0 e 1

Não é difícil observar que, em sistemas para os quais as FTMA sejam dos tipos 0 e 1, a presença de uma entrada parabólica, $R(s) = \frac{A}{s^3}$, implica na inclusão de 3 polos em $s = 0$, que não podem ser cancelados pelos zeros da função de transferência. Assim, pela eq. 9.67, para um sistema do tipo 1, por exemplo,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^3} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^n (s+p_j)}} \quad (3.42)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2} \frac{s \prod_{j=1}^n (s+p_j)}{s \prod_{j=1}^n (s+p_j) + K \prod_{i=1}^m (s+z_i)} = \frac{A \prod_{j=1}^n (p_j)}{0 \prod_{i=1}^m (z_i)} = \infty \quad (3.43)$$

O resultado acima é válido também para sistemas do tipo zero, pois estes não são capazes sequer de anular o efeito de um dos zeros da FTMA.

Sistema tipo 2

Por fim, analisemos o comportamento do erro para um sistema com dois integradores quando submetido a uma entrada parabólica. Novamente, pela eq. 9.67, tem-se

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s.R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^3} \frac{1}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s^2 \prod_{j=1}^n (s+p_j)}} \quad (3.44)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2} \frac{s^2 \prod_{j=1}^n (s+p_j)}{s^2 \prod_{j=1}^n (s+p_j) + K \prod_{i=1}^m (s+z_i)} = \frac{A \prod_{j=1}^n (p_j)}{K \prod_{i=1}^m (z_i)} = \frac{A}{K_A} \quad (3.45)$$

A constante K_A , definida como

$$K_A \triangleq K \frac{\prod_{i=1}^m (z_i)}{\prod_{j=1}^n (p_j)} \quad (3.46)$$

é denominada *constante de erro em aceleração* e corresponde a um dos fatores que causa erro constante em regime permanente para um sistema do tipo 2 quando submetido a uma entrada parabólica. Para cancelar tal erro, mais um integrador seria necessário.

A argumentação acima denota a importância da presença de elementos integradores em sistemas de controle. Nas próximas seções, apresentam-se as *ações de controle* e mostram-se as funções desempenhadas por elementos de ganho constante, integral e diferencial em sistemas genéricos.

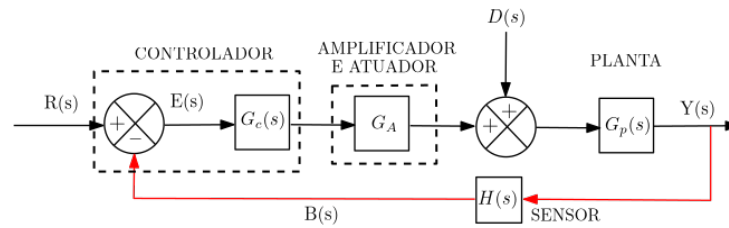


Figura 10: Representação de um sistema de controle genérico em malha fechada

3.7 Ações de Controle

Vimos, nas seções anteriores que, em determinados tipos de plantas (sistemas), a resposta aos sinais de referência mais utilizados nem sempre é a esperada. Em outras palavras, existem situações em que a planta, por si só, é incapaz de seguir o sinal de referência e proporcionar erro nulo.

A função dos controladores automáticos é comparar o valor da saída do sistema com a referência a ser seguida e, através de *ações de controle*, ajustar o *ganho do conjunto controlador* de forma a reduzir o erro até valores aceitáveis. Seja, portanto, o diagrama de blocos da fig. 10, onde mostra-se uma planta genérica controlada em malha fechada não-unitária

O funcionamento do sistema de controle pode ser resumido da seguinte forma: o elemento comparador ou detector de erro presente no controlador determina o desvio entre o sinal de saída e a referência (ou ponto de ajuste). A função do amplificador é elevar a potência disponível na saída do comparador (que normalmente é baixa) até um valor suficiente para acionar o atuador. O atuador é o elemento que efetivamente irá *controlar* o sistema. Exemplos de atuadores são motores elétricos diversos (DC, passo, servomotor), válvulas eletropneumáticas, relês, motores ou pistões hidráulicos, entre outros.

Observa-se, na figura 10, que a realimentação não é unitária. O bloco *sensor* representa a dinâmica do sensor acoplado à saída do sistema. Isto é necessário em situações nas quais o sinal de saída do sistema é distinto daquele utilizado para a entrada de referência e que será comparado no detector de erro. Assim, por exemplo, um determinado sensor pode medir velocidade porém a referência a ser comparada é dada em Volts. O bloco *sensor* é responsável por *converter* a saída em velocidade para seu equivalente em volts.

Pode-se, agora iniciar a descrição das ações de controle propriamente ditas. Basicamente, podem-se classificar os controladores industriais em sete tipos, de acordo com suas ações de controle:

1. controladores de duas posições (liga-desliga);
2. controladores proporcionais;
3. controladores integrais;
4. controladores derivativos;
5. controladores proporcional-integrais;
6. controladores proporcional-derivativos;
7. controladores proporcional-integral-derivativos;

Ação de controle de duas posições

Sistemas de controle deste tipo possuem duas posições fixas, genericamente designadas ligado-desligado. Devido à sua simplicidade, controladores liga-desliga possuem baixo custo. Dependendo do sinal de erro atuante $e(t)$, o controlador apresenta ação de controle $u(t)$ positiva ou negativa,

$$u(t) = U_1, \text{ se } e(t) > 0 \quad (3.47)$$

$$u(t) = U_2, \text{ se } e(t) < 0 \quad (3.48)$$

$$(3.49)$$

com U_1 e U_2 constantes. O valor U_2 pode ser zero ou $-U_1$, dependendo do caso e aplicação. Esquematicamente,

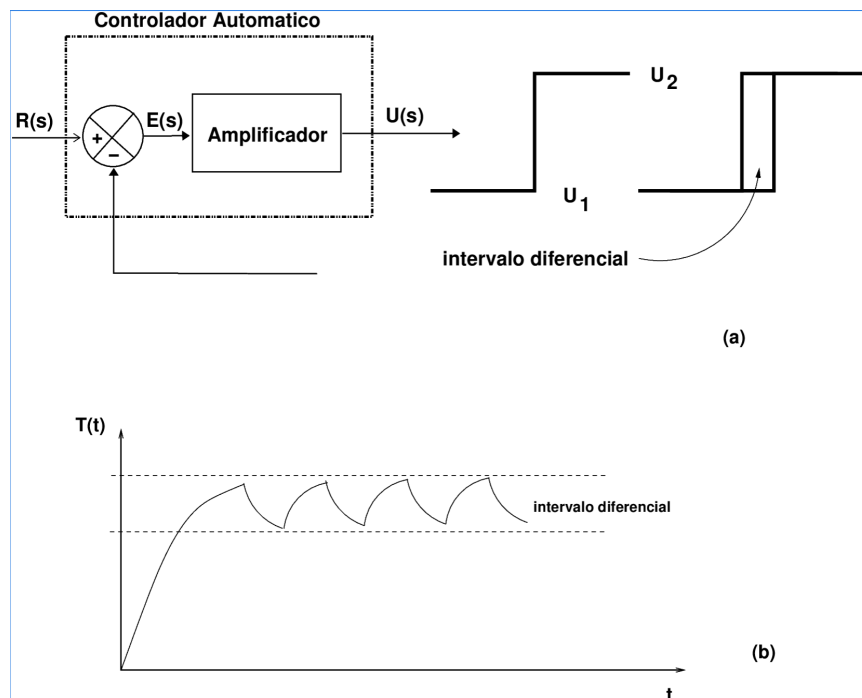


Figura 11: Ação de um controle de duas posições

Na fig. 11(a), observa-se a presença do chamado *intervalo diferencial*. O intervalo diferencial é o tempo durante o qual o erro atuante deve permanecer até que ocorra a comutação. A existência de tal intervalo é causada, algumas vezes, por falhas mecânicas no sistema de acionamento (atrito, emperramento, folgas devido a desgaste). No entanto, recorre-se ao intervalo diferencial como característica de projeto de tais sistemas para evitar seu acionamento com elevada frequência, o que é comum em sistemas cuja dinâmica é dita *rápida*. Exemplos típicos de ação de controle liga-desliga são o controle de temperatura de uma geladeira e o controle de nível de um fluido em processos industriais.

No caso da geladeira, o ajuste que promovemos no seletor nada mais é que um ajuste da referência, que irá determinar o tempo de funcionamento do compressor de forma a fazer com que o sistema atinja a temperatura solicitada. O gráfico da fig. 11(b) apresenta a resposta no tempo para tal planta, comandada por um controlador liga-desliga. Nota-se que a temperatura

oscila entre dois patamares, que correspondem aos limites do intervalo diferencial. Para que o intervalo fosse diminuído, seria necessário que a troca entre os estágios ligado e desligado ocorresse com maior frequência; no entanto, o aumento no número de acionamentos tende a diminuir a vida útil do equipamento.

Ação de controle proporcional (P)

Controladores proporcionais apresentam como característica a *lei de controle*

$$u(t) = K_p e(t) \quad (3.50)$$

ou, no domínio complexo,

$$K_p = \frac{U(s)}{E(s)} \quad (3.51)$$

onde K_p é o chamado *ganho proporcional*, que pode ser ajustado em função da necessidade e de suas limitações². Um exemplo típico de ação de controle proporcional é o controle de força em um mecanismo de acionamento hidráulico. O diagrama de blocos da fig. 12 apresenta um sistema de controle deste tipo e a respectiva resposta no tempo.

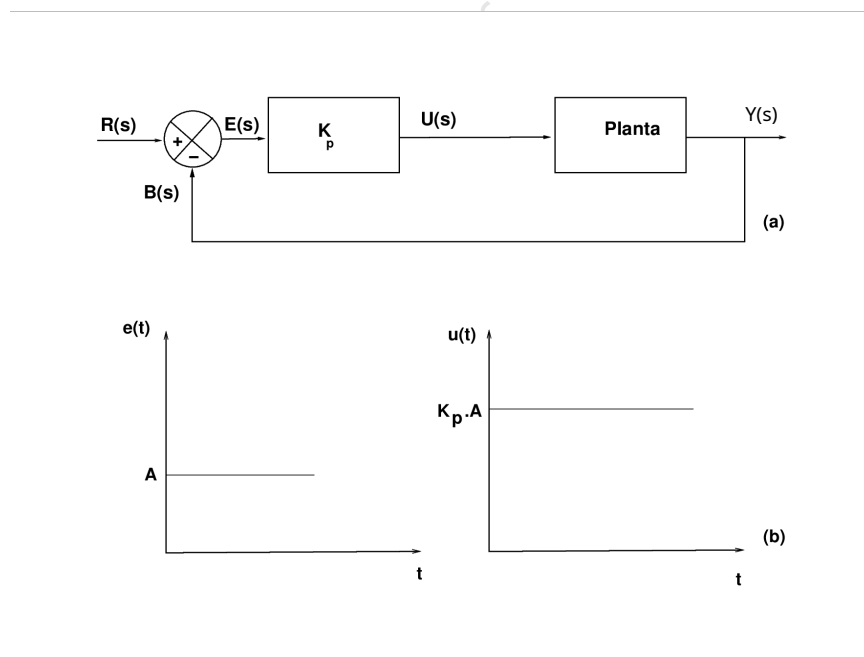


Figura 12: Ação de controle proporcional e sua resposta a um erro em degrau de amplitude A .

Um sistema de controle proporcional apresenta as seguintes características:

- não altera a ordem do sistema, pois não introduz polos ou zeros na FTMF;
- pode não ser capaz de corrigir o erro de estado estacionário, devido à capacidade limitada de ganho;
- o aumento excessivo do ganho (K_p) pode tornar o sistema instável.

²Este termo refere-se à potência disponível, seja no sistema de controle, seja no atuador.

Ação de controle integral (I)

O controlador do tipo integral possui uma *lei de controle* em que a ação é *proporcional à integral do erro*, conforme mostram as equações abaixo:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \rightarrow U(s) = K_i \frac{E(s)}{s} \rightarrow \quad (3.52)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (3.53)$$

onde K_i é o *ganho integral*, ou *ganho de restabelecimento*. Quando observa-se que

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t) \rightarrow u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (3.54)$$

pode-se entender a ação do controle integral $u(t)$ como aquela cuja *taxa de variação* é proporcional ao erro atuante $e(t)$.

O diagrama de blocos de um sistema que possui tal controlador é mostrado na fig. 13. Observa-se, nesta figura, que se o erro $e(t)$ for constante, a ação de controle é uma rampa. As características do controlador integral são:

- aumenta a ordem do sistema, pois introduz um polo em $s = 0$ na FTMF;
- possui bom desempenho em regime permanente (anula o erro em regime permanente para sistemas do tipo zero);
- raramente é utilizado separado de outros tipos de controladores, principalmente os do tipo proporcional.

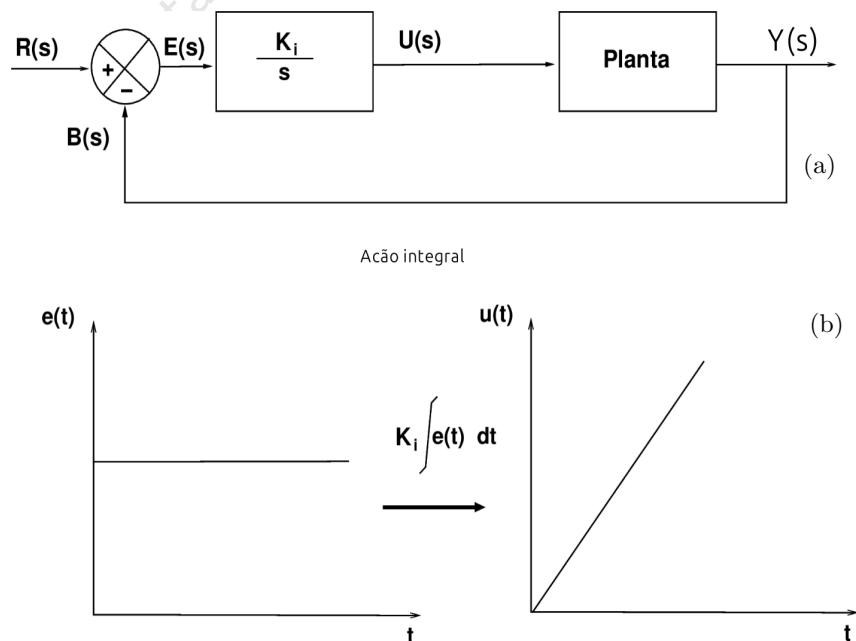


Figura 13: Ação de controle integral

Ação de controle derivativa (D)

Controladores do tipo derivativo possuem uma lei de controle em que a ação de controle é *proporcional à velocidade do erro*, o que corresponde à sua derivada:

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \rightarrow \quad (3.55)$$

$$U(s) = K_d E(s) s \rightarrow \quad (3.56)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_d s \quad (3.57)$$

onde K_d é o *ganho diferencial*. O controlador tipo D possui as seguintes características:

- atua somente quando há transitório (variação) no erro; assim, nunca é utilizado separadamente;
- introduz um zero na FTMF;
- aumenta a rapidez na resposta.

O diagrama de blocos e os gráficos de resposta no tempo de um controlador deste tipo são mostrados na fig. 14. Novamente, salienta-se que tal representação é apenas didática, uma vez que não se utilizam controladores do tipo derivativo separadamente.

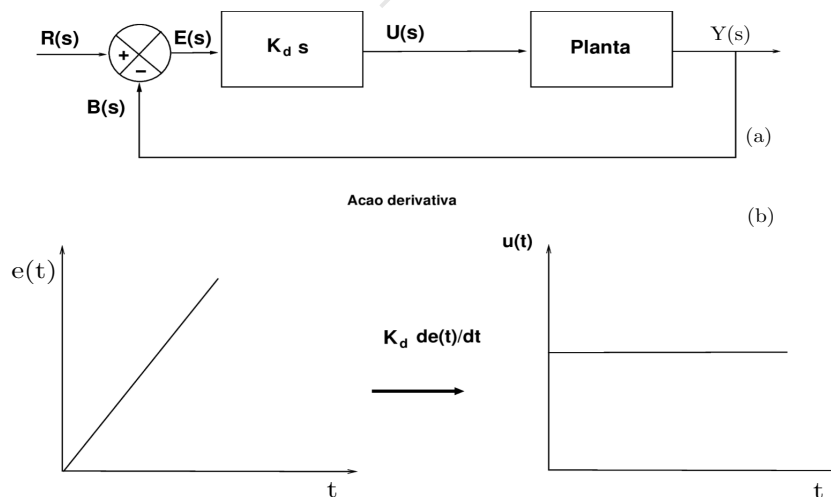


Figura 14: Ação de controle derivativa

Ação de controle proporcional e integral (PI)

Um dos tipos mais utilizados de controladores é o que combina as ações de controle proporcional e integral. O efeito combinado é obtido através da somatória dos efeitos individuais,

gerando a lei de controle

$$\begin{aligned}
 u(t) &= K_p e(t) + K_i \int_0^T e(t) dt \rightarrow \\
 U(s) &= K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} \rightarrow \\
 U(s) &= K_p \left(1 + \frac{K_i}{K_p} \frac{1}{s} \right) E(s) \rightarrow \\
 \frac{U(s)}{E(s)} &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)
 \end{aligned}$$

O termo

$$\frac{K_i}{K_p} = \frac{1}{T_i} \quad [\text{segundo}^{-1}] \quad (3.58)$$

é denominado tempo integral. Pode-se ajustar K_p e T_i durante a operação do controlador. O inverso do tempo integral T_i é denominado *taxa de restabelecimento* e representa o número de vezes por minuto em que a ação proporcional do controlador é duplicada. A fig. 15 representa tal controlador.

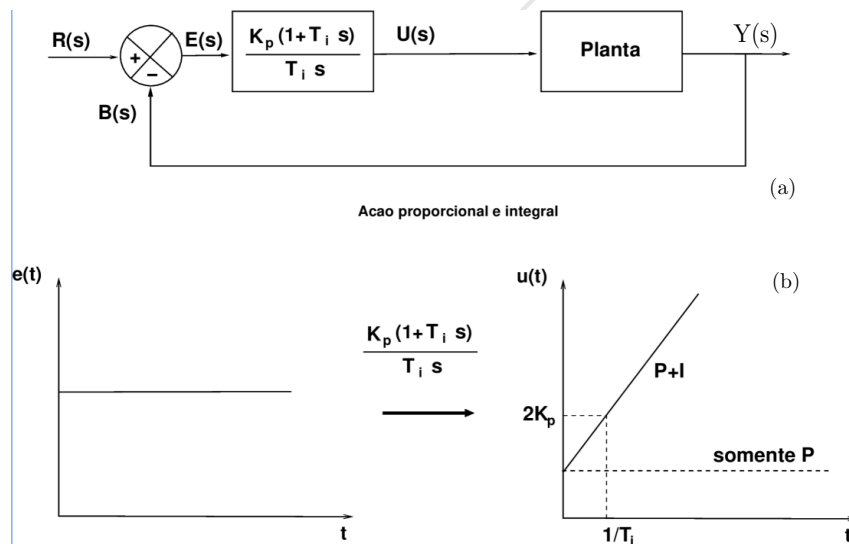


Figura 15: Ação de controle proporcional e integral

O controlador PI introduz um polo na origem, sendo portanto recomendado para sistemas de 1a. ordem. Quando os ganhos combinados são excessivamente aumentados, pode haver saturação no atuador.

Ação de controle proporcional e derivativa (PD)

A lei de controle que descreve a ação de controle combinada proporcional e derivativa é dada pelas seguintes equações:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \rightarrow \quad (3.59)$$

$$U(s) = K_p E(s) + K_d E(s)s \rightarrow \quad (3.60)$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s \right) E(s) \rightarrow \quad (3.61)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) \quad (3.62)$$

O termo

$$\frac{K_d}{K_p} = T_d \quad [\text{segundo}] \quad (3.63)$$

é denominado *tempo derivativo*. Neste tipo de controlador, tanto o ganho proporcional quanto o tempo derivativo podem ser ajustados. Como pode-se perceber pelas equações precedentes, o tempo derivativo é o intervalo pelo qual a ação de controle proporcional é “antecipada”. O efeito descrito pode ser visto na fig. 16. Deve-se salientar que, na realidade, não há “antecipação” de algo que ainda não ocorreu, o que justifica as aspas duplas. A analogia refere-se ao comportamento matemático da ação derivativa. As principais características dos controladores PD são:

- proporcionam correção acentuada antes que $e(t)$ se eleve muito;
- o ganho diferencial “antecipa” a ação do controle proporcional simples;
- tendem a amplificar ruídos e podem causar saturação no atuador;
- normalmente difíceis de sintonizar.

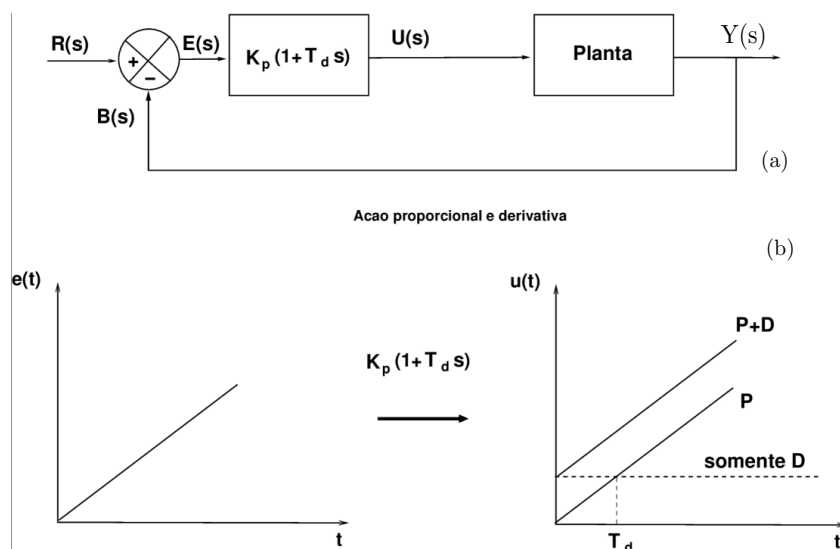


Figura 16: Ação de controle proporcional e derivativa

Ação de controle proporcional-integral-derivativa (PID)

Controladores PID possuem ampla aplicação industrial. A ação proporcional-integral-derivativa é obtida combinando-se os efeitos individuais na seguinte lei de controle:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.64)$$

que, no domínio da frequência torna-se

$$U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} + K_d E(s) s \rightarrow \quad (3.65)$$

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{K_p} \frac{1}{s} + \frac{K_d}{K_p} s \right) E(s) \rightarrow \quad (3.66)$$

$$\text{como } \frac{1}{T_i} = \frac{K_i}{K_p} \text{ e } T_d = \frac{K_d}{K_p} \rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(\frac{(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{T_i s} \right) \quad (3.67)$$

A ação conjunta introduz um polo e dois zeros no sistema, aumentando sua ordem. Sua utilização é recomendada para sistemas industriais com características de 2a. ordem; neste grupo de sistemas, controladores PID apresentam as vantagens de cada tipo de controlador individual. O diagrama de blocos de um sistema com controlador PID e sua resposta no tempo para uma entrada em rampa são mostrados na fig. 17.

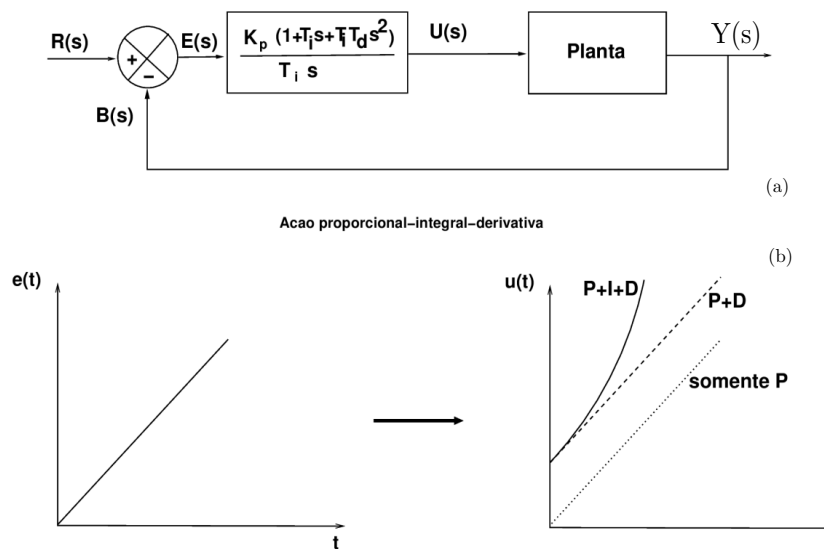


Figura 17: Ação de controle proporcional-integral-derivativa

O projeto e a sintonia de controladores PID serão estudados mais adiante neste curso.

Exemplo: modelo simplificado do mecanismo Clepsydra – o relógio d'água de Ctesibius de Alexandria (300? – 200? AC)

A fig.18 mostra um diagrama simplificado do relógio de Ctesibius, talvez o primeiro instrumento eficiente para a mensuração do tempo. A água cujo fluxo volumétrico (vazão) $q_e(t)$ alimenta

o reservatório A é escoada através do orifício V para um reservatório C , cujo nível se eleva lentamente. Com isso, a boia B_2 sobe e movimenta o mecanismo de indicação de nível. A contagem de tempo exige que a vazão da água que entra em C seja constante; para isso, o reservatório A conta com a boia cônica B_1 que obstrui a entrada da água quando o cone B_2 atinge o nível de referência (altura) planejado, ou seja, possui a função de válvula reguladora de fluxo.

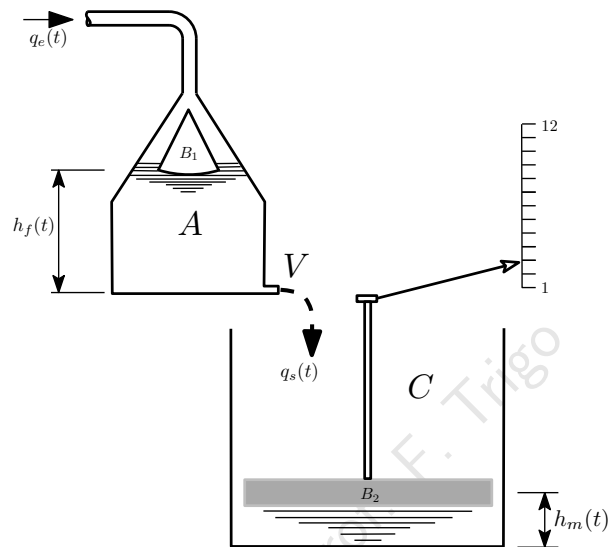


Figura 18: Clepsydra: relógio de Ctesibius de Alexandria (Adaptado de Lepschy, 1992)

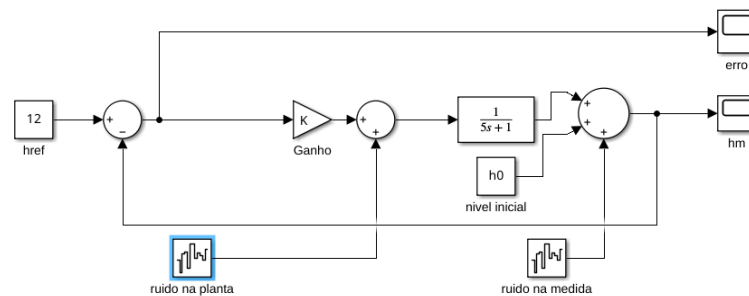


Figura 19: Diagrama de blocos para o relógio de Ctesibius

A variação no volume no tanque A é proporcional à mudança no nível do líquido; por outro lado, essa variação é também dada pela diferença entre as vazões de entrada q_e e de saída, q_s , dependentes da perda de carga combinada no vertedouro V e na boia B_1 . Para pequenas variações em h_f , podemos considerar essa perda linear dada por um coeficiente R_v [$m^2 s^{-1}$].

Matematicamente,

$$\begin{aligned}
 A_A \frac{d}{dt} h_f(t) &= q_e(t) - q_s(t) = q_e(t) - \frac{h_f(t)}{R_v} \\
 \frac{d}{dt} h_f(t) + \frac{h_f(t)}{A_A R_v} &= \frac{q_e(t)}{A_A} \\
 \mathcal{L}\{\cdot\} \Rightarrow (A_A R_v s + 1) H_f(s) &= R_v Q_e(s) \\
 \frac{H_f(s)}{Q_e(s)} &= \frac{R_v}{A_A R_v s + 1} = \frac{R_v}{\tau s + 1}, \quad \tau \triangleq A_A R_v \\
 \frac{H_f(s)}{Q_e(s)} &= \frac{\tau / A_v}{\tau s + 1}
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

No sistema de primeira ordem da eq. 3.68, identifica-se o produto $A_A R_v$ como a *constante de tempo*, normalmente designada com a letra τ . Um modelo em Matlab-Simulink para o sistema envolvendo o tanque A é mostrado na fig. 19. Sua simulação é efetuada em aula.

4 MÉTODOS DE ZIEGLER E NICHOLS

O presente módulo aborda os métodos de sintonia de Ziegler e Nichols. Os métodos de Ziegler e Nichols, apesar de antigos e restritos a plantas com características especiais, são ainda largamente utilizados na obtenção dos ganhos proporcional, integral e derivativo em sistemas de controle de malha fechada. O grande mérito de tais métodos é a possibilidade de fornecer ao menos uma estimativa inicial para os ganhos do controlador a partir de testes simples efetuados na planta. Após a primeira aproximação, é possível otimizar-se o sistema controlado utilizando-se outras técnicas como Lugar das Raízes, Diagramas de Bode ou Espaço de Estados.

Como será visto mais adiante no curso, sistemas de ordem superior podem ser analisados como somatórias de sistemas de primeira e segunda ordens, o que não limita a presente abordagem a tais sistemas.

4.1 Especificações de projeto para sistemas de 2a. ordem

Considere a figura 20 abaixo, onde um sistema de controle com realimentação unitária é mostrado.

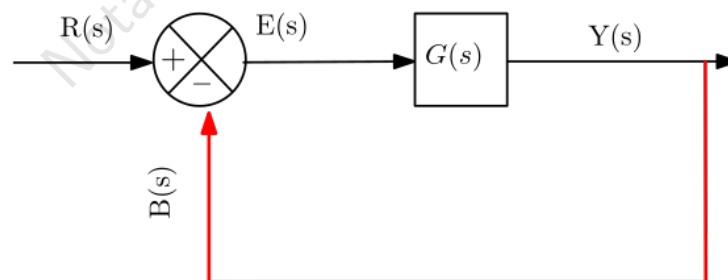


Figura 20: Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com retroação unitária negativa

Após a redução do diagrama de blocos considerando a realimentação unitária negativa, a função de transferência do sistema, relacionando a saída $C(s)$ (ou $Y(s)$) com a entrada $R(s)$ fica:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.1)$$

Esta função de transferência é denominada *Função de Transferência em Malha Fechada*,

ou simplesmente FTMF. A partir de uma FTMF pode-se aplicar diversos sinais de entrada $R(s)$ e determinar, através da aplicação da transformada inversa de Laplace, a resposta do sistema retroalimentado.

Considera-se inicialmente que o sistema em malha fechada dado pela FTMF da eq. 4.1 seja excitado por uma entrada em degrau unitário $u(t)$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$. A saída $Y(s)$ deste sistema pode ser obtida diretamente a partir da FTMF (eq. 4.1) fazendo-se $R(s) = 1/s$:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow Y(s) = T(s)\frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Utilizando tabelas de transformadas de Laplace pode-se determinar a resposta no tempo como

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \beta t + \theta) \quad (4.2)$$

onde

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{e} \quad \theta = \arccos(\zeta) \quad \text{para} \quad 0 < \zeta < 1$$

A constante ω_n é a frequência não-amortecida do sistema, ao passo que ζ representa o *coeficiente ou relação de amortecimento*. A constante θ é denominada ângulo de fase e indica o quanto a resposta (saída) do sistema atrasa em relação à entrada (excitação). O fator $\omega_n \beta$ é comumente chamado ω_d , *frequência amortecida*.

Outro tipo de excitação utilizado para avaliar as características da resposta de um sistema dinâmico é o impulso unitário ou *delta de Dirac* $\delta(t)$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$. Em termos da equação da FTMF do sistema, eq. 4.1 temos:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow Y(s) = T(s)(1) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Novamente, utilizando as tabelas de transformadas de Laplace obtém-se a resposta no tempo

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \beta t)$$

A resposta no tempo do sistema dado pela eq. 4.1 depende do parâmetro ζ (coeficiente de amortecimento). Os gráficos das figuras 21 e 22 apresentam a resposta de um sistema de segunda ordem em malha fechada dado pela eq. 4.1 respectivamente para entradas em degrau unitário e impulso unitário.

Um sistema é dito sub-amortecido ou sub-crítico quando o coeficiente de amortecimento ζ situa-se entre zero e um, crítico quando $\zeta = 1$ e superamortecido quando $\zeta > 1$. Sistemas com amortecimento sub-crítico controlados em malha fechada e sujeitos a uma excitação em forma de impulso unitário apresentam polos complexos conjugados com valor $-\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}j$

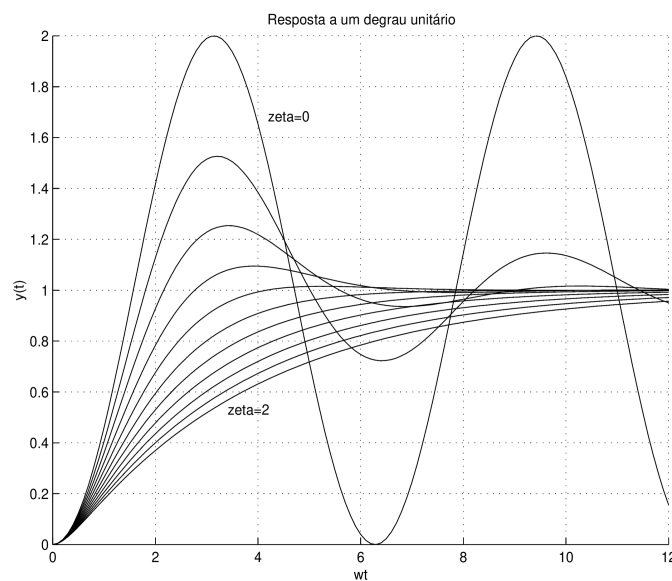


Figura 21: Resposta de um sistema de segunda ordem a um degrau unitário em função do coeficiente de amortecimento ζ

para cada frequência w_n conforme mostrado no gráfico da figura ???. Verifica-se que quando $\zeta = 0$, ou seja, o sistema não é amortecido, os polos da função de transferência localizam-se sobre o eixo imaginário $j\omega$ e a resposta é oscilatória, conforme mostrado na figura 22. Quando ζ é igual a 1, os polos passam a ser reais e, a partir deste ponto, a resposta não mais apresenta oscilação.

4.2 Métodos de Sintonia de Ziegler e Nichols

Na nomenclatura de controle, *sintonizar* um controlador significa determinar os parâmetros que atendam a uma dada especificação de desempenho. No caso de um controlador PID, procura-se determinar os ganhos proporcional (K_p), integral (K_i) e derivativo (K_d) de modo que a soma ponderada destes termos forneça uma saída que conduza a variável de processo na direção necessária à eliminação do erro.

Antes de iniciar a exposição, convém relembrar alguns termos normalmente empregados:

K_p ganho proporcional
 K_i ganho integral
 K_d ganho derivativo

Definem-se ainda:

$\frac{K_i}{K_p} = \frac{1}{T_i}$ onde T_i é o *tempo integral*
 $\frac{K_d}{K_p} = T_d$ onde T_d é o *tempo derivativo*

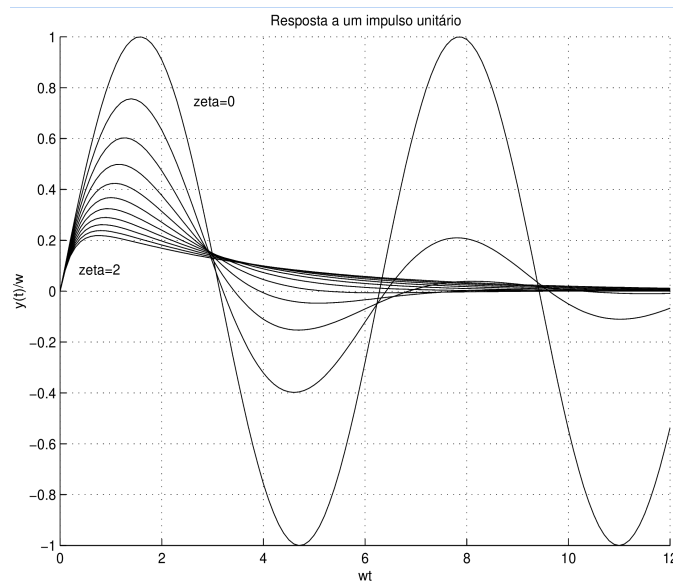


Figura 22: Resposta de um sistema de segunda ordem a um impulso unitário em função do coeficiente de amortecimento ζ

A partir destas definições, um controlador PID pode ser descrito pela expressão

$$G_c = K_p \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s}, \quad (4.3)$$

onde G_c representa o ganho do controlador.

A melhor maneira de sintonizar um controlador PID depende do modo como o sistema responde ao controle. Seja, por exemplo, um processo cuja dinâmica é lenta. Se um erro é subitamente introduzido (uma mudança na referência (setpoint), por exemplo), a reação inicial do controlador é determinada principalmente pelo termo derivativo. Isto fará com que o controlador inicie a correção no exato momento em que o erro deixa de ser zero. O termo proporcional irá, em seguida, entrar em ação para manter a saída do controlador até que o erro seja eliminado. Após mais algum tempo, o termo integral também irá contribuir na correção, à medida que o erro acumula-se com o passar do tempo. Na verdade, o termo integral deverá dominar a resposta, pois a diminuição do erro é lenta (por hipótese, a dinâmica da planta é lenta). Mesmo após a eliminação do erro, o controlador continuará afetando a resposta, com base na história dos erros que vinham sendo acumulados no integrador. A variável de processo pode, então, apresentar um sobressinal, gerando um erro na direção oposta.

Se o ganho integral não for muito elevado, este erro oposto subsequente será menor que o original, e o termo integral irá começar a diminuir, pois erros negativos serão adicionados aos erros positivos previamente acumulados. A operação descrita pode-se repetir diversas vezes até que tanto o erro absoluto quanto o erro cumulativo sejam eliminados. Enquanto isso, o termo derivativo irá continuar a influenciar a saída do controlador, baseado na derivada do sinal de erro, sendo eliminado quando o erro for nulo.

Seja, agora, uma planta cuja dinâmica é rápida. Neste caso, o termo integral não será predominante, pois os transitórios que originam os erros tendem a desaparecer mais rapidamente; em contrapartida, o termo derivativo tenderá a ser maior, uma vez que o erro muda rapidamente.

A essência da sintonia é, portanto, determinar o melhor conjunto de parâmetros que atenda às necessidades do processo. Nos exemplos acima, o processo lento requer um valor mais elevado para o ganho derivativo, fazendo com que a reação do controlador a um erro súbito seja mais rápida. No processo mais rápido, entretanto, maiores valores de K_D tendem a tornar a resposta muito oscilante, algo indesejável, pois isto tende a desestabilizar o sistema.

Diversas técnicas matemáticas e heurísticas para a seleção de valores apropriados para os ganhos do controlador PID têm sido desenvolvidos durante os últimos 80 anos. Existem, basicamente, três correntes de estudo para a seleção dos parâmetros do controlador:

1. Abordagem heurística, isto é, baseada em tentativa e erro. Exige grande experiência do projetista e nem sempre produz resultados aceitáveis.
2. Abordagem analítica, que envolve a obtenção de um modelo matemático da planta. A grande dificuldade desta abordagem é a modelagem de sistemas muito complexos, onde as hipóteses simplificadoras podem acabar por inviabilizar o projeto de um controlador eficaz.
3. Abordagem que mescla a experiência do projetista e utiliza ferramentas matemáticas para guiar a escolha.

Nesta categoria estão as regras de sintonia de Ziegler e Nichols, publicadas por John Ziegler e Nathaniel Nichols em 1942 e conhecidas como *métodos de Ziegler e Nichols*.

As regras de Ziegler e Nichols são particularmente vantajosas quando o modelo da planta é desconhecido, o que entretanto não invalida sua utilização para sistemas com dinâmica conhecida. O objetivo destes métodos é projetar controladores PID que apresentem sobressinal máximo de 25% quando o sistema é submetido a uma entrada em degrau. Tais regras continuam amplamente utilizadas devido à sua simplicidade e à sua aplicabilidade a diversos tipos de processos. A sintonia pode ser efetuada *in loco* com o auxílio de experimentos utilizando a planta.

4.2.1 Descrição dos métodos de Ziegler & Nichols

Método da curva “S”

Este método, conhecido também como método da resposta transitória, é utilizado quando um sistema em malha aberta sujeito a uma excitação em degrau unitário apresenta resposta temporal cujo formato da curva é um “S”, conforme mostrado na figura 23. Assim, o método é aplicável a sistemas que, em malha aberta, possuem dinâmica criticamente amortecida ou superamortecida. A filosofia do procedimento é fazer a planta operar em regime permanente, promover uma perturbação em forma de degrau e registrar graficamente a resposta do sistema.

As informações decorrentes do teste em malha aberta são o ganho em malha aberta K , o atraso aparente L e a constante de tempo T , obtidos graficamente. A função de transferência real $Y(s)/R(s)$ pode, assim, ser aproximada por uma que corresponde a um sistema de primeira ordem com atraso de transporte,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (4.4)$$

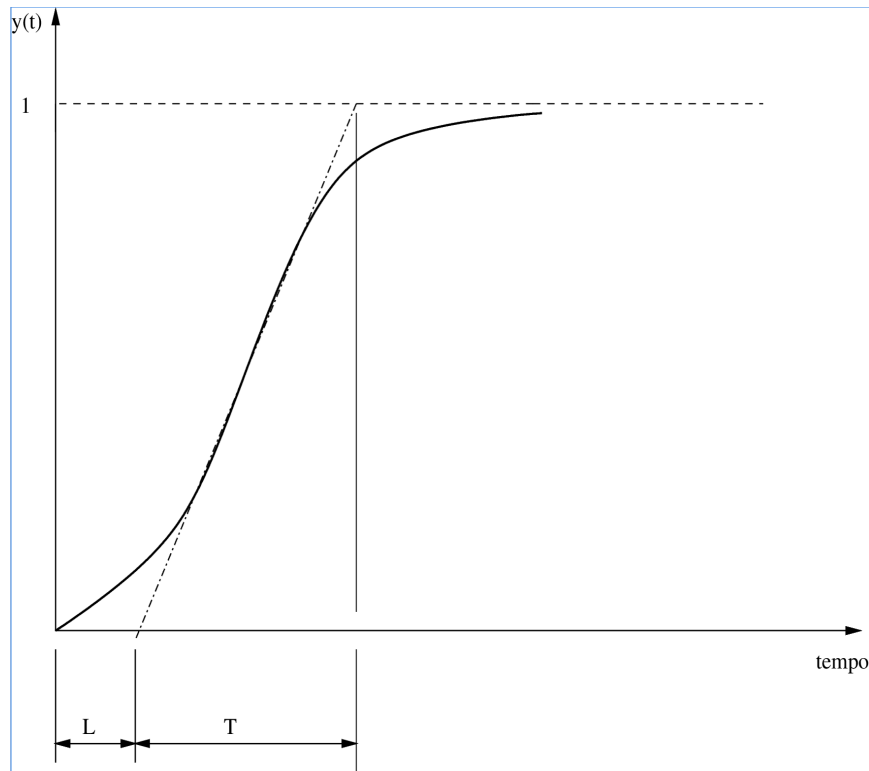


Figura 23: Resposta de um sistema em malha aberta a um degrau unitário

Para um sistema cujo comportamento seja semelhante ao descrito acima, Ziegler e Nichols sugerem adotar para o ganho proporcional, o tempo integral e o tempo derivativo de acordo com a tabela abaixo

Controlador tipo	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$\frac{0,9T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$\frac{1,2T}{L}$	$2L$	$0,5L$

Observa-se que um controlador PID sintonizado pelo método da curva “S” é tal que

$$G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 1,2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0,5Ls \right) = 0,6T \frac{(s + 1/L)^2}{s} \quad (4.5)$$

Assim, o controlador possui um polo na origem e dois zeros em $s = -1/L$.

Método da malha fechada ou do último ganho

Para a utilização deste método, considera-se um sistema em malha fechada incorporando um controlador proporcional de ganho K_p sujeito a uma excitação do tipo impulso unitário, conforme representado no diagrama a seguir.

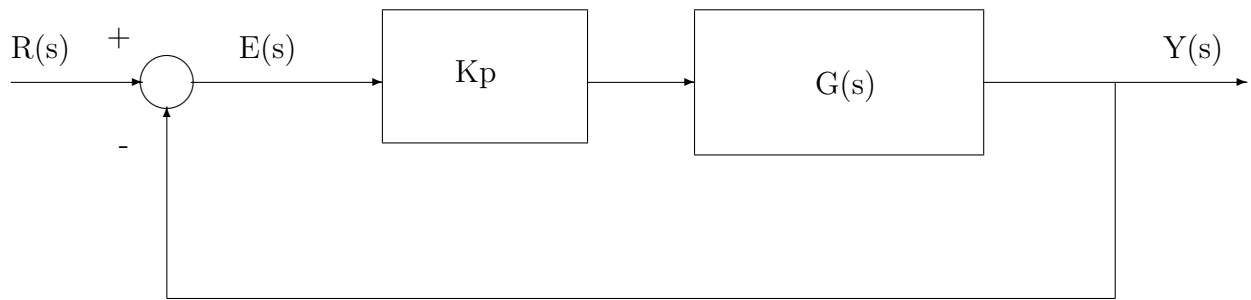


Diagrama de blocos para a utilização do 2º método de Ziegler & Nichols, com $R(s) = 1$.

O método consiste em utilizar um controlador proporcional, escolhendo-se K_p até que a resposta ao impulso seja uma oscilação mantida, vide figura 24. Na prática, isto corresponde a fazer $T_i = \infty$ e $T_d = 0$. Ressalta-se que, se não for possível a obtenção de uma oscilação mantida para algum valor de K_p , então o método não é aplicável.

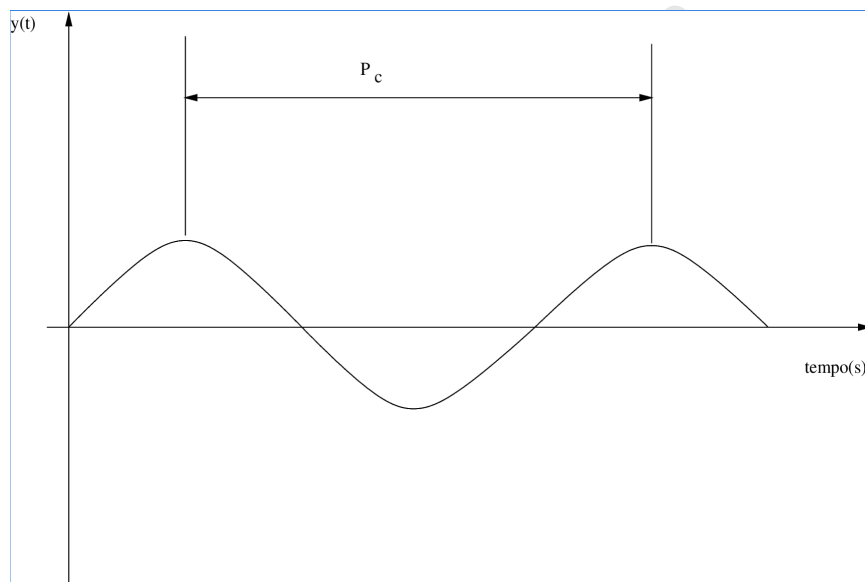


Figura 24: Resposta de um sistema em malha fechada a um impulso unitário para a determinação dos parâmetros do PID através do 2º método de Ziegler & Nichols

Quando a resposta mostrada na fig. 24 é obtida, o resultado denomina-se ajuste de último ganho, sendo o valor K_0 o *ganho crítico*. A partir daí, determina-se graficamente o período crítico, p_c , e calculam-se os valores das constantes do controlador por meio da tabela abaixo:

Controlador tipo	K_p	T_i	T_d
P	$0,50K$	∞	0
PI	$0,45K$	$\frac{1}{1,2}P_c$	0
PID	$0,60K$	$0,5P_c$	$0,125P_c$

Nota-se que a sintonia de acordo com a regra do último ganho fornece um controlador PID

$$G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 0,6K_0 \left(1 + \frac{1}{0,5P_c s} + 0,125P_c s \right) = 0,075K_0 P_c \frac{(s + 4/P_c)^2}{s} \quad (4.6)$$

que possui um polo na origem e dois zeros em $s = -4/P_c$.

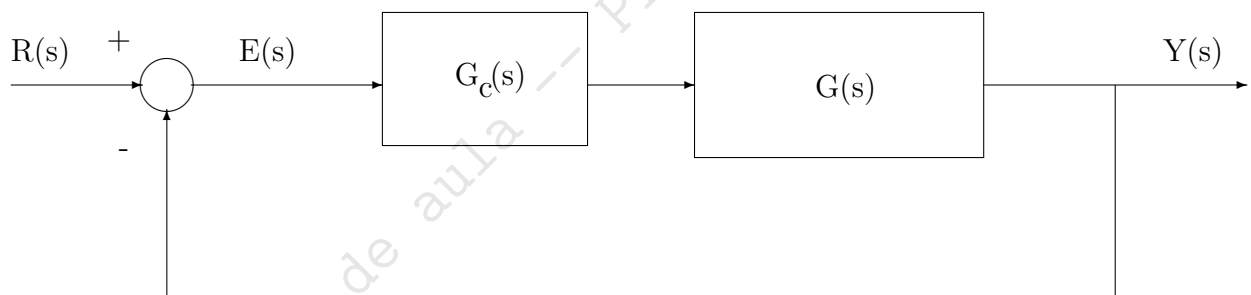
4.3 Exemplos

Exemplo 1

Seja a malha da figura subsequente, em que a função de transferência da planta $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0,2s)(1+0,005s)(1+0,001s)}$$

e G_c representa um controlador incorporado ao sistema. Aplicando os métodos de Ziegler & Nichols, projete sistemas de controle P, PI e PID e verifique a resposta a um degrau unitário nos três casos.



Solução

Para a resolução deste problema, recorre-se a *scripts* em Matlab.

Em primeiro lugar, é necessário verificar:

- **se** os métodos de Ziegler e Nichols se aplicam e;
- em caso afirmativo, **qual** dos métodos aplicar.

Assim, verifica-se, inicialmente, **se** a resposta do sistema em malha aberta, ou seja, somente com a presença da planta $G(s)$, quando sujeita a uma entrada em degrau unitário, possui a forma de um “S” para que o primeiro método seja aplicável. O *script* em Matlab a seguir foi utilizado:

```
%Determinacao da FT da planta do sistema:
clear all;close all;
nump=1;den1=[1 1]; den2=[0.2 1]; den3=[0.005 1];
den4=[0.001 1];
```

```

den12=conv(den1,den2);
den123=conv(den12,den3);
denp=conv(den123,den4)
printsys(num,denp);
t1=0:0.01:5;
[yp,xp]=step(num,denp,t1); plot(t1,yp,'w');grid;
xlabel('tempo(s)'); ylabel('amplitude');
title('Resposta do sistema em malha aberta a um degrau unitario');

```

A resposta do sistema em malha aberta é mostrada na figura 25, onde verifica-se que o formado da curva permite a utilização do método da curva “S” para a obtenção dos parâmetros L e T . Graficamente, obtém-se $L = 0,15$ e $T = 1,3$;

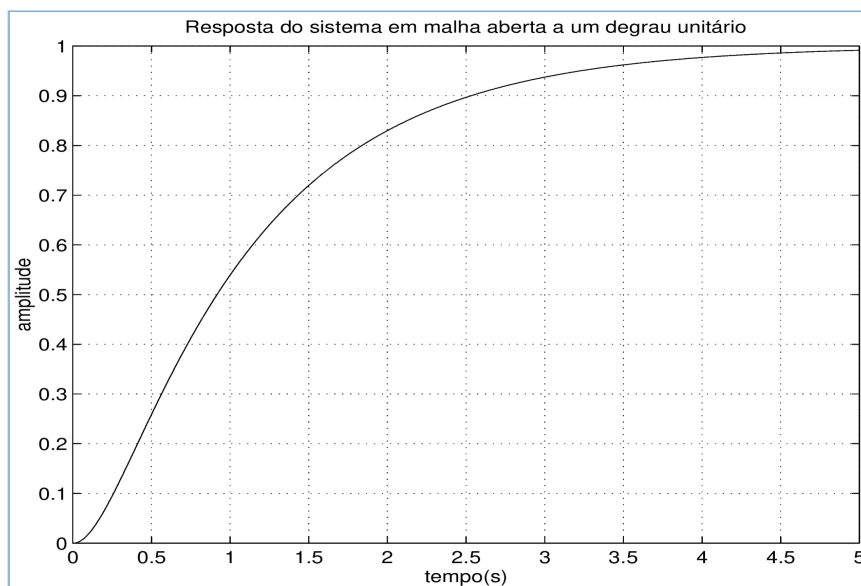


Figura 25: Resposta em malha aberta da planta $G(s)$ a um degrau unitário

Uma das formas genéricas de controlador PID é dada pela eq. 4.3, que é exatamente a utilizada no método de Ziegler & Nichols. As equações correspondentes ao método da curva “S” são implementadas em Matlab conforme as instruções a seguir, e os controladores P, PI e PID são simultaneamente obtidos. Os resultados são apresentados nos gráficos da figura ??.

```

%Determinacao dos controladores:
L=0.15; T=1.3;
numsis=T/L;
densis=denp;
[nummfp,denmfp]=cloop(numsis,densis,-1);
[yp,xp]=step(nummfp,denmfp,t1); plot(t1,yp,'w');
xlabel('tempo(s)'); ylabel('amplitude');
title('Resposta do sistema em malha fechada com o controlador P');grid;
figure;

%Controlador PI:
KP=0.9*T/L;
TI=L/0.3;

```

```

numkpi=KP*[TI 1]; denkpi=[TI 0];
[numpI,denpI]=series(numkpi,denkpi,nump,denp);
[nummfpi,denmfpi]=cloop(numpI,denpI,-1);
[ypi,xpi]=step(nummfpi,denmfpi,t1);
plot(t1,ypi,'r');xlabel('tempo(s)');ylabel('y(t)'); grid;
xlabel('tempo(s)'); ylabel('amplitude');
title('Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PI');

%Controlador PID:
KP=1,2*T/L; TI=2*L; TD=0,5*L;
numkpid=KP*[TI*TD TI 1]; denkpid=[TI 0];
numPID=conv(numkpid,nump)
denPID=conv(denkpid,denp)
[nummfpid,denmfpid]=feedback(numPID,denPID,1,1,-1);
[ypid,xpid]=step(nummfpid,denmfpid,t1);figure
plot(t1,ypid,'w');grid;xlabel('tempo(s)');ylabel('y(t)');
xlabel('tempo(s)'); ylabel('amplitude');
title('Resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID');

```

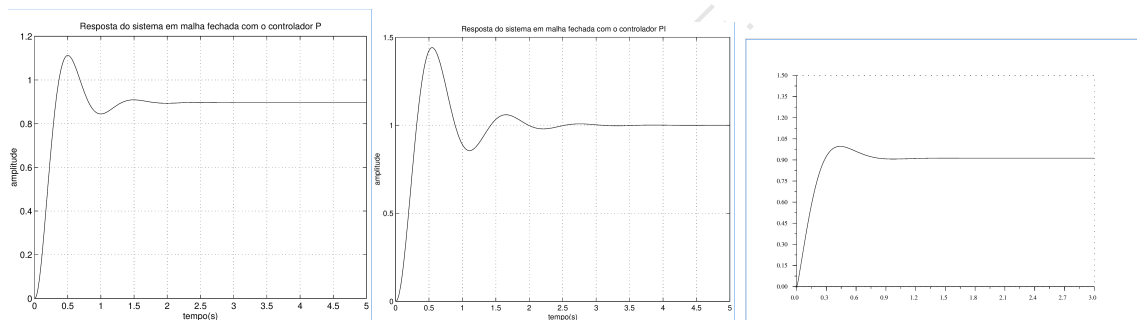


Figura 26: Simulações de um sistema de primeira ordem

Exemplo 2

Ainda com respeito à malha do problema anterior, considere a função de transferência da planta $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 110s^2 + 800s - 20000}$$

Pede-se projetar, utilizando os métodos de Ziegler e Nichols, um controlador PID a ser colocado no ramo direto (em série com a planta) de um sistema de controle com realimentação unitária negativa.

Solução

Novamente, verifica-se a possibilidade e o tipo de método de Ziegler e Nichols a ser aplicado.

Pelo primeiro critério de Routh-Hurwitz, não é difícil perceber que o sistema, em malha aberta, é instável, pois um dos coeficientes da equação característica é menor que zero. De fato,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 110s^2 + 800s - 19999}$$

A simulação desta FT a um degrau unitário (com o auxílio do Octave) fornece a resposta dada na fig. 27. Conclui-se, portanto, que é impossível utilizar o primeiro método de Ziegler e Nichols. Recorre-se, então, ao segundo método.

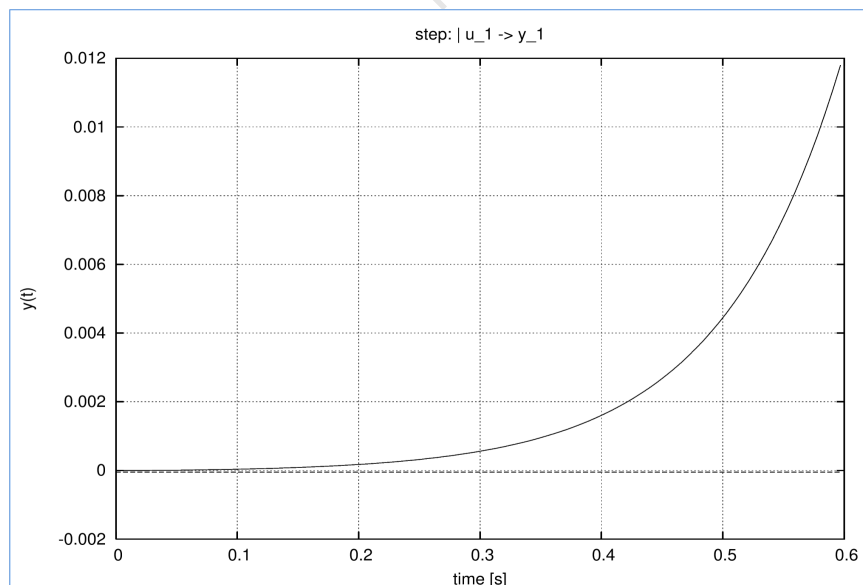


Figura 27: Resposta em malha aberta de $Y(s)/R(s) = 1/(s^3 + 110s^2 + 800s - 19999)$ a um degrau unitário

Inicia-se a determinação de um controlador proporcional cujo ganho K_0 promova uma oscilação mantida (sistema marginalmente estável) quando o sistema em malha fechada é submetido a um impulso unitário. A maneira mais simples de efetuar tal ajuste, analiticamente, é através do Critério de Routh-Hurwitz.

Considera-se um controlador proporcional com ganho K_0 em série com a planta. A equação

característica do sistema em malha fechada, com realimentação unitária, fica

$$1 + \frac{K_0}{s^3 + 110s^2 + 800s - 20000} = 0 \Rightarrow s^3 + 110s^2 + 800s - 20000 + K_0 = 0$$

Constroi-se a tabela de Routh-Hurwitz

s^3	1	800	0
s^2	110	$K_0 - 20000$	0
s^1	$\frac{108000 - K_0}{110}$		
s^0	$K_0 - 20000$		

Para que o sistema seja estável (e, marginalmente estável é uma condição de estabilidade) é necessário que:

1. todos os coeficientes sejam positivos. Assim,

$$K_0 > 20000$$

2. não deve haver trocas de sinal na primeira coluna:

$$\frac{108000 - K_0}{110} > 0 \Rightarrow K_0 < 108000$$

3. se $K_0 = 108000$, a linha inteira de s^1 se anula. Quando uma linha inteira é nula, a linha imediatamente anterior àquela que se anulou fornece os coeficientes do polinômio auxiliar, cujas raízes são os polos que tornam o sistema marginalmente estável (oscilação mantida). No caso em questão, com $K_0 = 108000$ tem-se

$$110s^2 + 88000 = 0 \Rightarrow s = \pm \sqrt{800}j$$

4. a frequência natural do sistema nesta condição é determinada, $\omega_0 = \sqrt{800} = 28,3 \text{ rad/s}$. O período crítico é, então,

$$P_c = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,22 \text{ s}$$

Graficamente, confirma-se o valor acima, com o auxílio do Octave, vide fig. 28

5. com o auxílio da tabela correspondente ao segundo método de ZN, obtemos os valores para os parâmetros do controlador PID, a saber,

$$\begin{aligned} K_p &= 0,6K_0 = 64800 \\ T_i &= 0,5P_c = 0,11 \\ T_d &= 0,125P_c = 0,0275 \end{aligned}$$

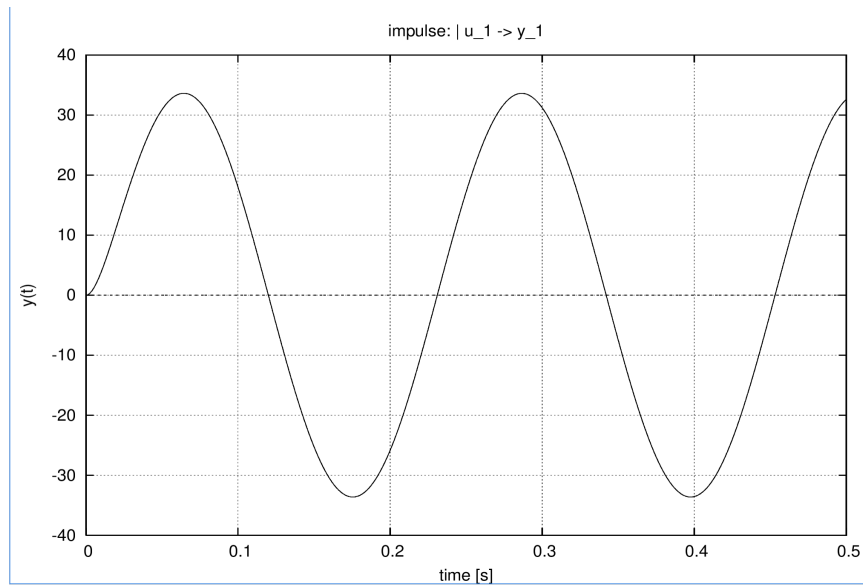


Figura 28: Resposta ao impulso unitário para $K_0 = 108000$.

Isto fornece o controlador PID

$$G_c = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 64800 \left(1 + \frac{1}{0,11s} + 0,0275s \right) \Rightarrow$$

$$G_c = \frac{196,02s^2 + 7128s + 64800}{0,11s}$$

6. simulação do sistema a uma entrada conhecida, por exemplo, degrau unitário. O primeiro passo é obter a FTMF já com o controlador acoplado,

$$FTMF = T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{196,02s^2 + 7128s + 64800}{0,11s^4 + 12,1s^3 + 284,08s^2 + 4928s + 64800}$$

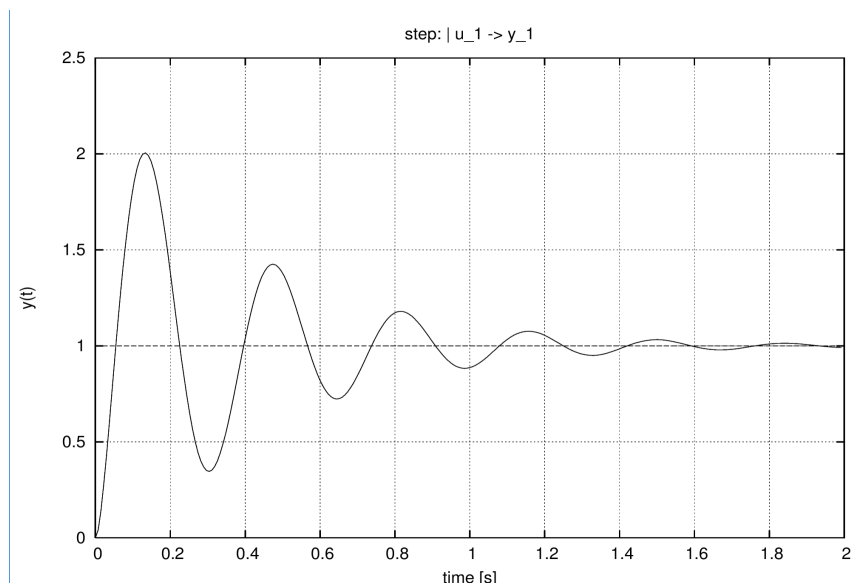


Figura 29: Resposta ao degrau unitário para o sistema controlado.

Com auxílio do Octave, obteve-se a resposta mostrada na fig. 29, quando o sistema foi submetido a um degrau unitário, na qual pode-se observar que o valor do sobressinal é excessivo (100%). Há necessidade de se efetuar um ajuste fino nos parâmetros estimados através do método de Ziegler-Nichols. Ressalta-se, no entanto, que, sem o controlador, a planta era instável, o que demonstra a eficácia do projeto de acordo com tais regras.

A tarefa de sintonizar o controlador de forma a obter um sobressinal máximo de 25% é deixada como exercício para o estudante. Para tanto, deve-se recorrer a softwares como o Matlab, Scilab, Octave ou similar.

Notas de aula – Prof. F. Trigo

5 CRITÉRIOS DE DESEMPENHO GLOBAIS

Um *critério* ou *índice de desempenho* é a tradução matemática do comportamento global de um sistema dinâmico através de uma função a ser maximizada ou minimizada. O sistema de controle é *ótimo* em relação a determinado critério se os parâmetros de projeto forem escolhidos de modo a tornar o índice de desempenho máximo ou mínimo. Dorf (1998) define índice de desempenho como “uma medida quantitativa do desempenho de um sistema [...] escolhido de modo que a ênfase seja dada a especificações de sistema importantes”.

Geralmente, procura-se ajustar os parâmetros do sistema de controle de forma que o índice escolhido atinja um valor mínimo, por exemplo: quais as características de um sistema de suspensão ativa que tornam a oscilação da cabine dos passageiros mínima? Quais os parâmetros de trabalho de uma turbina a gás para que o consumo seja mínimo? Qual a distribuição de massa em uma estrutura para que a espessura das vigas de sustentação sejam mínimas?

Perceba que “minimizar um índice” significa obter o ajuste que melhor atende às especificações que, muitas vezes, podem ser conflitantes. Assim, cabe aos engenheiros a tarefa de, além de projetar o sistema com base no critério escolhido, julgar a necessidade de efetuar novas correções, em função das necessidades e recursos disponíveis.

5.1 Critérios de desempenho

Critérios de desempenho são formulados em termos da minimização de uma integral genérica de um índice de desempenho I do tipo

$$I = \int_0^T f(e(t), r(t), c(t), t) dt \quad (5.1)$$

onde $e(t)$, $r(t)$, $c(t)$ são respectivamente a função de erro, a entrada de referência e a saída do sistema. Os critérios mais utilizados são descritos brevemente a seguir.

1. Critério ISE

O critério ISE (*Integral of the Square of the Error*) é definido como

$$ISE \triangleq \int_0^T e^2(t) dt \quad (5.2)$$

O limite superior é um tempo finito selecionado de forma arbitrária, sendo que uma boa escolha é o tempo de assentamento T_a . Este critério penaliza fortemente grandes

erros, porém levemente os pequenos. Faz decrescer rapidamente um grande erro inicial; consequentemente, apresenta resposta rápida e oscilatória, com pequena margem de estabilidade.

2. Critério ITSE

Define-se o critério ITSE (*Integral of Time multiplied by the Squared Error*) como

$$ITSE \triangleq \int_0^T t e^2(t) dt \quad (5.3)$$

A minimização deste critério permite obter controladores cujo efeito é penalizar levemente os grandes erros iniciais e fortemente os erros menores ao longo do processo. O desempenho de sistemas de controle projetados utilizando este índice é superior aos obtidos com o ISE.

3. Critério IAE Define-se o critério IAE (*Integral of Absolute magnitude of the Error*) como

$$IAE \triangleq \int_0^T |e(t)| dt \quad (5.4)$$

Projetos utilizando este critério apresentam bom desempenho apenas em sistemas cujo amortecimento seja razoável e que possuam resposta transitória satisfatória. Embora difícil de implementar, é o mais difundido.

4. Critério ITAE

O critério ITAE (*Integral of Time multiplied by Absolute Error*) possui características de baixo sobressinal e bom amortecimento. A grande vantagem deste critério em relação aos demais é sua maior seletividade, ou seja, o valor mínimo da integral é facilmente identificado em função da variação dos parâmetros de projeto.

$$ITAE \triangleq \int_0^T t |e(t)| dt \quad (5.5)$$

5. Outros critérios

Existe também a possibilidade de criar índices de desempenho baseados na combinação de um ou mais dos critérios acima, gerando os chamados *índices mistos*. Dois exemplos de índices mistos seriam

$$IM1 = \int_0^T t(|e(t)| + |\dot{e}(t)|) dt \quad (5.6)$$

$$IM2 = \int_0^T (e^2(t) + \dot{e}^2(t)) dt \quad (5.7)$$

e assim por diante.

É interessante efetuamos uma comparação entre os desempenhos dos índices acima para uma FTMF de segunda ordem do tipo $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$, cuja frequência natural é $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, quando solicitada ao um degrau unitário. O gráfico da fig. 30 atesta a elevada seletividade do sistema de controle projetado segundo o critério ITAE.

5.2 Coeficientes para o critério ITAE

Como já vimos, o método ITAE (Integral of Time Multiplied by Absolute Error - Integral do Tempo Multiplicada pelo Erro Absoluto) é baseado na minimização da integral de uma função do erro e do tempo. Os coeficientes que minimizam a integral desta função foram determinados para funções de transferência em malha fechada genéricas na forma

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0} \quad (5.8)$$

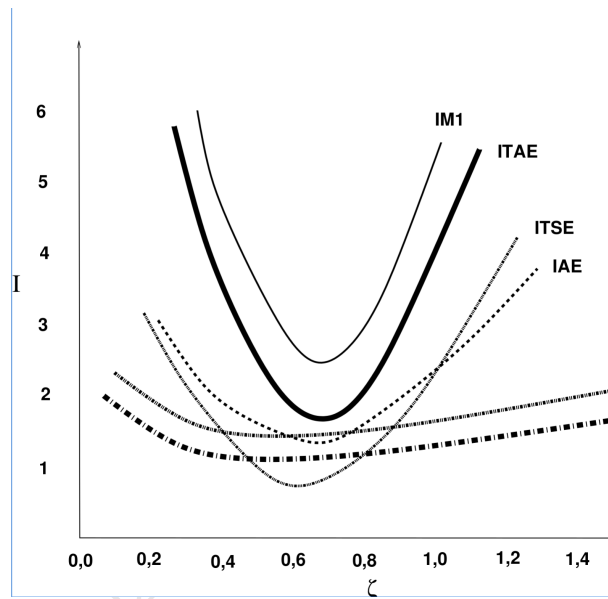


Figura 30: Comparação entre os índices de desempenho

Existem tabelas de coeficientes do método ITAE para funções de transferência em malha fechada de ordem 1 até 6 para entradas em degrau unitário e em rampa. Os coeficientes são dados em função da frequência natural não-amortecida, ω_n . A tabela de coeficientes ITAE para uma entrada em degrau unitário é reproduzida a seguir.

TABELA DE COEFICIENTES ITAE PARA $R(s) = 1/s$

$$\begin{aligned} & s + \omega_n \\ & s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2 \\ & s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\ & s^4 + 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\ & s^5 + 2,8\omega_n s^4 + 5,0\omega_n^2 s^3 + 5,5\omega_n^3 s^2 + 3,4\omega_n^4 s + \omega_n^5 \\ & s^6 + 3,25\omega_n s^5 + 6,6\omega_n^2 s^4 + 8,6\omega_n^3 s^3 + 7,45\omega_n^4 s^2 + 3,95\omega_n^5 s + \omega_n^6 \end{aligned}$$

Quando a FTMF não apresenta apenas um termo constante b_0 no numerador, é necessário filtrar o sinal de entrada de forma a cancelar os zeros introduzidos pelo controlador PID, porém tendo cuidado para manter o ganho estático, ou seja, $T(s=0)$. Tal procedimento será melhor compreendido através do exemplo a seguir.

Vale destacar ainda que o coeficiente de amortecimento ótimo selecionado com base no critério ITAE é 0,7. Para um sistema de segunda ordem, a resposta ao degrau é rápida e a ultrapassagem percentual é de 4,6%.

5.3 Projeto de controladores PID pelo método ITAE

O projeto de controladores pelo método ITAE é explicado através de um exemplo e devida simulação em computador, utilizando programas como Matlab, Octave ou Scilab, sendo os dois últimos de código aberto.

Seja, portanto, a planta de segunda ordem dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0,26s)}$$

Para esta planta, projete um controlador PID a ser colocado no ramo direto com realimentação negativa e unitária para que o sistema, solicitado à entrada em degrau unitário, possua as seguintes características de resposta: tempo de acomodação $T_a \leq 2$ segundos; coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$. Utilize o método ITAE.

Solução

O diagrama abaixo ilustra a configuração solicitada:

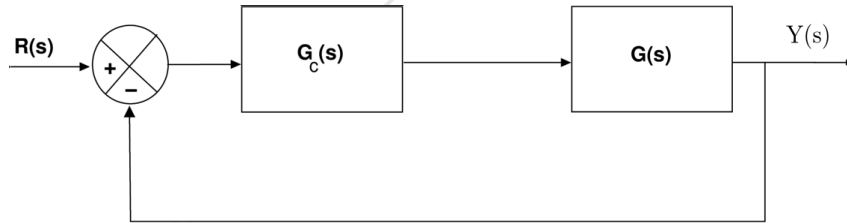


Figura 31: Diagrama de blocos para o exemplo

Utilizando a expressão analítica para o tempo de assentamento determina-se ω_n :

$$T_a = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 2 \Rightarrow \omega \geq 4 \text{ rad/s}$$

Adota-se $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$.

A FTMF (associação de G_c e G em série e fechamento da malha através do ramo de realimentação) para o diagrama de blocos acima fica:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i + 0,26 s^3 + 1,26 s^2 + s}$$

Como nas expressões do critério ITAE o termo de maior ordem em s possui coeficiente 1, divide-se a expressão anterior por 0,26. Dessa forma,

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{0,26} \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + \frac{1,26+K_d}{0,26} s^2 + \frac{K_p+1}{0,26} s + \frac{K_i}{0,26}}$$

Pelo critério ITAE, para uma FTMF de 3ª ordem o polinômio do denominador é

$$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3,$$

e, quando igualado ao denominador da FTMF, fornece equações cujas incógnitas são os ganhos do controlador PID. Assim:

$$\begin{aligned} 1,75\omega_n &= \frac{1,26+K_d}{0,26} \Rightarrow K_d = 0,56 \\ 2,15\omega_n^2 &= \frac{K_p+1}{0,26} \Rightarrow K_p = 7,94 \\ \omega_n^3 &= \frac{K_i}{0,26} \Rightarrow K_i = 16,64 \end{aligned}$$

Tais cálculos foram implementados em um *script* de Matlab, que também permitiu a simulação do sistema controlado a uma entrada em degrau unitário.

```
%Script para projeto de PID pelo metodo ITAE -
Ta=2; zeta=0.5; omega=4/(Ta*zeta);
nump=1; denp=[0.26 1.26 1];
t=0:0.1:6;
Kd=1.75*omega*0.26-1.26;
Kp=2.15*(omega^2)*0.26-1;
Ki=0.26*(omega^3);
numpid=[Kd Kp Ki]; denpid=[1 0];
numc=conv(numpid,nump);
denc=conv(denpid,denp);
[numcmf,dencmf]=cloop(numc,denc,-1);
figure;
[yitae xitae]=step(numcmf,dencmf,t);
plot(t, yitae); grid; gtext('sem pré-compensador'); hold;

%filtro;
numfiltro=Ki;
denfiltro=numcmf;

[numfinal,denfinal]=series(numfiltro,denfiltro,numcmf,dencmf);
[yitae xitae]=step(numfinal,denfinal,t);
plot(t,yitae,'-.');
gtext('com pré-compensador');
title('Resposta a um degrau unitário com o PID ITAE');
xlabel('t(s)'); ylabel('y(t)');
```

A resposta do sistema em malha fechada com o controlador PID calculado acima é dada na figura 32. Verifica-se que, apesar do tempo de assentamento dentro das especificações, o sobressinal é de aproximadamente 30%, considerado muito elevado. O motivo para tal anomalia é a presença de zeros no numerador da FTMF do sistema controlado, pois as equações do método ITAE pressupõem a existência apenas de um valor constante.

O problema é contornado pela introdução de um *pré-compensador* ou filtro $G_f(s)$ em

série e antes do bloco correspondente à função de transferência $T(s)$, de modo a filtrar o sinal de entrada. A função de transferência do pré-compensador deve ser escolhida de tal forma a manter o ganho estático. Portanto, fazendo $s = 0$ na expressão de $T(s)$ verifica-se que o ganho estático é unitário. Assim,

$$G_f(s)T(s)|_{s=0} = 1 \Rightarrow G_f(s) = \frac{K_i}{K_d s^2 + K_p s + K_i}$$

A parte denominada “filtro” no *script* anterior em Matlab é responsável pela simulação do

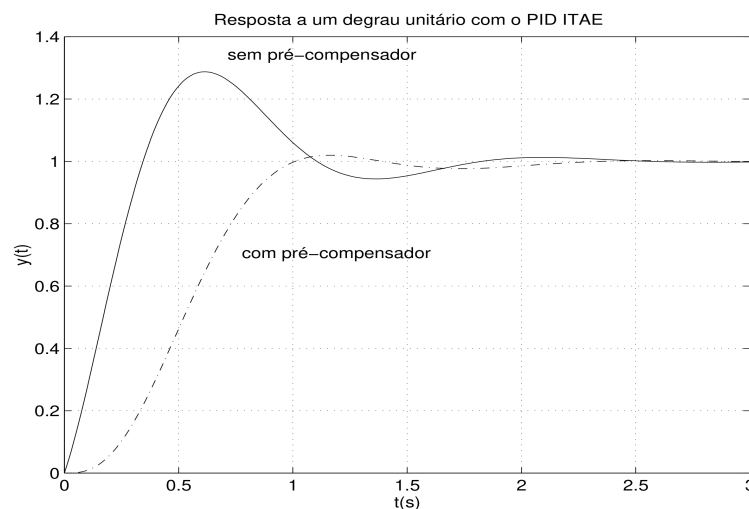


Figura 32: Resposta em malha fechada do sistema do Exemplo a um degrau unitário

sistema com o pré-compensador. No gráfico da figura 32, verifica-se que a presença do filtro provoca a diminuição do sobressinal até cerca de 3%, mantendo a característica de resposta rápida.

Exemplo 3

Um problema comum em indústrias químicas e petroquímicas é o controle de nível de fluidos armazenados em tanques, misturadores e vasos de pressão. Considere a planta dada no diagrama da figura 33, em que se deseja, através da ação de uma bomba, manter constante a altura no tanque 2.

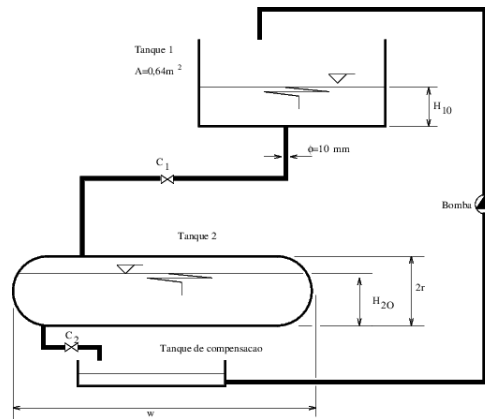


Figura 33: Representação esquemática do sistema de controle de nível de tanque e respectivos parâmetros geométricos

Os parâmetros do modelo são:

$A = 0,64m^2$	área da seção transversal do tanque superior
$q = 0,910^{-3}$	vazão na bomba em m^3/s
$h_{10} = 0,25m$	nível de água no tanque 1
$h_{20} = 0,35m$	nível de água no tanque 2
$w = 1,0m$	largura do tanque 2
$r = 0,25m$	raio do tanque 2
$C_1 = 4,0m^{5/2}$	restrição na saída do tanque 1
$C_2 = 4,0m^{5/2}$	restrição na saída do tanque 2

A função de transferência do sistema em malha aberta é dada por: (??)

$$\frac{H_2}{Q} = \frac{a_3 b_1}{s^2 - (a_1 + a_4)s + a_1 a_4} \quad (5.9)$$

Os valores a_1 , b_1 , a_3 , e a_4 são calculados a partir de:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-C_1}{2A\sqrt{h_{10}}} \\ b_1 &= \frac{1}{A} \\ a_3 &= \frac{C_1\sqrt{h_{10}}}{4h_{10}w\sqrt{r^2 - (r - h_{20})^2}} \\ a_4 &= \frac{-C_2\sqrt{h_{20}}}{4h_{20}w\sqrt{r^2 - (r - h_{20})^2}} \end{aligned}$$

Dessa forma, escolhidos os parâmetros de projeto (dados pelas constantes a_1 , b_1 , a_3 , e a_4) pode-se representar o sistema em malha aberta e controlado em malha fechada por diagramas de blocos conforme mostra a fig. 34:

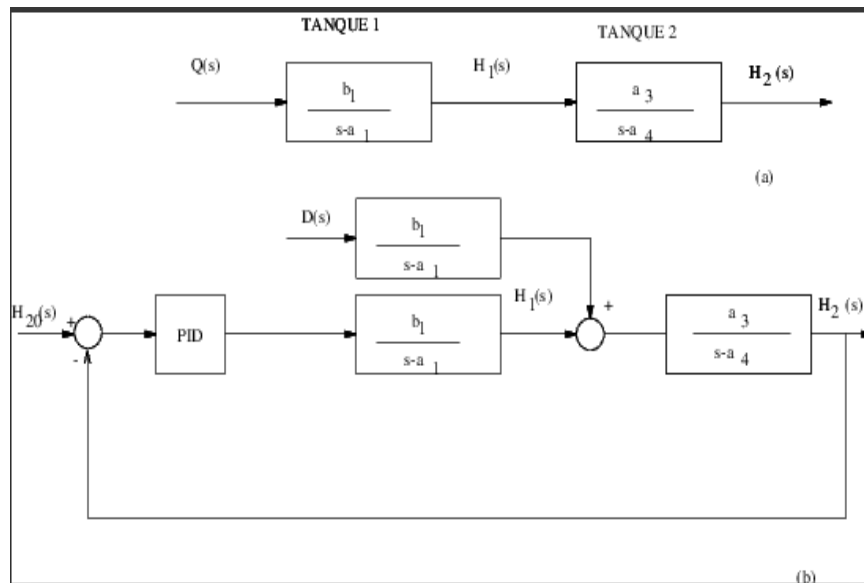


Figura 34: Diagramas de blocos (a): para o sistema original (sem controle - malha aberta) e (b): para o sistema com proposta de controle por malha fechada

Pede-se projetar controladores PID utilizando os métodos de Ziegler & Nichols e ITAE de forma a manter o nível no tanque 2 constante e igual a 0,35m (degrau de amplitude 0,35m). Para efeito de projeto do controlador, desconsidere o distúrbio (no caso, uma vazão $Q_d = 10 \text{ l/s}$ alimentando o tanque 2) mostrado na figura 34.

Solução

1. Método de Ziegler & Nichols

A resposta do sistema em malha aberta a um degrau unitário é dada na Figura 35. O formato da curva permite a utilização do *Método da curva "S"* para se obter os parâmetros:

$$L = 0.0438s$$

$$T = 0.3938s$$

O controlador PID, segundo a tabela de Ziegler & Nichols para a curva "S" será:

$$K_p = 1,2 \frac{T}{L} = 10,8$$

$$T_i = 2.0L = 0,0876$$

$$T_d = 0,5L = 0,0219$$

Assim, a equação do controlador PID por Ziegler & Nichols fica:

$$G_c = K_p \left[\frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \right]$$

Os resultados obtidos estão mostrados abaixo:

>>proj

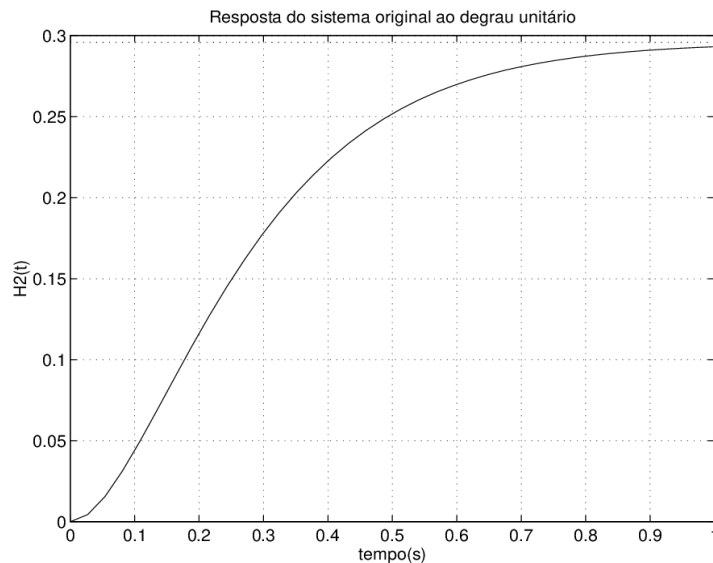


Figura 35: Resposta do sistema em malha aberta a um degrau unitário

$$\begin{aligned} K_p &= 10.7890 \\ T_i &= 0.0876 \\ T_d &= 0.0219 \end{aligned}$$

A resposta do sistema com realimentação a um degrau de amplitude $H_{20} = 0,35 \text{ m}$ é mostrada na Figuras 36. Verifica-se, conforme indicado na Figura 36 para o degrau $H_{20} = 0,35 \text{ m}$,¹ que o sobressinal é de 46,7%, considerado excessivo, e que o tempo de acomodação é de aproximadamente 1,8 segundos.

2. Projeto pelo método ITAE

O controlador projetado pelo método ITAE é da forma

$$G_{ITAE}(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

A associação do controlador ITAE em série com a planta formada pelos dois reservatórios é dada por

$$\begin{aligned} G_{ITAE}(s) \cdot G_{planta}(s) &= \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{a_3 b_1}{s^2 - (a_1 + a_4)s + a_1 a_4} \\ G_{ITAE}(s) \cdot G_{planta}(s) &= \frac{a_3 b_1 (K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^3 - (a_1 + a_4)s^2 + a_1 a_4 s} \end{aligned}$$

¹No caso do controlador projetado segundo o método de Ziegler & Nichols e nos demais escolheu-se a resposta a um degrau $H_{20} = 0,35 \text{ m}$ para a representação do sobressinal em termos de ultrapassagem porcentual pois este degrau é o *setpoint* desejado. Os resultados para um degrau unitário são idênticos.

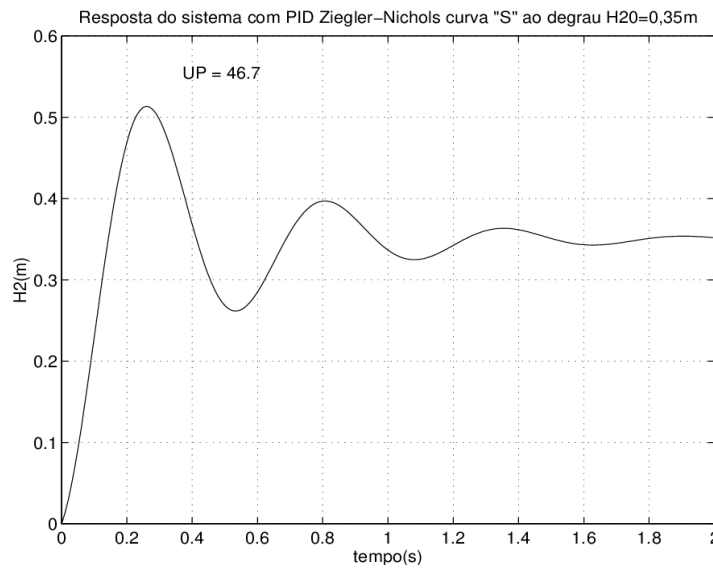


Figura 36: Resposta do controlador PID Ziegler & Nichols a um degrau $H_{20} = 0,35 \text{ m}$

A FTMF para o sistema realimentado fica:

$$T(s) = \frac{a_3 b_1 (K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^3 - (a_1 + a_4) s^2 + a_1 a_4 s + a_3 b_1 (K_d s^2 + K_p s + K_i)}$$

$$T(s) = \frac{a_3 b_1 (K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^3 + (a_3 b_1 K_d - a_1 - a_4) s^2 + (a_3 b_1 K_p + a_1 a_4) s + a_3 b_1 K_i}$$

Adotando como parâmetro de projeto que o tempo de acomodação T_a seja de 1 segundo para uma entrada em degrau e a frequência não-amortecida ω_n seja de 14 rad/s (valores arbitrários que, se atingíveis, tendem a tornar a resposta rápida), calcula-se os ganhos do controlador para o polinômio em s^3 do critério ITAE conforme abaixo:

$$K_d = \frac{1,75 \omega_n + a_1 + a_4 + 4}{a_3 b_1}$$

$$K_p = \frac{2,15 \omega_n^2 - a_1 a_4}{a_3 b_1}$$

$$K_i = \frac{\omega_n^3}{a_3 b_1}$$

Com o auxílio do *script* em Matlab obteve-se:

```
ta =
    1
wn =
    14
Kd =
    0.7972
Kp =
    27.5169
Ki =
    201.1934
```

A resposta do sistema com o controlador PID em malha fechada à entrada em degrau de $H_{20} = 0,35 \text{ m}$ é mostrada na figura 37. Verifica-se que o sobresinal é de $\simeq 26\%$. Isto ocorre pois a utilização das expressões do critério ITAE pressupõe que o denominador da FTMF não possua zeros, o que não é o caso, como já havia ocorrido no exemplo anterior.

Para corrigir tal deficiência utiliza-se um pré-compensador ou filtro para cancelar os zeros da função de transferência, porém mantendo o ganho estático, ou seja $T(0) = 1$. O pré-compensador será então:

$$G_f(s) = \frac{2744}{10,87s^2 + 375,3s + 2744}$$

Este pré-compensador é incorporado à malha do sistema logo após a entrada $H_{20}(s)$. A resposta à entradas em degrau de $0,35 \text{ m}$ está figura 38. O sobresinal não ultrapassa 2% , e o tempo de acomodação é inferior a 1 segundo.

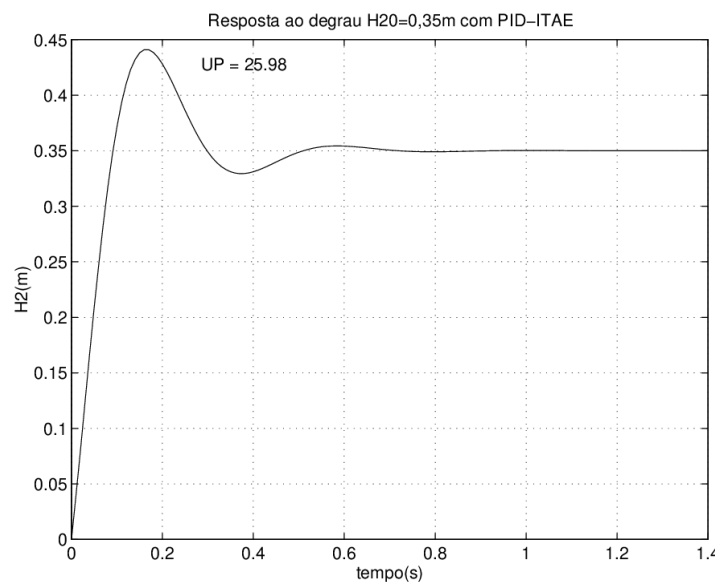


Figura 37: Resposta do controlador PID ITAE sem pré-compensador a um degrau $H_{20} = 0,35 \text{ m}$

Para que este controlador possa ser considerado totalmente satisfatório seria ainda necessário verificar suas características de rejeição ao distúrbio proposto anteriormente (vazão de $10\ell/s$ alimentando diretamente o tanque 2). Tal verificação será deixada como exercício.

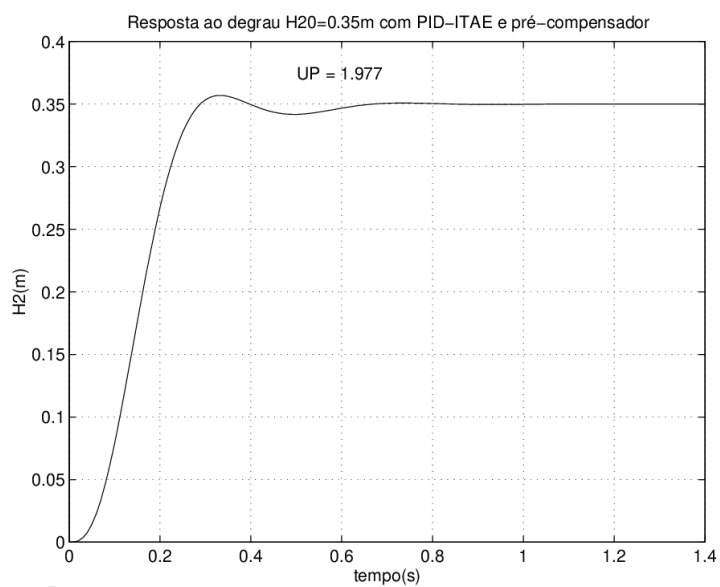


Figura 38: Resposta do controlador PID ITAE com pré-compensador a um degrau $H_{20} = 0,35 m$

6 ANÁLISE DE RESPOSTA TRANSITÓRIA

6.1 Introdução - Sistemas de 1ª e 2ª ordem

Agora que já possuímos uma boa ideia acerca do comportamento do sistema em regime permanente, após “dissipar” a parte transitória, cabe-nos conhecer melhor a resposta transitória uma vez que, muitas vezes, ela é mais importante que o desempenho em regime. O critério ideal para projeto de qualquer sistema é que o erro seja, ou tenda, a zero a qualquer momento. Como isto é impossível, deve-se estabelecer um critério que melhor adapte as características do sistema ao desejado. Para sistemas SISO como os que estamos estudando, é comum efetuar-se a análise da resposta transitória em duas situações:

- para entradas não-periódicas (degrau, rampa, impulso etc.)
- para otimizar o comportamento do erro no estágio inicial

Analisaremos sistemas SISO de 1ª e 2ª ordens; cabe, portanto, defini-los. Em primeiro lugar, *ordem* refere-se ao *maior expoente do polinômio na variável complexa s* , que representa uma função de transferência. Para maior esclarecimento, considere o diagrama da Fig. 39, em que um sistema de controle com realimentação unitária negativa é mostrado.

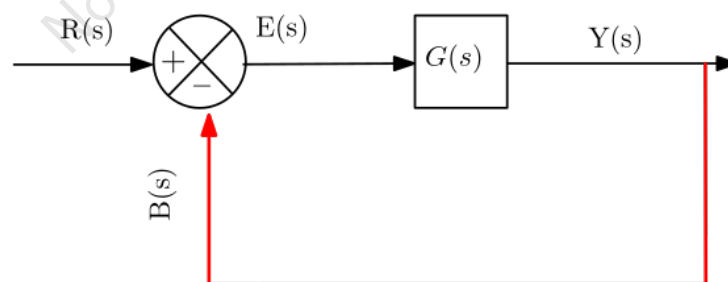


Figura 39: Diagrama de blocos de um sistema genérico em malha fechada

A ordem de uma planta é dada pelo maior expoente em s da função de transferência da planta. Assim, se $G(s)$ é dada na forma genérica

$$G(s) = \frac{1}{\tau s}, \quad (6.1)$$

com τ constante (estudada a seguir) a planta é de primeira ordem. Quando $G(s)$ é dada na forma genérica

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}, \quad (6.2)$$

com ω e ζ constantes (estudadas a seguir), a planta é de segunda ordem.

Por outro lado, a ordem do sistema refere-se à FTMF do sistema como um todo, ou seja, $FTMF = \frac{Y(s)}{R(s)}$. Nos dois casos precedentes, as FTMFs ficariam

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad \text{para a planta de 1a. ordem} \quad (6.3)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{para a planta de 2a. ordem} \quad (6.4)$$

Verifica-se, neste caso particular, que os dois sistemas em malha fechada também são de 1a. e 2a. ordem, respectivamente. Deve-se atentar para o fato de que ordem de uma planta ou sistema é bem diferente de tipo de um sistema, pois este último refere-se às características da FTMA, conforme já vimos.

6.2 Resposta transiente a uma excitação conhecida

Vamos considerar sistemas de 1a. e 2a. ordem e obter sua resposta aos sinais não-oscilatórios degrau e rampa.

6.2.1 Sistemas de primeira ordem

Seja o sistema de primeira ordem representado pelo diagrama de blocos da figura precedente. Com $G(s) = \frac{1}{\tau s}$, a FTMF fica $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$ ¹. Estudemos a resposta deste sistema a uma entrada em degrau unitário, $R(s) = 1/s$.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \Rightarrow \quad (6.5)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{\tau s + 1} \Rightarrow \quad (6.6)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \quad (6.7)$$

Utilizando a transformada inversa de Laplace para a equação acima, chega-se à seguinte resposta temporal:

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau} \quad (6.8)$$

Por sua vez, o erro é dado por

$$e(t) = r(t) - y(t) = 1 - (1 - e^{-t/\tau}) = e^{-t/\tau} \quad (6.9)$$

$$\text{No limite, com } t \rightarrow \infty \Rightarrow e(t) = 0 \quad (6.10)$$

O valor τ é denominado constante de tempo do sistema. Observe que, para $t \rightarrow \infty$, a resposta tende à unidade, tão mais rapidamente quanto menor o valor de τ . A resposta do

¹A planta $G(s)$ representa tipicamente um circuito RC ou um sistema de controle de temperatura.

sistema corresponde a 63,2% da resposta final para $t = \tau$, como pode ser facilmente verificado substituindo-se $t = \tau$ na eq. 6.8. Valores para a resposta $c(t)$ e o erro $e(t) = r(t) - c(t)$ são mostrados nos gráficos da Fig. 40, para vários múltiplos de τ .

Conclui-se que, para $t \geq 4\tau$, a resposta mantém-se a 2% do valor final, limite este que será explorado no projeto de sistemas de controle.

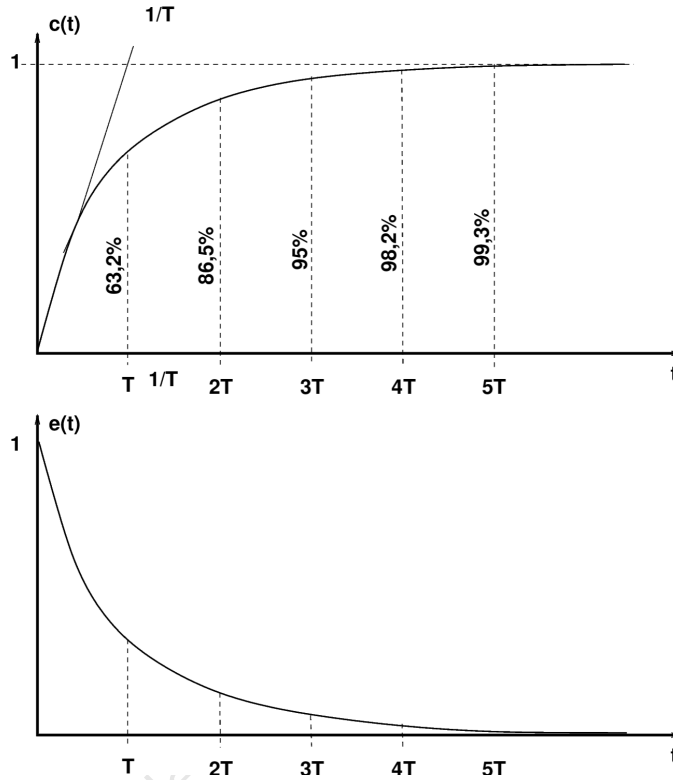


Figura 40: Resposta de um sistema de primeira ordem um degrau unitário

A resposta a uma rampa, $R(s) = 1/s^2$ ficaria

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{\tau s + 1} \quad (6.11)$$

$$Y(s) = \frac{k_1}{\tau s + 1} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s^2} \quad (6.12)$$

Utilizando o método visto nas seções anteriores, calculamos as constantes k_1 , k_2 e k_3 por

$$k_1 = (\tau s + 1)Y(s)|_{s=-1/\tau} = \tau^2 \quad (6.13)$$

$$k_3 = s^2 Y(s)|_{s=0} = 1 \quad (6.14)$$

$$k_2 = \frac{d}{ds} [s^2 Y(s)]_{s=0} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\tau s + 1} \right]_{s=0} = \frac{-1}{(\tau s + 1)^2} \cdot \tau |_{s=0} = -T \quad (6.15)$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{\tau^2}{\tau s + 1} - \frac{\tau}{s} + \frac{1}{s^2} \quad (6.16)$$

que, após aplicação da transformada inversa de Laplace, fornece

$$y(t) = \tau e^{-t/\tau} - \tau + t \quad \text{ou, ainda,} \quad (6.17)$$

$$y(t) = \tau(-1 + e^{-t/\tau}) + t \quad (6.18)$$

Interessa-nos o erro e , desta forma,

$$e(t) = r(t) - y(t) = t - [\tau(-1 + e^{-t/\tau}) + t] = T(1 - e^{-t/\tau}) \quad (6.19)$$

A equação acima mostra-nos que, para $t = \infty$,

$$e(\infty) = \tau, \quad (6.20)$$

ou seja, o erro em regime permanente é constante, tornando evidente que a resposta do sistema não é capaz de acompanhar o sinal de entrada. Observa-se que isto ocorre pois a FTMA do sistema representado na Fig. 39 é $G(s) = 1/\tau s$, o que caracteriza um sistema do tipo 1. Conforme estudado no módulo anterior, sistemas do tipo 1 apresentam erro constante em regime permanente; para a eliminação do erro, seria necessária a presença de um integrador no sistema de malha fechada.

O exemplo a seguir apresenta simulações de um sistema de 1a. ordem submetido a entradas em degrau unitário e rampa unitária.

Exemplo 1

Ainda com respeito ao diagrama de blocos da Fig. 39, seja $G(s) = 1/0,4s$ (constante de tempo $\tau = 0,4$) a FT da planta. Determinar a resposta em regime permanente a um degrau unitário e a uma rampa unitária na entrada.

Solução

O código da Fig. 41, em linguagem do Matlab, foi utilizado para as simulações. Os gráficos correspondentes às respostas temporais estão na Fig. 42.

Com relação aos resultados, cabem alguns comentários. Na Fig. 42(a), quanto maior o valor da constante de tempo τ , mais lenta é a resposta do sistema à excitação em degrau unitário. O aumento na constante de tempo T implica em um sistema que possui maior inércia (massa, térmica, capacitância) e, portanto, possui aceleração mais lenta.

Quanto à entrada em rampa, Fig 42(b), observa-se que o aumento na constante de tempo leva a resposta a desviar-se mais do sinal de referência, pelos mesmos motivos citados anteriormente. Conforme resultado analítico, eq. 6.20 o erro em estado estacionário é igual à constante de tempo T . Ressalta-se que a correção necessária para que o sinal de rampa seja efetivamente rastreado pela resposta do sistema deveria ser obtida através de um controlador (no caso, integral).

6.2.2 Sistemas de segunda ordem

Seja um servossistema rotativo composto por um controlador proporcional de constante K e elementos de inércia e dissipativos, respectivamente momento de inércia e atrito viscoso. O

```

% Exemplo sistema de 1a. ordem
% resposta ao degrau
T=0.8 %constante de tempo do sistema
numg=1; deng=[T 0];
printsys(numg,deng,'s');
[numft,denft]=feedback(numg,deng,1,1,-1); %determinação da FTMF
t=0:0.05:2; %criação do vetor de tempos
rampa=t; %criação do sinal de rampa
[y1, x1]=step(numft,denft,t); %simulação a uma entrada em forma de degrau unitário
plot(t,y1,'c'); %gráfico da resposta c(t);
grid; %acrescenta uma grade ao gráfico
gtext('T=0,8'); %insere texto no grafico utilizando o mouse
title('Sistema de 1a. ordem - resposta ao degrau unitário') %título do gráfico
xlabel('tempo (s)'); %rotulo do eixo das abcissas
ylabel('amplitude'); %rotulo do eixo das ordenadas
close all;

%resposta aa rampa
[y2,x2]=lsim(numft,denft,rampa,t); %simulacao a uma entrada em rampa durante o tempo t.
plot(t,rampa,'b'); hold;
plot(t,y2,'c'); gtext('T=1,2');
title('Sistema de 1a. ordem - resposta à rampa unitária')
xlabel('tempo (s)');
ylabel('amplitude');

```

Figura 41: Sequência de comandos (“script”) em Matlab para simulação de um sistema de 1a. ordem

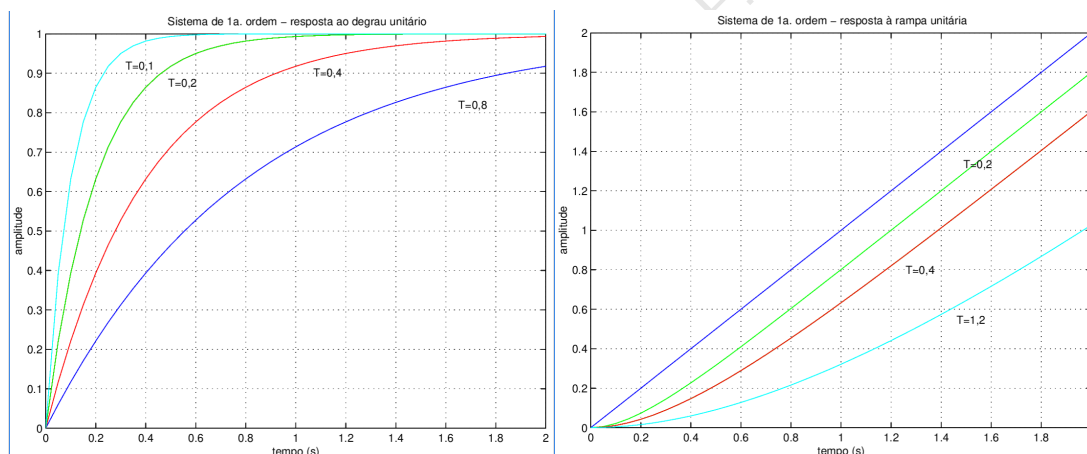


Figura 42: Simulações de um sistema de primeira ordem

TMA para um sistema deste tipo garante que

$$J\ddot{c}(t) + b\dot{c}(t) = T(t) \quad (6.21)$$

com J momento de inércia da carga e b coeficiente de atrito viscoso. A saída $y(t)$ do sistema deve ser entendida como uma posição angular; entretanto, para uniformização na notação, optou-se por manter $y(t)$.

Utilizando transformadas de Laplace na eq. 6.21 com condições iniciais nulas obtém-se a função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + b)}, \quad (6.22)$$

ou seja, uma planta de segunda ordem.

Considere, agora, que um controlador proporcional será adicionado ao sistema de malha

fechada que contém tal planta, conforme mostrado na Fig. 43.

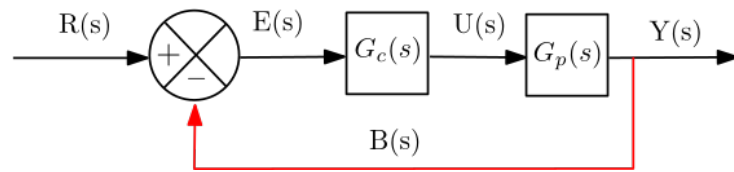


Figura 43: Planta de 2a. ordem em malha fechada

A FTMF para esta malha fica

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + bs + K} \quad (6.23)$$

Dividindo o numerador e o denominador por J obtém-se

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \frac{b}{J}s + \frac{K}{J}} \quad (6.24)$$

Na literatura de controle é praxe fazer-se

$$\begin{aligned} \frac{K}{J} &= \omega_n^2 \\ \frac{b}{J} &= 2\zeta\omega_n \end{aligned}$$

onde ω_n é a frequência natural do sistema e ζ é o coeficiente de amortecimento. Com tais definições, a FTMF de um sistema de segunda ordem assume a forma-padrão (ou genérica) da eq. 6.25

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.25)$$

De acordo com a eq. 6.25, o comportamento dinâmico de um sistema de 2a. ordem fica caracterizado por 2 parâmetros, ω_n e ζ . Esta afirmação pode ser comprovada quando os polos da FTMF são calculados:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \implies \quad (6.26)$$

$$p_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} \implies \quad (6.27)$$

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (6.28)$$

Portanto, de acordo com a eq. 6.28, tem-se:

- se $0 < \zeta < 1 \implies$ polos de malha fechada são complexos conjugados
- se $\zeta = 1 \implies$ dois polos reais e iguais, o sistema não oscila
- se $\zeta > 1 \implies$ dois polos reais negativos distintos, o sistema não oscila

Vamos analisar agora a resposta transitória para um sistema de segunda ordem quando submetido a uma entrada em degrau unitário $r(t) = u(t)$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[u(t)] = 1/s$, e a um impulso unitário, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, para os três casos descritos acima.

$0 < \zeta < 1$, **caso subcrítico ou subamortecido**, com $r(t) = u(t)$ e $r(t) = \delta(t)$

Quando $0 < \zeta < 1$, o sistema é dito subcrítico ou subamortecido. A resposta a uma entrada em degrau unitário fica, no domínio da frequência,

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.29)$$

Utilizando tabelas de transformadas de Laplace chega-se à resposta temporal²

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \Phi) \quad (6.30)$$

Os novos parâmetros ω_d e Φ são denominados respectivamente frequência amortecida e ângulo de fase e, numericamente, correspondem a:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (6.31)$$

$$\Phi = \arccos(\zeta) \quad (6.32)$$

A constante Φ indica o quanto a resposta (saída) do sistema atrasa em relação à entrada (excitação). A dinâmica da resposta oscilatória em sistemas subamortecidos pode ser entendida quando se analisa o comportamento dos polos da FTMF no plano complexo em função do coeficiente de amortecimento ζ , conforme mostrado na Fig. 44.

Verifica-se, nesta figura, que os polos complexos possuem módulo

$$|p_{1,2}| = \sqrt{(-\zeta\omega_n)^2 + (\pm\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2} = \omega_n \quad (6.33)$$

²Este resultado é obtido efetuando-se a decomposição em frações parciais e aplicando-se a transformada inversa de Laplace a cada termo separadamente. No entanto, como sistemas de 2a. ordem submetidos a uma entrada em degrau são comuns, tabelas que fornecem resultados diretos são disponíveis na literatura de controle.

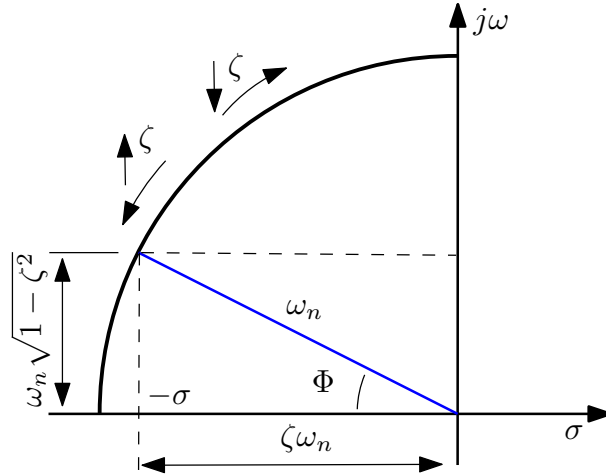


Figura 44: Representação no plano s das raízes de um sistema de 2^a ordem para ω_n constante em função de ζ

e que o cálculo do ângulo de fase na eq. 9.21 justifica-se pois

$$\cos\Phi = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} \Rightarrow \Phi = \cos^{-1}(\zeta) \quad (6.34)$$

Observa-se que, à medida que o coeficiente de amortecimento diminui, a parte real negativa diminui, tornando o sistema mais oscilante (maiores amplitudes de oscilação e pouco amortecimento), com a resposta totalmente oscilatória quando $\zeta = 0$. Por outro lado, o aumento no coeficiente de amortecimento torna o sistema menos oscilante pois a parte real negativa da resposta aumenta em módulo, tendendo a um sistema totalmente sem oscilação quando $\zeta = 1$.

Quando o sistema recebe um impulso unitário, a única diferença na resposta é a ausência do polo em $s = 0$ que existe quando a entrada é um degrau. Assim, a resposta temporal é dada por

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad (6.35)$$

cujo comportamento dinâmico em função de ζ é idêntico ao descrito para o caso anterior. Cabe ressaltar que a resposta acima poderia ter sido obtida derivando-se a eq. 6.30 em relação a t , uma vez que o pulso unitário é a derivada temporal do degrau unitário.

$\zeta = 1$, **caso crítico**, com $r(t) = u(t)$ e $r(t) = \delta(t)$

Quando o sistema é crítico, os polos a FTMF com entrada em degrau unitário e seus polos ficam, de acordo com a eqs. 6.28 e 6.29

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \quad (6.36)$$

$$p_{1,2} = -\omega_n \quad (6.37)$$

$$p_3 = 0 \quad (6.38)$$

A expansão em frações parciais da eq. 6.29 fornece

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}, \quad (6.39)$$

e a resposta no tempo fica

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), \quad (6.40)$$

ou seja, a resposta é não-oscilatória e exponencialmente crescente até 1.

Para uma entrada em impulso unitário, a resposta é:

$$y(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad (6.41)$$

$\zeta > 1$, **caso superamortecido**, com $r(t) = u(t)$ e $r(t) = \delta(t)$

Um sistema supercrítico, quando submetido a uma entrada em degrau unitário, apresenta 3 polos reais, sendo um nulo e dois negativos e distintos, conforme mostram as eqs. 6.28 e 6.29. Assim,

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \quad (6.42)$$

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (6.43)$$

$$p_3 = 0 \quad (6.44)$$

A expansão em frações parciais de maneira análoga ao caso anterior fornece:

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})} \quad (6.45)$$

Utilizando tabelas de transformadas de Laplace e manipulações algébricas, chega-se à resposta temporal abaixo:

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \quad (6.46)$$

com $s_1 = \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ e $s_2 = \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$.

Observa-se que, quando ζ for muito maior que 1, um dos polos situar-se-á sobre o eixo real negativo muito afastado da origem. Supondo-se que s_1 seja tal polo, veremos mais adiante no curso que o outro polo (neste exemplo, s_2) pode ser considerado *dominante* em relação a s_1 . Com isso, o efeito de s_1 pode ser desprezado (pois sua influência sobre a resposta decai exponencialmente muito mais rápido que a exercida pelo outro polo) e a resposta temporal simplificada torna-se:

$$y(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (6.47)$$

A resposta a um impulso unitário seria simplesmente a eq. 6.47 sem a unidade e com o sinal do termo exponencial trocado.

Toda a discussão acima pode ser entendida com maior clareza através de gráficos mostrando as respostas no tempo em função do coeficiente de amortecimento ζ .

Os gráficos das figuras 45 e 46 apresentam a resposta de um sistema de segunda ordem em malha fechada dado pela eq. 6.25 respectivamente para entradas em degrau unitário e impulso unitário.

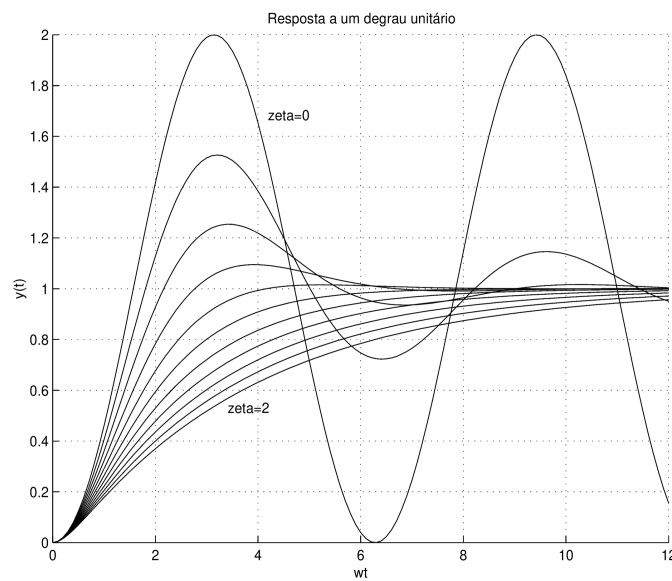


Figura 45: Resposta de um sistema de segunda ordem a um degrau unitário em função do coeficiente de amortecimento ζ

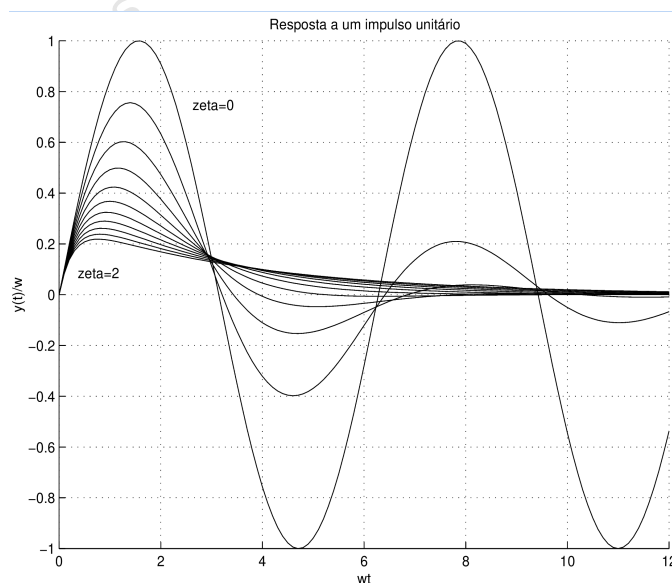


Figura 46: Resposta de um sistema de segunda ordem a um impulso unitário em função do coeficiente de amortecimento ζ

Exemplo 2 - Desempenho de um sistema de 2a. ordem

Seja o diagrama de blocos da Fig. 43. Vamos estudar o desempenho deste sistema, cuja

FTMF é dada pela eq. 6.24. Fazendo $k = 1$, $J = 10$ e $b = 8,0$, pede-se determinar a resposta em regime permanente a um degrau unitário e a uma rampa unitária na entrada.

Solução

O código da Fig. 47, em linguagem do Matlab, foi utilizado para as simulações. Os gráficos correspondentes às respostas temporais estão na Fig. 48.

```
%Exemplo sistema de 2a. ordem
%entrada em degrau;
clear all
k=1; J=10; b=8.0;
numcont=1; dencont=1;
numcont=k;
numg=1; deng=[J b 0];
[numftma,denftma]=series(numcont,dencont,numg,deng); %conecta duas FTs em cascata
printsys(numftma,denftma,'s')
[numftmf,denftmf]=feedback(numftma,denftma,1,1,-1);
t=0:0.1:6;
[ys,xs]=step(numftmf,denftmf,t); %simula entrada em degrau
plot(t,ys,'g'); %grid;
gtext('K=100');
title('Sistema de 2a. ordem - resposta ao degrau unitário');
xlabel('tempo (s)');
ylabel('posição de saída (rad)');

%entrada em rampa
rampa=t;
[yr,xr]=lsim(numftmf,denftmf,rampa,t); %simula entrada em rampa
plot(t,yr,'c'); %grid;
gtext('K=1');
title('Sistema de 2a. ordem - resposta à rampa unitária');
xlabel('tempo (s)');
ylabel('posição de saída (rad)');
```

Figura 47: Sequência de comandos (“script”) em Matlab para simulação de um sistema de segunda ordem

Observando-se as figuras 48 percebe-se que, à medida que o ganho do controlador proporcional aumenta, o sistema torna-se mais “rígido”, isto é oscila menos. Em contrapartida, no caso do degrau, por exemplo, é necessário um tempo maior para que o erro em regime permanente atinja o valor nulo. Para a entrada em rampa, percebe-se que a elevação da valor do ganho proporcional tende a afastar a resposta da rampa procurada, evidenciando a necessidade de utilizar-se um controlador mais complexo.

Como vimos, os valores dos parâmetros ζ e ω_n influenciam bastante a resposta dinâmica de um sistema. Durante o projeto de tais sistemas, o engenheiro pode escolher tais valores de forma a satisfazer necessidades específicas. Os critérios utilizados para tal serão discutidos na próxima seção

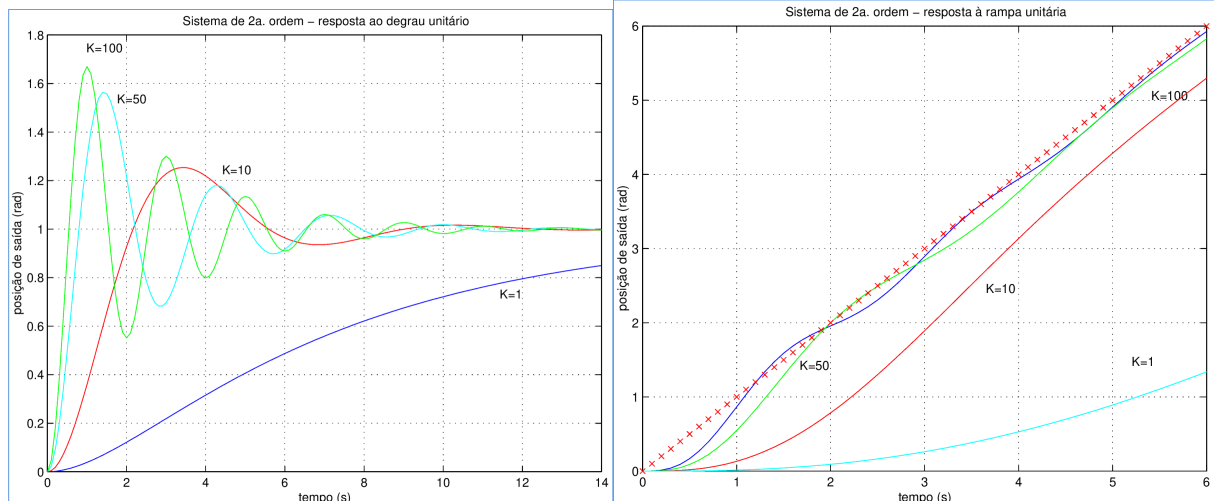


Figura 48: Simulações de um sistema de segunda ordem para entradas em degrau e rampa unitários.

6.3 Especificações de projeto para resposta transitória de sistemas de 2a. ordem

O projeto de um sistema de controle depende das características desejadas da resposta no tempo de tal sistema quando submetido a entradas de teste como o degrau unitário e o impulso unitário. Define-se para sistemas de segunda ordem em malha fechada submetidos a uma excitação em degrau unitário alguns parâmetros utilizados no projeto do controlador visando atender a um desempenho pré-estabelecido. Os parâmetros mais usuais são o *tempo de subida* T_s , *tempo de pico* T_p , *ultrapassagem porcentual* UP , o *máximo pico* M_p e o *tempo de assentamento ou de acomodação* T_a . O gráfico da figura 49 apresenta os parâmetros citados de forma esquemática e definidos conforme se segue:

- tempo de subida T_r : tempo necessário para que a resposta passe de 10 a 90 % de seu valor final, no caso de sistemas superamortecidos, e de 0 a 100% no caso de sistemas sub-amortecidos;
- tempo de tipo T_p : tempo necessário para que a resposta atinja o valor máximo;
- ultrapassagem porcentual UP : máximo valor atingido pela resposta em relação ao sinal unitário de referência;
- máximo pico ou sobre-sinal M_p : valor máximo atingido pela resposta;
- tempo de acomodação T_a : tempo necessário para que a resposta alcance e permaneça dentro de uma faixa de desvio em torno do valor final desejado. Tal faixa é especificada normalmente entre 2% e 5% do valor final.

Para sistemas de segunda ordem em malha fechada com realimentação unitária e negativa sujeitos a uma entrada em degrau unitário, os valores dos parâmetros relacionados acima podem ser analiticamente calculados através das expressões:

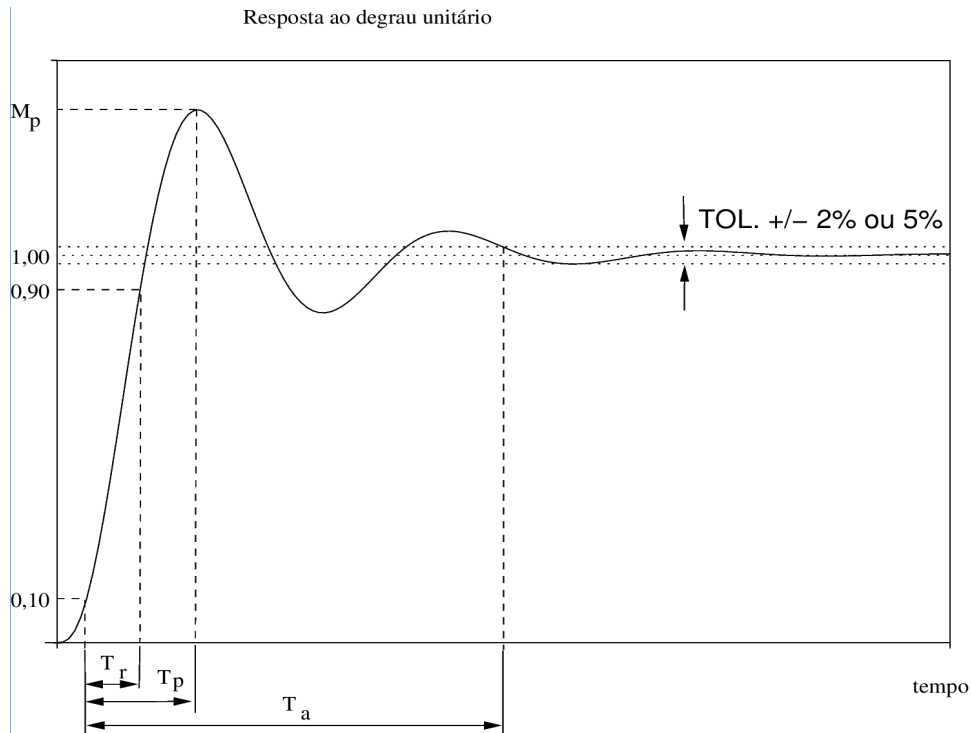


Figura 49: Parâmetros de desempenho de um sistema de controle (adaptado de Dorf & Bishop, 1998; Ogata, 1990)

$$T_r = \frac{\pi - \Phi}{\omega_d} \quad (\Phi \text{ definido na fig. 44}) \quad (6.48)$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (6.49)$$

$$M_p = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (6.50)$$

$$UP = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (6.51)$$

$$T_a(2\%) = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério } 2\%) \quad (6.52)$$

$$T_a(5\%) = 3T = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério } 5\%) \quad (6.53)$$

onde $T = \frac{1}{\zeta\omega_n}$ é a constante de tempo do sistema. Por exemplo, para a faixa de 5% em torno do valor final, são necessárias 3 constantes de tempo pois $T_a(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n}$. Normalmente, especificações de baixo sobre-sinal (ultrapassagem porcentual) e pequeno tempo de acomodação geram respostas antagônicas. Em termos de projeto, trabalha-se com fatores de amortecimento variando entre 0,3 e 0,8 para que seja obtida uma solução de compromisso privilegiando tanto a rapidez na resposta quanto o sobressinal.

7 ESTABILIDADE RELATIVA

7.1 Sistemas de ordem superior

No módulo anterior, abordamos os requisitos de desempenho de sistemas dinâmicos de primeira e segunda ordens. No entanto, em diversas situações práticas, deparamo-nos com sistemas de ordens superiores ¹. A pergunta que surge é: como seria a resposta temporal de sistemas deste tipo? Como veremos a seguir, é possível prever o comportamento do sistema de maior ordem analisando a localização dos polos e zeros da FTMF no plano de Argand-Gauss (ou plano complexo, ou plano “s”).

Seja, portanto, o sistema em malha fechada com uma entrada e uma saída mostrado na fig. 75

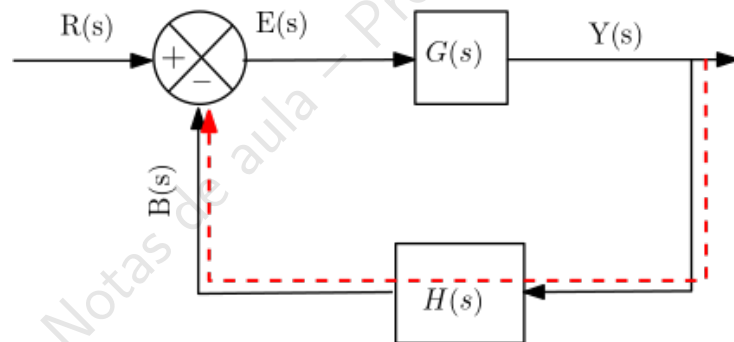


Figura 50: Diagrama de blocos de um sistema genérico em malha fechada

A FTMF de um sistema é sempre da forma

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} = K \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdot (s + z_3) \dots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdot (s + p_1) \cdot (s + p_3) \dots (s + p_n)}, \quad (7.1)$$

com z_i , $i = 1, \dots, m$ são os *zeros* e p_k , $k = 1, \dots, n$ são os *polos* do sistema em malha fechada.

Admitindo uma entrada em degrau de amplitude A , ou seja $R(s) = \frac{A}{s}$, a expansão da eq. 8.8 em frações parciais fornece

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{s + p_i} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k s + \omega_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2}, \quad (7.2)$$

¹A *ordem* de um sistema é equivalente ao maior expoente do polinômio do denominador da função de transferência deste sistema.

com $n = 2r + q$. O primeiro termo do lado direito corresponde ao degrau de amplitude A , o segundo termo representa a somatória dos efeitos dos polos reais e o terceiro denota a contribuição dos polos complexos conjugados. Da mesma forma, A é o resíduo associado ao polo em $s = 0$ referente ao degrau, a_i , $i = 1 \dots, q$ são os resíduos referentes aos polos reais e $b_k s + \omega_k$, $k = 1, \dots, r$ são os resíduos correspondentes aos polos complexos conjugados.

A resposta no tempo para um sistema dinâmico representado pela eq. 7.2 é da forma

$$y(t) = A + \sum_{i=1}^q a_i e^{-p_i t} + \sum_{k=1}^r \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_k t} \text{sen}(\omega_{k_d} t + \Phi_k) \quad (7.3)$$

com $\omega_{k_d} = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$ e $\Phi_k = \cos^{-1}(\zeta_k)$, ou seja, a resposta de um sistema de ordem superior a 2 é composta por uma *soma das respostas individuais de sistemas de primeira e segunda ordens*.

É importante notar que a estabilidade do sistema irá depender do comportamento dinâmico de cada um dos termos da resposta dados na eq. 7.3. Se todos os polos do sistema em malha fechada estiverem no semi-plano esquerdo do plano de Argand-Gauss, todos os termos exponenciais e trigonométricos tenderão a zero quanto $t \rightarrow \infty$, e a resposta do sistema em regime estacionário será $c(\infty) = A$.

A resposta de um sistema de maior ordem pode ser mais facilmente analisada quando um critério de dominância de polos é aplicado. A regra prática que se utiliza é a seguinte: se a razão entre as partes reais dos polos de malha fechada for superior a 5 e se não houver zeros nas vizinhanças dos polos, aqueles polos mais próximos do eixo imaginário irão dominar a resposta do sistema; serão, por isso, denominados polos dominantes.

A explicação para o comportamento de um sistema que possui polos dominantes está ligada aos resíduos. Polos reais puros (sem parte imaginária) localizados no semi-plano esquerdo do plano “s” e que estejam mais afastados do eixo imaginário geralmente apresentam resíduos a_i pequenos, o que torna sua contribuição rapidamente decrescente e tendendo a zero pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^q a_i e^{-p_i t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^q \frac{1}{a_i e^{p_i t}} = 0 \quad (7.4)$$

Assim, quanto “mais negativo” (mais afastado do eixo imaginário) for o polo, mais rápido seu efeito sobre a resposta do sistema irá desaparecer.

De maneira análoga, polos complexos conjugados cuja parte real for negativa e muito distante do eixo imaginário irão apresentar oscilações que decaem a zero muito rapidamente. Assim, a resposta transitória estará condicionada à presença de polos complexos próximos do eixo imaginário, fazendo com que o tempo de acomodação aumente.

7.2 Localização dos polos e a resposta transitória

A localização dos polos da FTMF no plano complexo determina a *forma* de resposta do sistema. Entenda-se *forma da resposta* como uma combinação de efeitos oscilatórios, atenuadores ou amplificadores. A afirmação acima pode ser melhor compreendida através da fig. 51, na qual são mostradas diversas *formas* de resposta de sistemas dinâmicos em função da localização

dos polos no plano de Argand-Gauss.

Na figura, os losangos pretos representam os polos do sistema e os gráficos imediatamente abaixo e à direita mostram a resposta do sistema no tempo. Por simplicidade, os polos conjugados não foram mostrados.

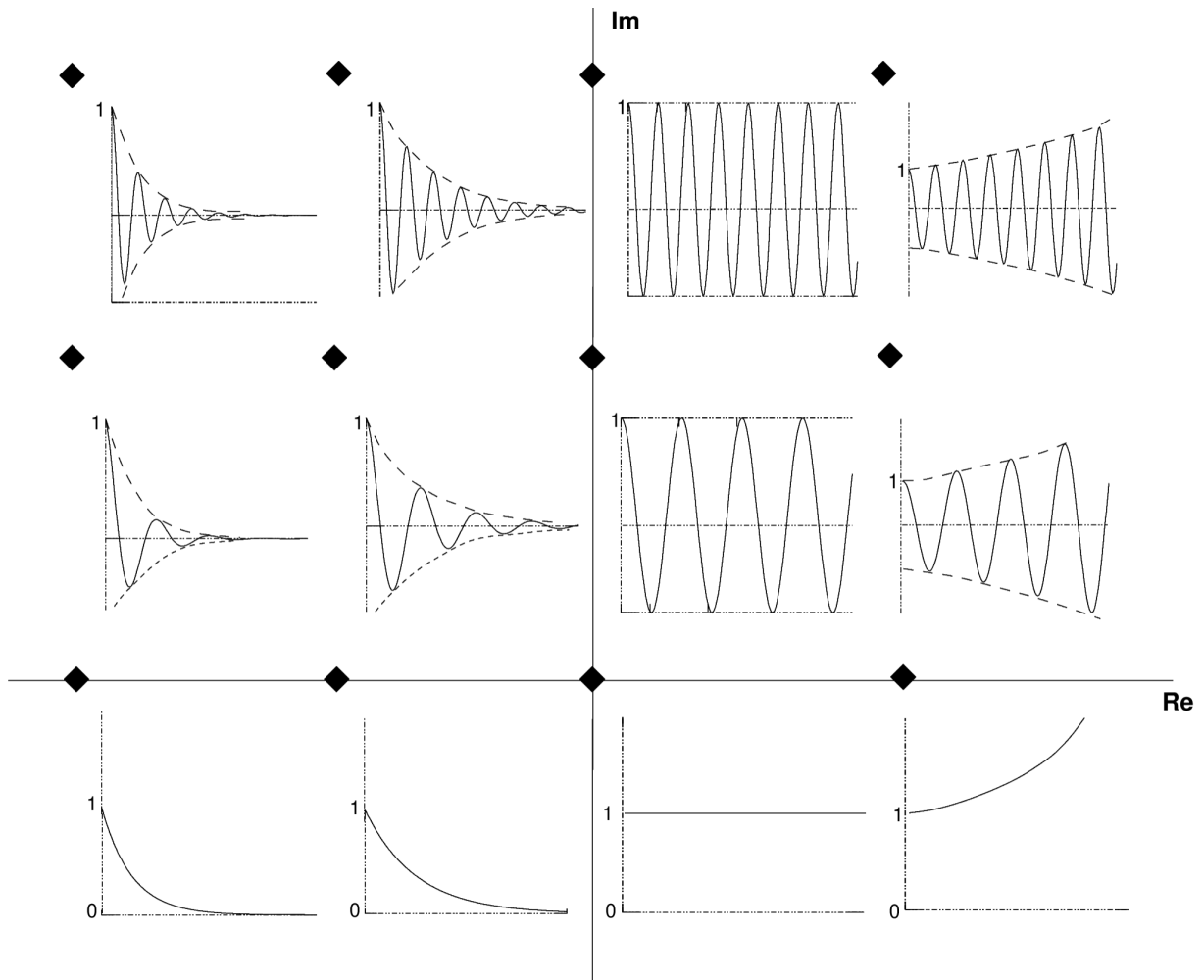


Figura 51: Localização das raízes no plano complexo e a resposta transitória

O *tipo* da resposta transitória do sistema está condicionado à localização dos zeros, pois estes influem diretamente no cálculo dos resíduos. A presença de zeros próximos de polos produz uma tendência ao cancelamento mútuo. O cancelamento ocorre pois a somatória dos efeitos de polos e zeros muito próximos geralmente é desprezível na resposta temporal do sistema. Muitas vezes, durante o projeto de um sistema de ordem superior, ajustam-se os ganhos (de um controlador PID, por exemplo) de forma que permaneça um par de polos dominantes em malha fechada. A presença desses polos reduz efeitos de não-linearidades como folgas, atritos secos ou zonas mortas.

Como vimos, a existência de polos com parte real positiva torna a resposta do sistema instável. Da mesma forma, deve-se evitar a ocorrência de zeros com parte real no semi-plano direito do plano "s". Embora isto não instabilize o sistema em uma fase inicial de operação, com o envelhecimento e desgaste o controle pode tornar-se mais difícil e eventualmente instável.

8 LUGAR DAS RAÍZES

Como sabemos, a estabilidade de um sistema está relacionada à localização dos polos do sistema, obtidos a partir da equação característica. Frequentemente, é necessário efetuar o ajuste de um parâmetro (normalmente um ganho, em um controlador PID, por exemplo) de modo a obter desempenho satisfatório do sistema e, além disso, mantê-lo sempre estável. O Método do Lugar das Raízes (*Root Locus*, como é conhecido nos textos em língua inglesa), é uma maneira gráfica de verificar o “movimento” das raízes da equação característica no plano de Argand-Gauss à medida que o parâmetro de interesse é alterado.

O método foi proposto por W.R. Evans em 1948. Sua grande virtude é a possibilidade de determinar a localização dos polos de malha fechada do sistema (e, portanto, sua estabilidade) trabalhando apenas com os polos da função de transferência de malha aberta. Quando utilizado em conjunto com os critérios de Routh-Hurwitz, é uma ferramenta de grande utilidade no projeto de sistemas de controle. Ressalta-se que a técnica do lugar das raízes não se restringe ao estudo de sistemas de controle pois, devido à sua generalidade, é aplicável ao estudo do comportamento das raízes de qualquer equação algébrica com parâmetros variáveis.

8.1 Propriedades do Lugar das Raízes

É fundamental, para a compreensão das propriedades do lugar das raízes, relembrar as definições de FTMA e FTMF. Assim, considere o sistema de controle básico em malha fechada com uma entrada e uma saída mostrado na fig. 75.

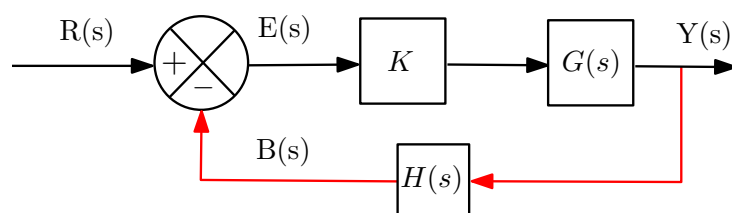


Figura 52: Diagrama de blocos de um sistema genérico em malha fechada

Definem-se

$$\text{FTMA} \triangleq L(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = KG(s)H(s) \quad (8.1)$$

$$\text{FTMF} \triangleq T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} = \frac{KG(s)}{1 + L(s)} \quad (8.2)$$

onde considera-se K um ganho variável. Sabe-se que o comportamento de um sistema

dinâmico depende diretamente das raízes da equação característica, o polinômio do denominador da eq. 8.2. Assim,

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (8.3)$$

A equação acima engloba a FTMA do sistema, eq. 8.1. Neste ponto, pode-se investigar as condições sob as quais a eq. 8.3 é satisfeita. Escrevendo-se a eq. 8.3 como

$$KG(s)H(s) = -1 \quad (8.4)$$

e levando-se em conta que a variável “s” é complexa, pode-se separá-la em suas partes real e imaginária, da seguinte forma:

$$KG(s)H(s) = -1 + 0j \quad (8.5)$$

A igualdade representada pela eq. 8.5 é válida desde que, na forma polar,

$$|KG(s)H(s)| = 1 \quad \text{condição de módulo} \quad (8.6)$$

$$\angle KG(s)H(s) = (2q + 1)\pi, \quad \text{condição de ângulo}, \quad (8.7)$$

com $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Na prática, as condições estabelecidas pelas equações 8.5-7 possuem funções distintas:

- a condição de ângulo é utilizada para determinar a *trajetória* do lugar das raízes no plano complexo;
- a condição de módulo (ou de amplitude) permite que, uma vez desenhado o lugar das raízes, os valores dos ganhos K para as raízes sejam determinados.

Dessa forma, verifica-se que o comportamento dos polos em malha fechada, quando o parâmetro K é variado, pode ser determinado a partir dos polos e zeros da FTMA.

A construção do lugar das raízes é, basicamente, um procedimento gráfico, embora algumas das suas propriedades sejam analiticamente demonstradas. Sua construção baseia-se no conhecimento dos polos e zeros da função $G(s)H(s)$ (no diagrama de blocos acima, com as hipóteses mencionadas). Em primeiro lugar, escreve-se a equação característica $1 + KG(s)H(s) = 0$ como um quociente entre polinômios,

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + K \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdot (s + z_3) \dots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot (s + p_3) \dots (s + p_n)} = 0, \quad (8.8)$$

onde z_i , $i = 1, \dots, m$ são os *zeros* e p_j , $j = 1, \dots, n$ são os *polos* do sistema em *malha aberta*, reais e/ou complexos-conjugados. Aplicando-se as condições das equações 8.6 e 8.7 tem-se:

$$|KG(s)H(s)| = K \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = 1, \quad 0 \leq K < \infty \quad (8.9)$$

$$\angle KG(s)H(s) = \angle \sum_{i=1}^m (s + z_i) - \angle \sum_{j=1}^n (s + p_j) = (2q + 1)\pi \quad (8.10)$$

com $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. A interpretação gráfica da eq. 8.10 é que qualquer ponto de teste s_1 , para pertencer ao lugar das raízes deve satisfazer à seguinte condição:

A diferença entre as somatórias dos ângulos dos vetores que partem dos zeros e daqueles que partem dos polos de $KG(s)H(s)$ até o ponto s_1 é um múltiplo ímpar de π radianos (180°).

Obtido o lugar das raízes, os ganhos K correspondentes aos pontos do LR podem ser determinados a partir da eq. 8.9 escrevendo-a como

$$K = \frac{\prod_{j=1}^n |s + p_j|}{\prod_{i=1}^m |s + z_i|} \bigg|_{s=s_1} \quad (8.11)$$

O valor de K em qualquer ponto s_1 sobre o LR é obtido da equação acima substituindo-se o valor de s_1 na equação. Graficamente, o numerador da eq. 8.11 representa o produto dos módulos dos vetores originados nos polos de $G(s)H(s)$ até s_1 , e o denominador representa o produto dos módulos dos vetores originados nos zeros de $G(s)H(s)$ até s_1 .

A utilização das equações 8.10 e 8.11 para a construção do LR é exemplificada a seguir. Seja

$$KG(s)H(s) = K \frac{s + z_1}{s(s + p_2)(s + p_3)} \quad (8.12)$$

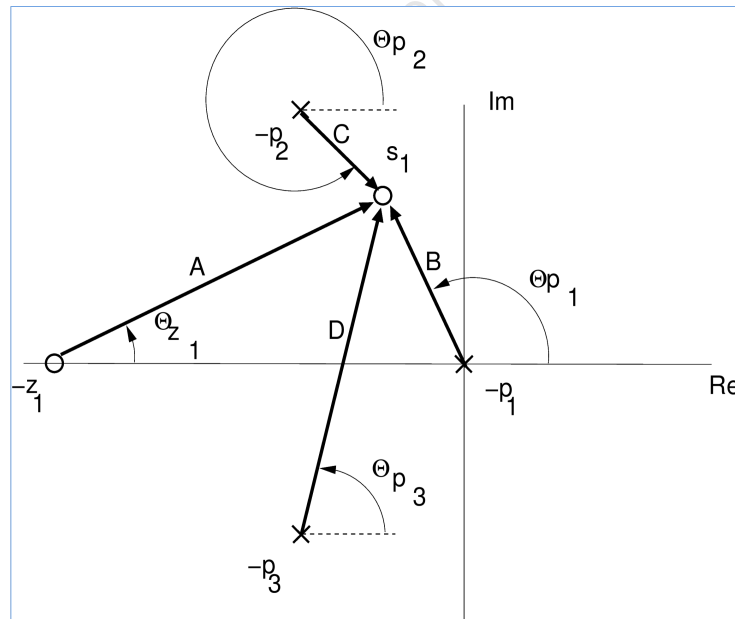


Figura 53: Configuração de polos e zeros de $KG(s)H(s) = K \frac{s + z_1}{s(s + p_2)(s + p_3)}$

A localização dos polos e zeros é arbitrariamente escolhida no plano "s", vide figura 53. Seleciona-se o ponto arbitrário s_1 e traçam-se os vetores desde o zero e os polos até s_1 . Se s_1 realmente pertencer ao LR, deve satisfazer à eq. 8.10. Assim, os ângulos dos vetores mostrados na fig. 53 devem ser tais que

$$\angle(s_1 + z_1) - \angle(s_1) - \angle(s_1 + p_2) - \angle(s_1 + p_3) = \theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} = (2q + 1)\pi,$$

com $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Conforme mostrado na figura, os ângulos devem ser medidos no sentido anti-horário, tendo o eixo real positivo como referência. Caso o ponto s_1 satisfaça à

condição angular, a equação 8.9 é utilizada para descobrir o valor de K , da seguinte forma:

$$|K| = \frac{|s_1||s_1 + p_2||s_1 + p_3|}{|s_1 + z_1|} = \frac{BCD}{A}$$

Dessa maneira, ficam estabelecidas as condições básicas necessárias à construção do diagrama do LR. Porém, com a utilização de um procedimento de tentativa e erro conforme descrito, a busca pelo lugar das raízes em todo o plano complexo seria praticamente impossível. Quando Evans inventou a técnica, a tecnologia de computadores era jurássica. Para contornar o fato, Evans desenvolveu uma ferramenta especial chamada (em inglês) *Spirule*, que auxiliava na tarefa de somar e subtrair ângulos rapidamente, de acordo com as equações vistas. Ainda assim, para que a *Spirule* fosse efetiva, era necessário conhecer o lugar aproximado das raízes da equação características no plano “ s ”.

Com o advento de computadores digitais capazes de rodar rotinas para descobrir raízes de polinômios, tanto a *Spirule* quanto o método de tentativa e erro tornaram-se obsoletos. Muitos programas, inclusive, possuem funções que produzem gráficos do lugar das raízes. Entretanto, o engenheiro deve possuir conhecimento profundo sobre as propriedades do lugar das raízes, seja para rascunhar manualmente o lugar das raízes de sistemas simples ou pouco complexos, seja para interpretar adequadamente os resultados fornecidos pelo computador e agir no sentido de melhorar/corrigir eventuais desvios.

8.2 Construção do Lugar das Raízes

Diversas propriedades do lugar das raízes são utilizadas para obter a representação gráfica do LR. Há autores que propõem métodos com 7, 8 ou 12 passos, dependendo do detalhamento em cada passagem. Neste texto, a descrição de Brogan (1991) será apresentada. O estudante não terá dificuldade em reconhecer os passos equivalentes nas etapas propostas por Ogata (1990) e Dorf & Bishop (1998).

Supondo-se a equação característica escrita na forma dada pela equação 8.3,

$$1 + KG(s)H(s) = 0, \quad \text{ou} \quad 1 + L(s) = 0,$$

em que o parâmetro de interesse, no caso, K , aparece como fator multiplicativo, deve-se proceder da seguinte maneira:

1. Localizam-se os polos e zeros da função de transferência de malha aberta no plano “ s ”, indicando-os com símbolos. Normalmente, usa-se “ x ” para os polos e “ o ” para os zeros.
2. Deseja-se determinar o lugar das raízes quando K varia entre seus extremos, zero e infinito. Nestas condições

$$K \rightarrow 0 \implies \text{os pontos sobre o lugar das raízes são os polos de } G(s)H(s)$$

$$K \rightarrow \infty \implies \text{os pontos sobre o lugar das raízes são os zeros de } G(s)H(s)$$

Justificam-se tais propriedades levando K até os limites zero e infinito na eq. 8.9:

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{1}{K} = \infty \implies s \rightarrow p_r \quad \text{na eq. 8.9}$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} = 0 \implies s \rightarrow z_i \quad \text{na eq. 8.9}$$

Conclui-se, portanto, que os ramos do lugar das raízes começam nos *polos* da FTMA $KG(s)H(s)$ ($K = 0$) e terminam nos zeros de $KG(s)H(s)$ ($K = \infty$) ou no infinito.

3. O número de ramos do lugar das raízes da eq. 8.3 (equação característica) é igual à ordem do respectivo polinômio.

Esta propriedade resulta do fato de que o lugar das raízes se inicia nos polos e termina nos zeros. Se n for o número de polos e m for o número de zeros, $n - m$ ramos do lugar das raízes irão terminar no infinito, ao longo de assíntotas.

4. Simetria do lugar das raízes

O lugar das raízes é simétrico com relação ao eixo real no plano “s”. Isto ocorre pois as raízes da equação característica são complexas conjugadas ou reais.

Outra consequência é: sobre o eixo real só existem segmentos do lugar das raízes se a soma dos números de polos e zeros à direita do segmento for um número ímpar.

Motivo: a contribuição angular de polos e zeros complexos é nula sobre o eixo real e a condição se impõe para satisfazer à eq. 8.10. A fig. 53 ajuda a compreender a contribuição nula dos polos complexos conjugados.

5. Ângulos das assíntotas do lugar das raízes: comportamento do lugar das raízes quando $|s_t| \rightarrow \infty$

Conforme mencionado na etapa 3 acima, quando n , a ordem do denominador da equação característica (número de polos) é distinta da ordem do numerador, m , número de zeros, $n - m$ ramos do lugar das raízes irão se aproximar de zeros no infinito, no plano “s”, ao longo de retas assíntotas quando $|s_t| \rightarrow \infty$ (consequência de $K \rightarrow \infty$). De modo geral, quando $n \neq m$, existirão $(n - m)$ assíntotas cujo ângulo em relação ao eixo real é dado por

$$\theta_q = \frac{(2q + 1)}{n - m} \pi, \quad \text{com } q = 0, \pm 1, \dots, (n - m - 1) \quad (8.13)$$

Exemplo: se $n = 4$ e $m = 1$, de acordo com a eq. 8.13, existirão $n - m = 3$ assíntotas com ângulos

$$\theta_0 = \pi/3 \ (q = 0), \ \theta_1 = \pi \ (q = 1) \ \text{e} \ \theta_3 = 5\pi/3 \ (q = 2).$$

A propriedade acima pode ser demonstrada lembrando que, caso um **ponto de teste** s_t seja selecionado muito longe da origem, isto é, $s_t \rightarrow \infty$, então a contribuição dos polos p_n , z_m para o ganho total pode ser considerada desprezível quando comparada à de s_t e, portanto,

$$\begin{aligned}
& \lim_{s_t \rightarrow \infty} K \frac{(s_t + z_1)(s_t + z_2) \dots (s_t + z_m)}{(s_t + p_1)(s_t + p_2) \dots (s_t + p_n)}, \quad n > m \\
& = \frac{K}{s_t^{n-m}} = K \angle s_t^{-(n-m)} = (2q + 1)\pi \\
& \Rightarrow \angle s_t = \theta_p = \frac{(2q + 1)\pi}{(n - m)}, \quad q = \pm 0, 1, 2, \dots (n - m - 1)
\end{aligned}$$

6. Intersecção das assíntotas com o eixo real (centroide das assíntotas)

O ponto do eixo real onde as assíntotas estão centradas é denominado *centroide das assíntotas* e é dado por

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{polos finitos de } G(s)H(s) - \sum \text{zeros finitos de } G(s)H(s)}{n - m} \quad (8.14)$$

Repara-se que o valor σ_A resultante da equação acima é **sempre** um número **real** pois, dado que os polos e zeros são reais ou pares de complexos conjugados, as partes imaginárias da eq. 8.14 irão sempre se cancelar.

7. Pontos onde o LR encontra o eixo imaginário

Caso existam pontos de encontro entre o LR e o eixo imaginário, estes devem ser determinados pois definem o limite a partir do qual o sistema será instável (caso o ganho K aumente a partir de um certo valor, o LR “salta” para o semiplano direito do plano complexo). Estes pontos são calculados a partir do critério de Routh-Hurwitz, utilizando o polinômio auxiliar.

Veja-se o exemplo abaixo:

Para que valores de K na eq. característica $1 + KG(s)H(s) = s^3 + s^2 + (2 + K)s + 2K = 0$ o lugar das raízes cruza o eixo imaginário?

Observe a tabela de Routh-Hurwitz, Para que a linha em s^1 se anule deve-se ter

s^3	1	$(2+K)$
s^2	1	$2K$
s^1	$(2+K)-2K=2-K$	0
s^0	$\frac{(2-K)2K}{(2-K)}$	0

$$2 - K = 0 \Rightarrow K = 2$$

O polinômio auxiliar, com o valor de K obtido acima, fornece as raízes imaginárias procuradas:

$$s^2 + 2K = 0 \Rightarrow s^2 + 2^2 = 0 \Rightarrow s^2 = -4 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 2j$$

8. Ponto de saída ou chegada, separação ou desdobramento

Caso o LR possua segmentos sobre o eixo real, poderão existir pontos de saída, isto é, pontos nos quais, à medida que K aumenta, o LR deixa o eixo real em direções opostas, adentrando a parte imaginária do plano complexo, ou pontos de chegada, em que o LR retorna ao eixo real. Verifica-se que os ângulos de saída ou chegada, pela propriedade de simetria, possuem tangentes igualmente espaçadas ao longo de 2π radianos. A fig. 54 ilustra esta propriedade.

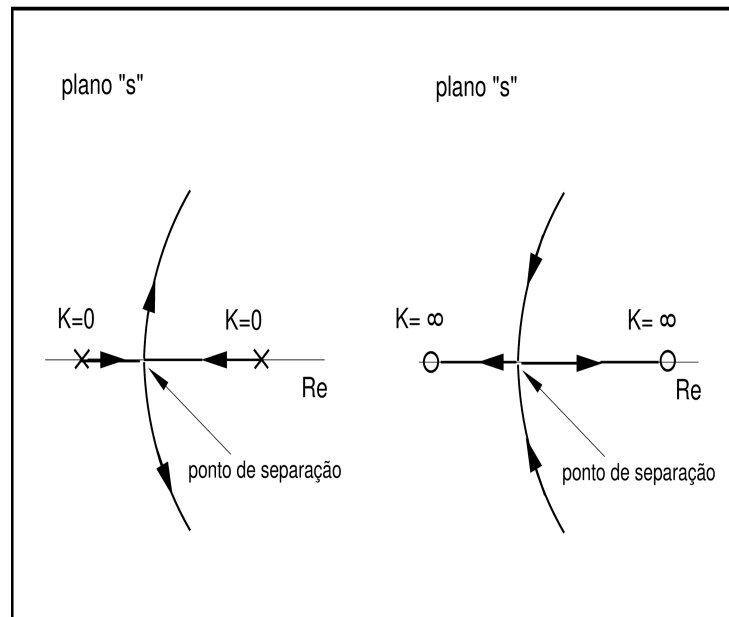


Figura 54: Ponto de separação no eixo real

Para calcular os pontos de saída ou chegada pertencentes ao lugar das raízes de $1 + KG(s)H(s) = 0$ deve-se, em primeiro lugar, escrever uma função $K(s)$ na forma

$$K(s) = -\frac{1}{G(s)H(s)}, \quad (8.15)$$

ou seja, um polinômio em " s ". Os pontos de desdobramento correspondem a máximos ou mínimos locais da função $K(s)$ e, assim, nesses pontos, a eq. 8.15 deve satisfazer à seguinte relação:

$$\frac{dK(s)}{ds} = 0 \quad (8.16)$$

Para demonstrar a eq. 8.16, reescreve-se a eq. 8.15 como (segundo Dorf e Bishop, 1991)

$$\begin{aligned} 1 + KG(s)H(s) = 0 &= 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{D(s) + KN(s)}{D(s)} = 0 &\Rightarrow D(s) + KN(s) = 0 \end{aligned} \quad (8.17)$$

Um pequeno incremento em K , ΔK , resulta em

$$D(s) + (K + \Delta K)N(s) = 0 \quad (\div) (D(s) + KN(s))$$

$$1 + \frac{\Delta KN(s)}{D(s) + KN(s)} = 0$$

Nota-se que $1 + KG(s)H(s) = D(s) + KN(s) = 0$, ou seja, a equação característica original. Ocorre que, para um particular valor de K , essa equação característica irá possuir raízes reais (pois estamos no LR sobre o eixo real) repetidas com multiplicidade ℓ e, então

$$\frac{N(s)}{D(s) + KN(s)} = \frac{C_i}{(s - s_i)^\ell} \quad (\times \Delta K) \Rightarrow \quad (8.18)$$

$$1 + \frac{\Delta KN(s)}{D(s) + KN(s)} = 1 + \frac{\Delta K C_i}{(\Delta s)^\ell} = 0 \Rightarrow \quad (8.19)$$

$$\frac{\Delta K}{(\Delta s)} = -\frac{(\Delta s)^{\ell-1}}{C_i} \quad (8.20)$$

Assim, no limite em que $\Delta s \rightarrow 0$ na eq. 8.20, obtém-se o resultado da eq. 8.16.

É importante notar que a condição dada pela eq. 8.16 é *necessária mas não suficiente*. Em outras palavras, todas os pontos de saída ou chegada pertencentes ao lugar das raízes devem satisfazer à eq. 8.16, porém nem todas as soluções da eq. 8.16 são pontos de separação. Para tal, devem também satisfazer à equação característica, 8.3.

9. Ângulos de saída do LR a partir dos polos e de chegada nos zeros complexos

Não se pode arbitrar (o popular “chute”) os ângulos de saída do LR a partir dos polos e de chegada nos zeros. Estes ângulos são obtidos por meio de um ponto de teste muito próximo ao polo ou zero que se esteja analisando. A lógica que norteia este procedimento é a seguinte: a contribuição angular de um ponto de teste muito próximo de um polo ou zero complexo, para o critério do ângulo, eq. 8.10 é irrisória. Com isso, a diferença entre π radianos e a somatória dos ângulos de todos os polos e zeros que não o que se analisa fornece o ângulo de saída procurado.

Matematicamente, o ângulo de saída do lugar das raízes a partir de um polo é dado por

$$\angle p_q = \pi - \sum_{r=1, r \neq q}^n \theta p_r + \sum_{i=1}^m \theta z_i, \quad (8.21)$$

e o ângulo de chegada em um zero complexo calcula-se por

$$\angle z_q = \pi + \sum_{r=1}^n \theta p_r - \sum_{i=1, i \neq q}^m \theta z_i, \quad (8.22)$$

Lembrando que polos e zeros complexos ocorrem aos pares, conclui-se que os ângulos de partida do polo conjugado e de chegada ao zero conjugado são os negativos dos valores calculados pelas equações 8.21 e 8.22. O diagrama da fig. 55 ilustra o procedimento para o cálculo.

De acordo com a fig. 55, suponha que se queira determinar os ângulos de partida dos

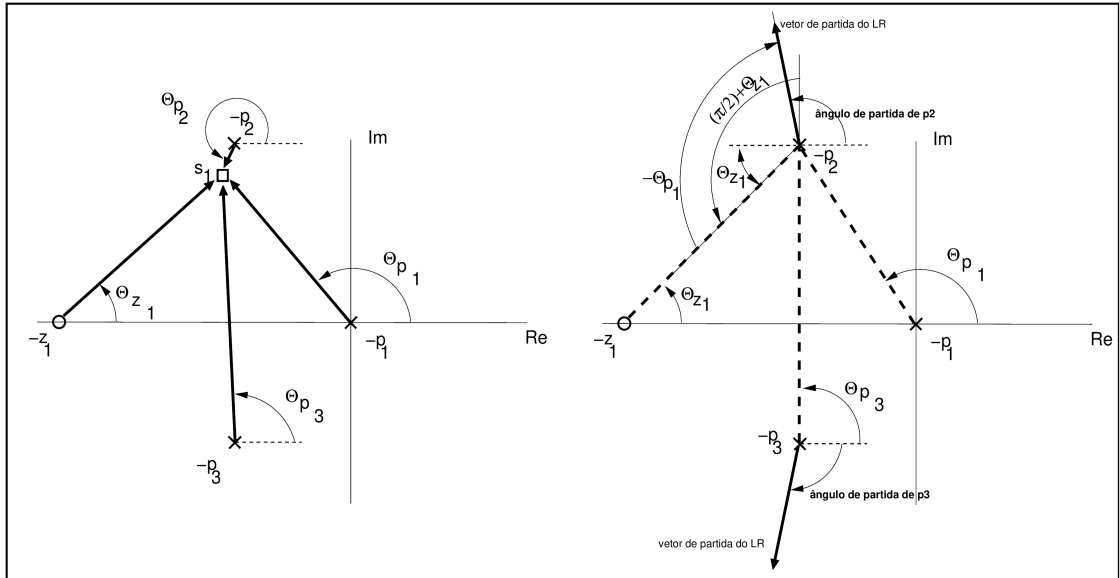


Figura 55: Procedimento para o cálculo dos ângulos de partida dos polos complexos

polos complexos p_2 e p_3 . Assim, utilizando-se a eq. 8.21 e propriedades geométricas (da própria figura) tem-se:

$$\begin{aligned}\theta_{p_2} &= \pi - (\theta_{p_3} + \theta_{p_1}) + \theta_{z_1} \implies \\ \theta_{p_2} &= \pi - (\pi/2) - \theta_{p_1} + \theta_{z_1} \implies \\ \theta_{p_2} &= (\pi/2 + \theta_{z_1}) - \theta_{p_1}\end{aligned}$$

e, por simetria, $\theta_{p_3} = -\theta_{p_2}$.

10. Determinar outras raízes do LR

Outras raízes da eq. característica que pertencem ao lugar das raízes do sistema em malha fechada são determinadas a partir do critério do ângulo de fase, eq. 8.10. Assim, partindo-se da eq. 8.8 e definindo $L(s) = KG(s)H(s)$, para um ponto de teste s_t a relação angular deve ser válida. Portanto,

$$L(s) = KG(s)H(s) \Rightarrow \angle L(s_t) = (2q + 1)\pi \quad (8.23)$$

11. Ganho K em $s = s_t$

Finalmente, o ganho K_t na raiz específica s_t origina-se das equações 8.9 ou 8.11, calculada neste ponto,

$$\frac{1}{K_t} = \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} \bigg|_{s=s_t} \quad \text{ou} \quad K_t = \frac{\prod_{j=1}^n |s + p_j|}{\prod_{i=1}^m |s + z_i|} \bigg|_{s=s_t} \quad (8.24)$$

8.2.1 Aplicação do método

Ilustra-se o método desenvolvido através de um exemplo.

Exemplo 1

Considere, para o diagrama da fig. 75, as seguintes funções de transferência:

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+5}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

Pede-se construir o lugar das raízes para $K \geq 0$ e determinar o valor de K para o qual o coeficiente de amortecimento do sistema a malha fechada seja 0,707, se tal solução existir.

Solução

1. Polos e zeros da FTMA

$$L(s) = KG(s)H(s) = K \frac{s+4}{s(s^2+4s+5)}$$

Os polos são $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -2 \pm j$, e o zero é $z_1 = -4$. Marcam-se estes polos ("x") e zeros ("o") no plano complexo (vide fig. 56).

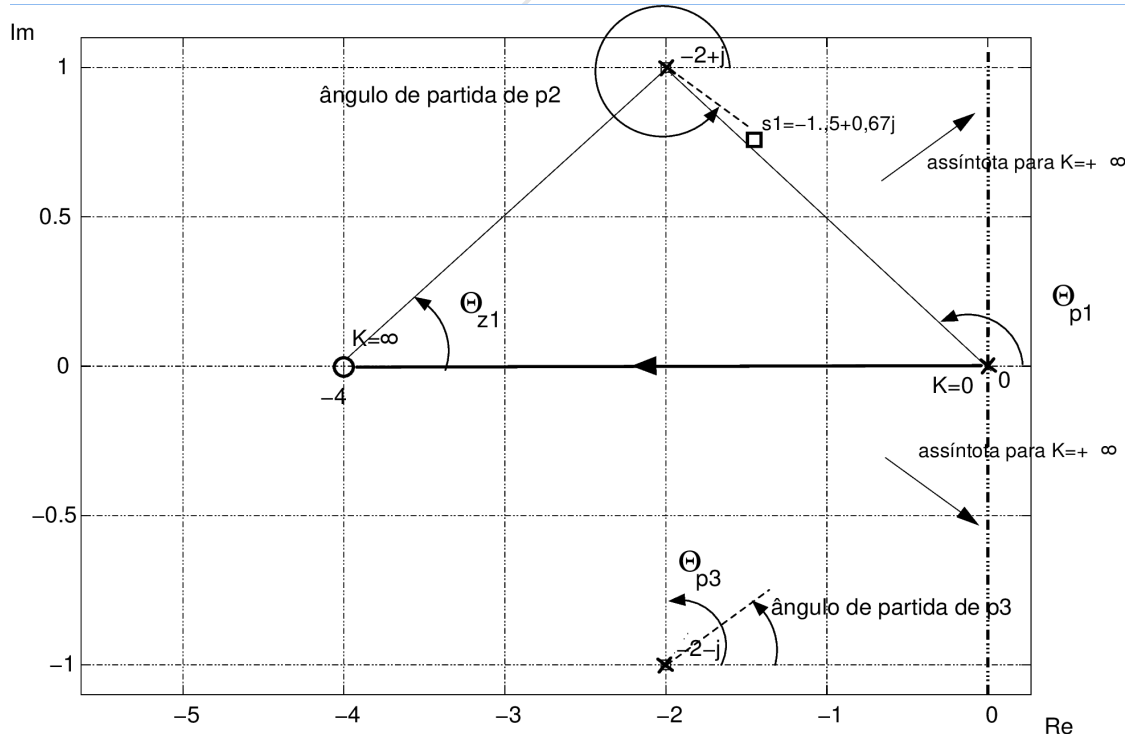


Figura 56: Passos iniciais para a contranção do LR

2. Início e final do LR (inclui também o item 3 do procedimento descrito)

Há $n = 3$ polos e $m = 1$ zero. Assim, existem 3 ramos do LR, sendo que $n - m = 2$ iniciam-se nos polos e terminam no infinito.

3. Simetria do lugar das raízes

Sobre o eixo real, só pertencem ao LR segmentos que possuem número ímpar de polos e zeros à sua direita. No caso em questão, pertence ao LR. o segmento $[0, -4]$.

4. Ângulos das assíntotas em relação ao eixo real.

Como $n - m = 2$, existem duas assíntotas, cujos ângulos são:

$$\begin{aligned}\theta_q &= \frac{(2q+1)}{n-m} \pi \Rightarrow \\ \theta_0 &= \pi/2 \quad (q=0) \\ \theta_1 &= 3\pi/2 \quad (q=1)\end{aligned}$$

5. Centróide das assíntotas

Pela eq. 8.14,

$$\sigma_A = \frac{(0 - 2 + j - 2 - j) - (-4)}{2} = 0$$

6. Pontos de intersecção com o eixo imaginário

Escreve-se, inicialmente a eq. característica:

$$1 + P(s) = s^3 + 4s^2 + (K + 5)s + 4K = 0$$

Elabora-se a tabela de Routh-Hurwitz:

s^3	1	$(5+K)$
s^2	4	$4K$
s^1	$\frac{4(5+K)-4K}{4} = 5$	0
s^0	$\frac{5K-4 \cdot 0}{5} = K$	0

Verifica-se que não existe valor de K para que a linha correspondente a s^1 se anule; portanto, o LR não cruza o eixo imaginário. Observe que este era um resultado esperado, uma vez que o próprio eixo imaginário possui duas assíntotas.

7. Pontos de saída ou chegada no eixo real

Utilizando-se as eq. 8.15 e 8.16, a partir da eq. característica tem-se

$$\begin{aligned}K(s) &= -\frac{s^3 + 4s^2 + 5s}{s + 4} \Rightarrow \\ \frac{dK(s)}{ds} &= -\frac{(3s^2 + 8s + 5)(s + 4) - (s^3 + 4s^2 + 5s)}{(s + 4)^2} \Rightarrow \\ \frac{dK(s)}{ds} &= -\frac{3s^3 + 12s^2 + 8s^2 + 32s + 5s + 20 - s^3 - 4s^2 - 5s}{(s + 4)^2} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dK(s)}{ds} &= -\frac{2s^3 + 16s^2 + 32s + 20}{(s+4)^2} \Rightarrow \\ \frac{dK(s)}{ds} = 0 &\Rightarrow -\frac{2s^3 + 16s^2 + 32s + 20}{(s+4)^2} = 0 \Rightarrow \\ s^3 + 8s^2 + 32s + 10 &= 0 \Rightarrow s_1 = -5,37 \quad s_{2,3} = -1,32 \pm 0,36j\end{aligned}$$

O único ponto possível para que o LR deixasse o eixo real seria $s_1 = -5,37$; este ponto, porém, está fora do lugar das raízes, pela regra da simetria. Portanto, não existe um ponto **no eixo real** a partir do qual o LR caminha para parte imaginária do plano complexo.

8. Ângulos de saída a partir dos polos complexos e de chegada aos zeros complexos

Não existem zeros complexos, portanto não há ângulos de chegada. Quanto aos ângulos de saída dos polos complexos, tem-se, pela eq. 8.21, para o polo $p_2 = -2 + j$,

$$\begin{aligned}\angle p_2 &= 180^\circ - (\theta_{p_1} + \theta_{p_3}) + \theta_{z_1} \\ \angle p_2 &= 180^\circ - (153 + 90) + 27^\circ \\ \angle p_2 &= -36^\circ = +324^\circ\end{aligned}$$

Por simetria, $\angle p_3 = 36^\circ$. Salienta-se que os ângulos θ_{p_1} e θ_{z_1} são obtidos por relações trigonométricas a partir dos valores constantes do gráfico.

9. Outras raízes pertencentes ao LR

Averigua-se, através do critério do ângulo, a presença de outras raízes sobre o LR. Seja, por exemplo, o ponto $s_t = -1,5 + 0,67j$. Da fig. 56 obtemos:

$$\begin{aligned}\tan \theta_{p_1} &= \frac{0,67 - 0}{0 - (-1,5)} = 0,45 \Rightarrow \theta_{p_1} \simeq 156^\circ \\ \tan \theta_{p_2} &= \frac{0,67 - 1}{-1,5 - (-2)} = -0,59 \Rightarrow \theta_{p_2} \simeq 327^\circ \\ \tan \theta_{p_3} &= \frac{0,67 - (-1)}{-1,5 - (-2)} = 3,34 \Rightarrow \theta_{p_3} \simeq 73^\circ \\ \tan \theta_{z_1} &= \frac{0,67 - 0}{-1,5 - (-4)} = 0,27 \Rightarrow \theta_{p_2} \simeq 15^\circ\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\angle P(s)|_{s=s_1} &= \angle z_1 - (\angle p_1 + \angle p_2 + \angle p_3) \Rightarrow \\ \angle P(s)|_{s=s_1} &= 15 - (156 + 327 + 73) = -541^\circ\end{aligned}$$

Pelo critério do ângulo, deveríamos ter $\angle P(s) = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ, \dots$. O valor encontrado atende a essas exigências e, portanto, $s_1 \in \text{LR}$. Por simetria, $s_2 = -1,5 - 0,67j$ também pertence ao LR. Com isso, pode-se esboçar o gráfico do LR para esta função, conforme mostra-se na fig. 57.

10. Determinação de K para o qual $\zeta = 0,707$

Sabe-se que um polo que possua ângulo de fase de 135° representa polos cujo coeficiente de amortecimento é 0,70 pois $-\cos^{-1}135^\circ = 0,707$. Busca-se tais polos traçando-se o

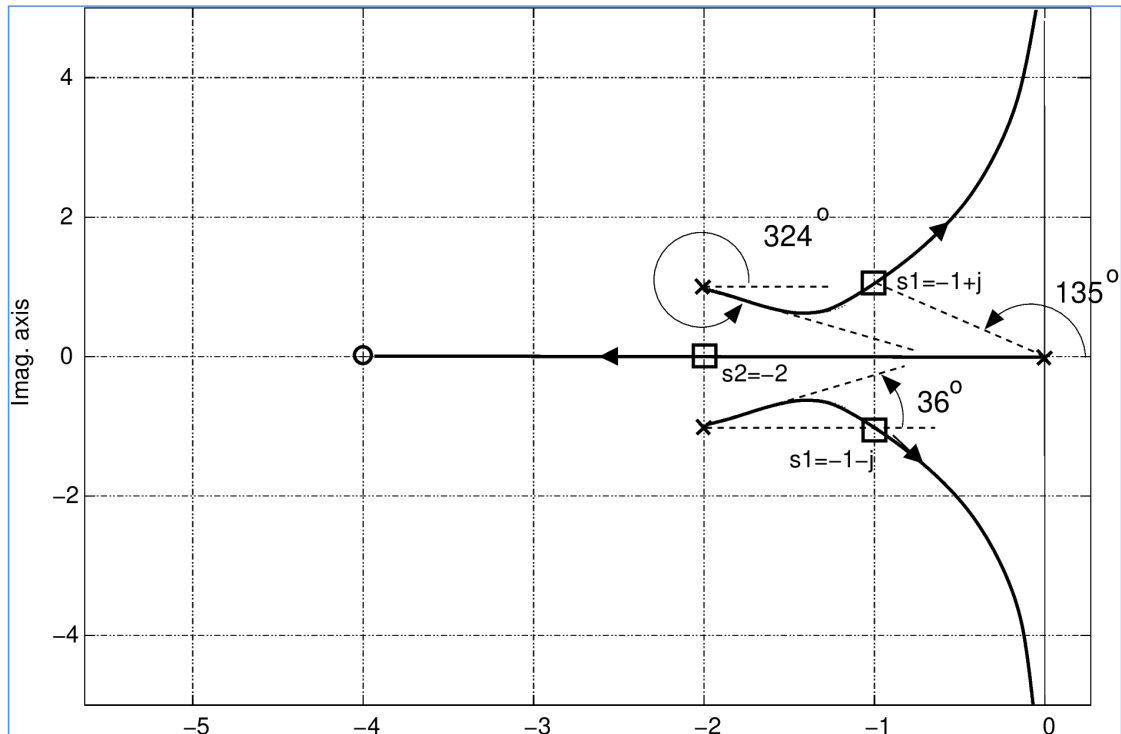


Figura 57: Esboço do LR para o exemplo

vetor que sai da origem do plano complexo e atinge o LR com um ângulo de 135° , se tal local existir.

Efetuada-se a operação acima, verifica-se que o polo $s_1 = -1 + j$ atende às condições estabelecidas. Para este polo, calcula-se o valor de K_1 através de

$$K_1 = \frac{|s_1| \cdot |s_1 + 2 + j| \cdot |s_1 + 2 - j|}{|s_1 + 4|} = \frac{|-1 + j| \cdot |-1 + j + 2 + j| \cdot |-1 + j + 2 - j|}{|-1 + j + 4|} \Rightarrow$$

$$K_1 = \frac{|-1 + j| \cdot |-1 + 2j| \cdot |-1|}{|-3 + j|} \Rightarrow$$

$$K_1 = \frac{3,16}{1,4142 \times 2,23 \times 1} \simeq 1$$

Finalmente, verifica-se que, para $K = 1$, os demais polos da FTMF situam-se em $s_2 = -1 - j$ (o complexo conjugado de s_1) e $s_3 = -2$ (diretamente sobre o eixo real). Todos esses polos, como esperado, pertencem ao LR. Estes pontos estão assinalados com $\square$ no gráfico da fig. 57.

8.3 Sintonia de Controladores PID com auxílio do Lugar das Raízes

O conhecimento do lugar das raízes pode nos auxiliar na sintonia de controladores PID, como já foi mostrado de forma não-explicita exemplo da seção 8.2.1, na qual selecionou-se um ganho K tal que $\zeta = 0,707$ no sistema em malha fechada. O ganho é essencialmente um termo *proporcional*.

Para desenvolver um método de ajuste dos ganhos de um controlador PID pelo método do lugar das raízes, vamos estudar o seu comportamento com a inclusão de cada termo na função de transferência de malha aberta de um sistema tomado como exemplo (das notas de aula do Prof. Fleury).

Um modelo bastante simplificado para a dinâmica em malha aberta do modo longitudinal de um avião com piloto automático é dado pela seguinte função de transferência:

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{K(s+a)}{s(s-b)(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2)}, \quad a, b > 0,$$

que possui um polo de malha aberta $s = b$ no semi-plano direito do plano complexo e, portanto, deve ser *condicionalmente estável*. Adotando os parâmetros $a = b = 1$, $\zeta = 0,5$ e $\omega_n = 4$, a FTMA se torna

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 4s + 16)}$$

1. Lugar das raízes para fatores proporcionais, ou seja $G_c(s) = K = K_p$

- (a) em $L(s)$ há $m = 1$ zero e $n = 4$ polos: $z_1 = -1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_{3,4} = -2 \pm 2\sqrt{3}j$. Portanto, sobre o eixo real fazem parte do LR os segmentos $]-\infty, -1]$ e $[0, 1]$;
- (b) início e final do LR: há $n = 4$ segmentos do LR, sendo que $n - m = 4 - 1 = 3$ se iniciam nos polos e terminam no infinito;
- (c) ângulos das assíntotas em relação ao eixo real:

$$n - m = 3 \Rightarrow \theta_q = \frac{(2q+1)\pi}{3} \quad q = 0, 1, 2$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}; \quad \theta_1 = \pi; \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{3}$$

(d) centroide das assíntotas:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{polos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{n - m} = \frac{(0 + 1 + (-2) + (-2)) - (-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

- (e) pontos de encontro LR com o eixo imaginário: recorre-se ao critério de Routh-Hurwitz para determinar o valor de K que satisfaz a essa condição. Da eq. característica $1 + L(s) = 0$,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 4s + 16)} &= 0 \\ 1 + \frac{K(s+1)}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s} &= 0 \\ s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K - 16)s + K &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 s^4 & 1 & 12 \quad K \\
 s^3 & 3 & (K - 16) \\
 s^2 & \frac{52-K}{3} & K \\
 s^1 & \frac{-K^2+59K-832}{3(52-K)} & 0 \\
 s^0 & k &
 \end{array}$$

Da linha em s^2 , $52 - K > 0 \Rightarrow K < 52$; da linha em s^1 , $K^2 - 59K + 832 = 0 \Rightarrow K_1 = 23,3$ & $K_2 = 35,7$ são os valores que fazem o LR cruzar o eixo imaginário. Os pontos efetivos são obtidos da equação em s^2 para os dois valores de K :

$$\begin{aligned}
 K_1 = 23,3 &\rightarrow \frac{52 - 23,3}{3} s^2 - K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 1,56j \\
 K_2 = 35,7 &\rightarrow \frac{52 - 35,7}{3} s^2 - K = 0 \Rightarrow s_{3,4} = \pm 2,56j
 \end{aligned}$$

(f) ângulos de chegada e saída dos polos complexos calculados de acordo com a eq. 8.21 (não há zero complexo):

$$\begin{aligned}
 \angle p_q &= \pi - \sum_{j=1, j \neq q}^n \theta p_j + \sum_{i=1}^m \theta z_i \\
 \angle p_3 &= \pi - \angle(p_{31} + p_{32} + p_{34}) - \angle z_{31} \\
 \angle p_3 &= 180^\circ - (120^\circ + 130,5^\circ + 90^\circ) + 106^\circ = -54,6^\circ \Rightarrow \angle p_4 = +54,6^\circ
 \end{aligned}$$

(g) pontos de separação (partida e chegada) são calculados segundo as eqs. 8.15-8.16:

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{s+1} = -(s^4+3s^3+12s^2-16s)(s+1)^{-1} \\
 \frac{dK}{ds} &= -(s^3+9s^2+24s-16)(s+1)^{-1} - (s^4+3s^3+12s^2-16s)(-1)(s+1)^{-2} \cdot 1 = 0 \\
 \frac{dK}{ds} &= -\frac{(s^3+9s^2+24s-16)}{s+1} + \frac{(s^4+3s^3+12s^2-16s)}{(s+1)^2} = 0 \\
 \frac{dK}{ds} &= \frac{3s^4+10s^3+21s^2+24s-16}{(s+1)^2} = 0
 \end{aligned}$$

As raízes são (com o auxílio do Octave/Matlab):

$$s_1 = -2,27; s_{2,3} = -0,76 \pm 2,2j; s_4 = 0,45$$

Apenas s_1 e s_2 fazem parte de segmentos do eixo real que pertencem ao LR. As raízes complexo-conjugadas não satisfazem à condição de ângulo e não são pontos nem de chegada e nem de partida.

O diagrama do lugar das raízes para esse sistema é apresentado na fig. 58

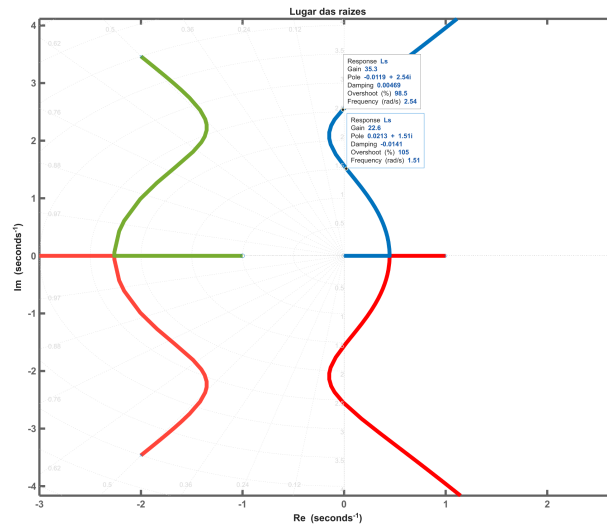


Figura 58: Lugar das raízes de $L(s) = \frac{K(s+1)}{s^4+3s^3+12s^2-16s}$.

Como se verifica na figura, o sistema somente é estável para $23,3 \leq K \leq 35,7$. Adotemos $K = (K_{min} + K_{max})/2 = 29,5$ e calculemos os polos de malha fechada para esse valor:

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow 1 + KG(s) = 1 + 29,5 \frac{s+1}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s}$$

$$0 = s^4 + 3s^3 + 12s^2 + 13,5s + 29,5$$

$$s_{1,2} = -0,15 \pm 2,05j; \quad s_{3,4} = -1,36 \pm 2,27j$$

O mesmo resultado pode ser obtido diretamente do gráfico do lugar das raízes no Matlab, como se verifica na fig. 59:

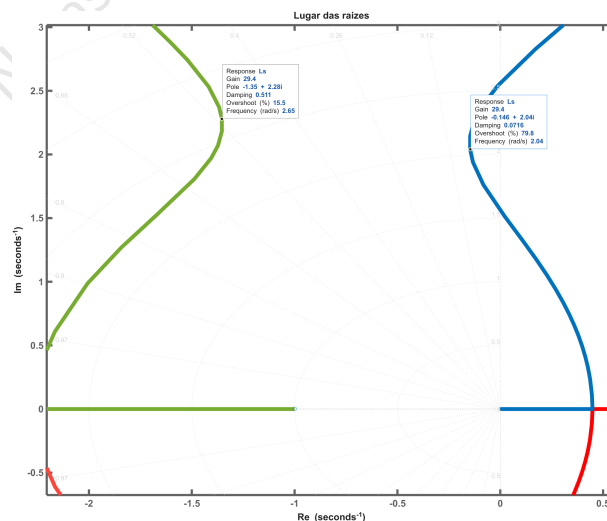


Figura 59: Polos de malha fechada para $K = 29,5$.

Escolhido o ganho do controlador proporcional, é possível verificar seu desempenho simulando a reposta no tempo a uma entrada padrão como o degrau unitário, como mostra a fig. 60, na qual se verifica que a resposta apresenta sobressinal elevado e longo tempo de acomodação.

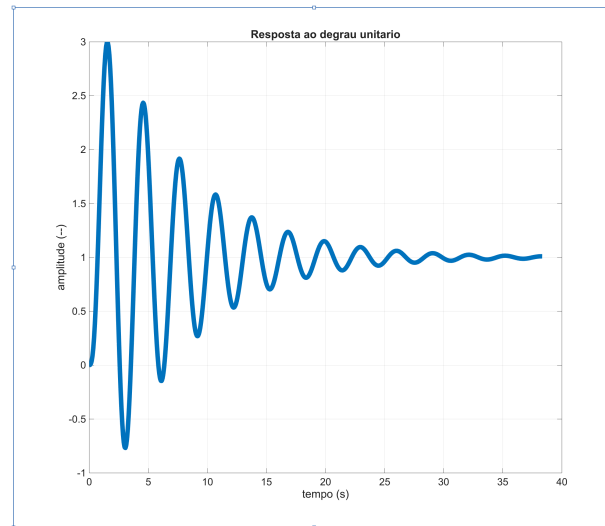


Figura 60: Resposta no tempo ao degrau unitário para o sistema com controlador P.

2. Controlador PI

Visando melhorar as características de resposta transitória, procede-se à inclusão de um termo integral com o respectivo ganho no ramo direto da FTMA, mantendo-se o ganho proporcional anteriormente adotado. Assim

$$G_c(s) = K + \frac{K_i}{s}$$

$$L(s) = G_c(s)G(s) = \left(K + \frac{K_i}{s}\right) \left(\frac{s+1}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s}\right)$$

$$L(s) = \left(K + \frac{K_i}{s}\right) \cdot \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{N(s)}{D(s)} + K_i \frac{N(s)}{sD(s)}$$

A nova equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + L(s) = 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} + K_i \frac{N(s)}{sD(s)} = 0$$

$$[sD(s) + KN(s)] + K_i N(s) = 0$$

$$1 + K_i \frac{N(s)}{s[D(s) + KN(s)]} = 0$$

$$1 + \underbrace{K_i \frac{s+1}{s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 13,5s^2 + 29,5s}}_{L(s)} = 0$$

Com o auxílio do Matlab, obtemos o lugar das raízes para $L(s)$, vide fig. 61.

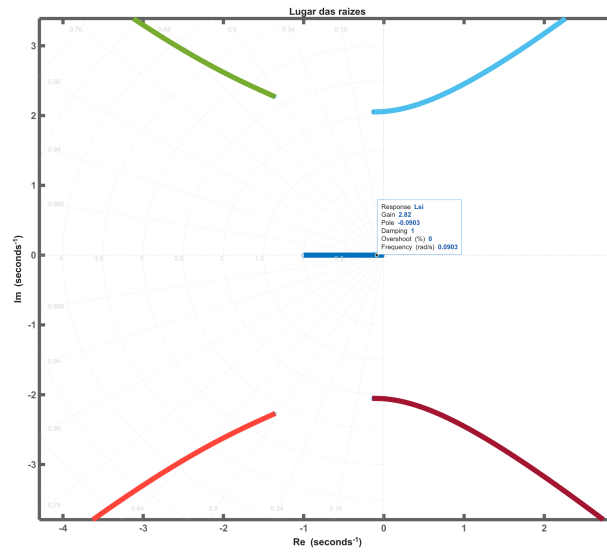


Figura 61: Lugar das raízes para controlador PI.

Ainda conforme a fig. 61, adotando $K_i \approx 2,8$, os polos da FTMF $T(s)$ são $p_1 = -0,09$, $p_{2,3} = -0,02 \pm 2,06j$, $p_{3,4} = -1,43 \pm 2,30j$ e a resposta temporal para o controlador PI sintonizado dessa forma é mostrado na fig. 62.

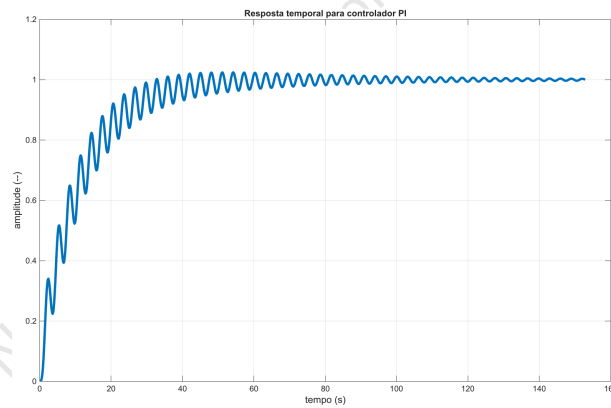


Figura 62: Resposta no tempo ao degrau unitário para o sistema com controlador PI.

3. Controlador PD

Seguindo procedimento algébrico análogo ao efetuado na determinação do ganho integral, temos, ainda para $K = 29, 5$:

$$G_c = K + K_d s$$

$$L(s) = G_c(s)G(s) = (K + K_d s) \left(\frac{s + 1}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s} \right)$$

$$L(s) = (K + K_d s) \cdot \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{N(s)}{D(s)} + K_d \frac{sN(s)}{D(s)}$$

A nova equação característica do sistema em malha fechada é

$$\begin{aligned}
 1 + L(s) &= 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} + K_d \frac{sN(s)}{D(s)} = 0 \\
 [D(s) + KN(s)] + K_d sN(s) &= 0 \\
 1 + K_d \frac{sN(s)}{[D(s) + KN(s)]} &= 0 \\
 1 + K_d \frac{s^2 + s}{\underbrace{s^4 + 3s^3 + 12s^2 + 13,5s + 29,5}_{L(s)}} &= 0
 \end{aligned}$$

Note que, qualquer que seja o valor de K_d que pertença ao LR, a função de transferência de malha fechada terá um zero em $s = 0$; dessa forma, para entradas como impulso ou degrau (unitários ou não) a saída sempre será nula, o que pode ser verificado pela aplicação do TVF. Por isso, passaremos imediatamente à sintonia de um controlador PID. No entanto, como queremos melhorar a rapidez na resposta, com o auxílio do Matlab, selecionamos $K_d = 102$, que pertence ao LR mostrado na fig. 63, para utilizá-lo na sintonia do PID.

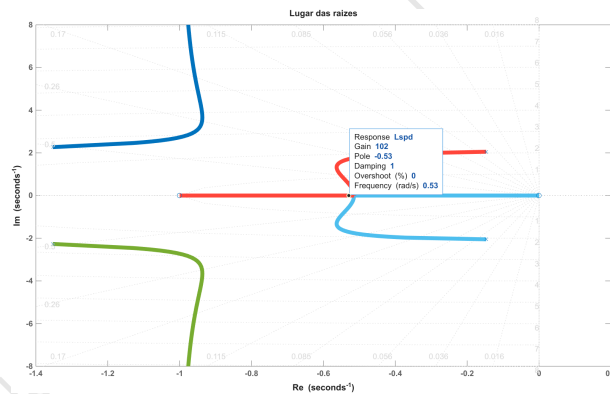


Figura 63: Polos de malha fechada para controlador PD.

4. Controlador PID

Novamente, com $K = 29,5$, $K_i = 2,5$ e K_d acima temos:

$$\begin{aligned}
 G_c &= K + \frac{K_i}{s} + K_d s \\
 L(s) &= G_c(s)G(s) = \left(K + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) \left(\frac{s + 1}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s} \right)
 \end{aligned}$$

Substituindo os valores para os ganhos, a função de transferência de malha fechada para esse controlador é dada por

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = 1 + L(s) = \frac{102s^3 + 131,5s^2 + 32s + 2,5}{s^5 + 3s^4 + 114s^3 + 115,5s^2 + 32s + 2,5}$$

Finalmente, na fig. 64 podemos comparar as respostas ao degrau unitário para os três

controladores.

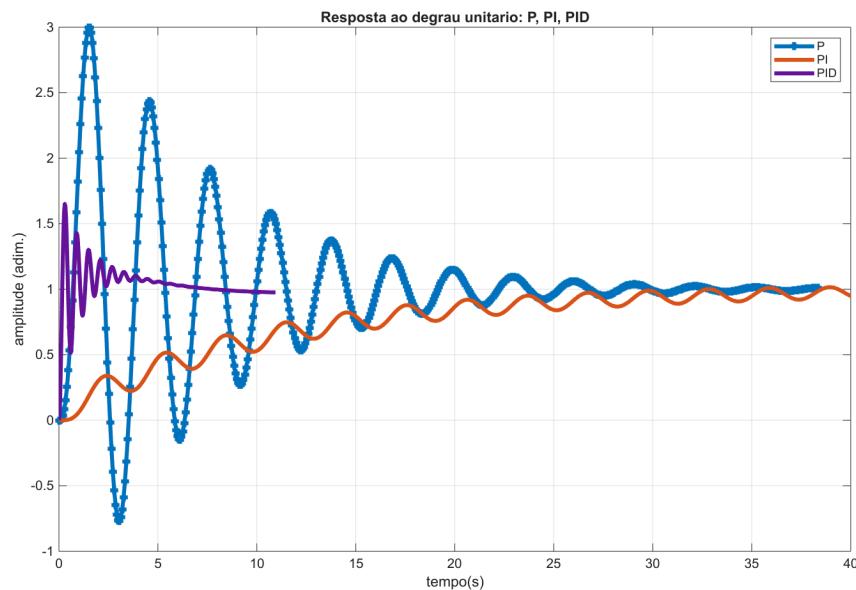


Figura 64: Comparação da resposta no tempo ao degrau unitário para os três controladores.

8.4 Projeto de compensadores pelo método do Lugar das Raízes

No projeto de sistemas de controle, com frequência não é possível atingir todas as especificações de desempenho em malha fechada em uma primeira iteração somente pelo ajuste do ganho. De modo geral, três dessas especificações são particularmente importantes:

- estabilidade (**imprescindível**);
- erro em estado estacionário *pequeno* ou nulo;
- desempenho satisfatório: *baixo* sobressinal e resposta *rápida*.

Percebe-se, portanto, que há requisitos potencialmente conflitantes, cuja solução de compromisso pode requerer diversas iterações. No entanto, as possíveis diversas iterações estão condicionadas à localização dos polos em determinada região do LR. Como consequência, o desempenho global do sistema está limitado aos pontos do lugar das raízes. Observemos a fig. 65: em (a) apresentam-se os polos p_1 sobre o lugar das raízes e p_2 o polo efetivamente desejado; em (b) a resposta temporal do sistema tendo esses dois polos como dominantes. Idealmente, os polos (complexo-conjugados) p_2 seriam os mais adequados; porém, *eles não fazem parte do LR*.

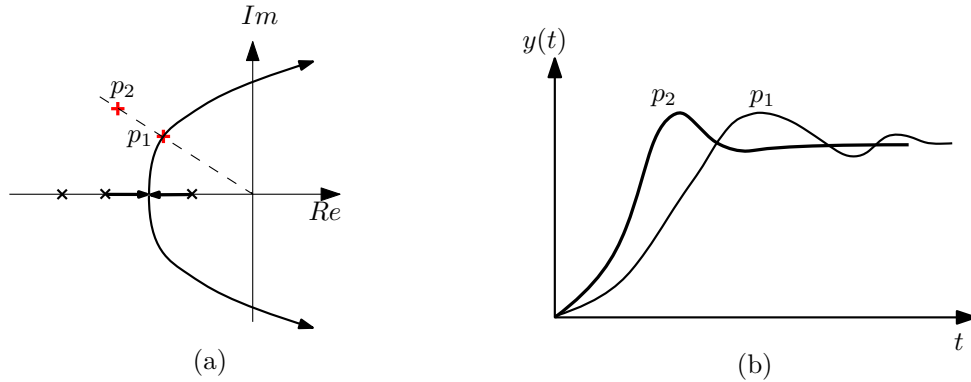


Figura 65: Lugar das raízes e resposta temporal em função dos polos desejados. $\times$ = polos em MA; $+$ = polo p_1 sobre o LR e polo p_2 desejado, fora do LR original. (adaptado de Nise, 2011)

Quando isso ocorre, uma das formas para que as especificações sejam atendidas é pela introdução dos chamados *compensadores* em topologias variadas com a planta original (em série no ramo direto, em paralelo por realimentação ou pré-alimentação, vide fig. 66), cuja função é deslocar as curvas do lugar das raízes para que estas contenham os polos desejados do sistema em malha fechada. Portanto, o compensador é um componente ou circuito adicional que é inserido em um sistema de controle com o objetivo de atenuar ou eliminar uma deficiência de desempenho.

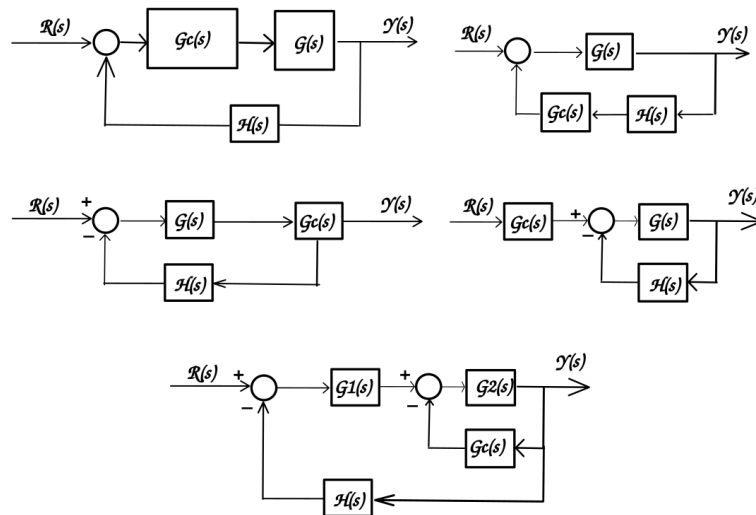


Figura 66: Algumas topologias para compensadores.

O deslocamento das curvas do lugar das raízes é obtido pela introdução de funções de transferência do compensador para acrescentar zeros e/ou polos na função de transferência de malha aberta original. De maneira geral, a adição de zeros desloca o LR da função de transferência de malha aberta para a esquerda no plano complexo, tornando a resposta mais rápida; por outro lado, a adição de polos desloca o LR para a direita, diminuindo a margem de estabilidade e tornando a acomodação da resposta mais lenta. A origem dos termos avanço

e atraso de fase está ligada à posição relativa entre os polos e zeros adicionais alocados pela função de transferência do compensador, $G_c(s)$, à malha original e pode ser melhor compreendida pela fig. 67.

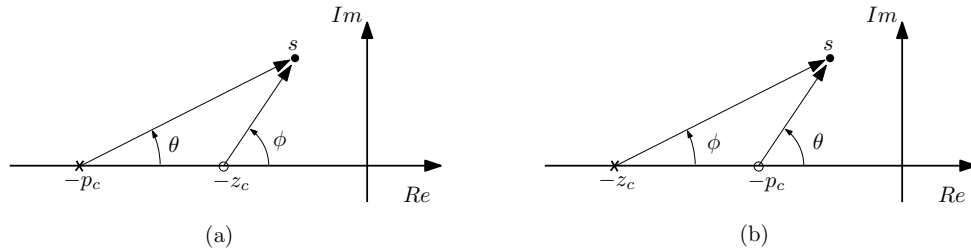


Figura 67: (a) avanço de fase: $\angle G_c(s) = \phi - \theta > 0$; (b) atraso de fase: $\angle G_c(s) = \phi - \theta < 0$.

O avanço de fase é verificado pelo fato de que, para qualquer polo s com $\text{Re}(s) < 0$ e $\text{Im}(s) > 0$, o compensador aumenta a fase na malha aberta em $\phi - \theta \text{ rad}$; por outro lado, o atraso de fase ocorre quando, para qualquer polo s com $\text{Re}(s) < 0$ e $\text{Im}(s) > 0$, o compensador diminui a fase na malha aberta em $\theta - \phi \text{ rad}$. A estrutura¹ de um compensador pode ser descrita pela função de transferência

$$G_c(s) = K_c \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}. \quad (8.25)$$

Os zeros z_i , polos p_j e o ganho K_c do compensador são selecionados de modo a ajustar o ganho total do sistema em malha fechada para atender às especificações de projeto. Os compensadores mais simples são os de primeira ordem, ou seja,

$$G_c(s) = K_c \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)} \quad (8.26)$$

8.4.1 Compensação por avanço de fase

A compensação por avanço de fase destina-se a reduzir o sobressinal e o tempo de acomodação do sistema original. A forma de um compensador de avanço é dada por

$$G_c = K_c \frac{s + z_c}{s + p_c} \quad \text{com} \quad z_c < p_c \quad (8.27)$$

O procedimento básico é o seguinte:

1. determinar os polos em malha fechada que satisfaçam às condições de estabilidade, erro em estado estacionário e desempenho;
2. efetuar a análise do lugar das raízes e verificar se, apenas pelo ajuste do ganho, os polos de malha fechada desejados podem ser obtidos;
3. fixando-se a posição do zero do compensador, a posição do polo pode ser obtida pela condição de fase;
4. utilizar a condição de módulo para obter o ganho K_c .

¹Essa não é a expressão mais geral, que será apresentada quando estudarmos margens de ganho e fase utilizando os diagramas de Bode.

Para mostrar a aplicação do método, será utilizado um exemplo: considere a topologia da fig. 68 com $G_p(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+6)}$, $H(s) = 1$ e $G_c(s)$ a determinar.

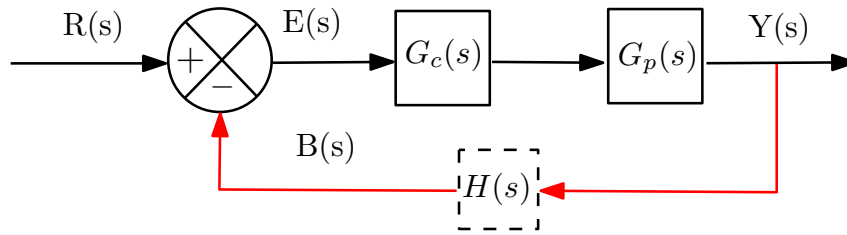


Figura 68: Compensação por avanço de fase.

Com o auxílio do Matlab, traça-se o gráfico do lugar das raízes e procura-se um local para o qual o sobressinal seja, por exemplo, 16%, o que corresponde a $\zeta \approx 0,51$ e aos polos dominantes $p = -1,21 \pm 2,06j$ em malha fechada, que correspondem ao ganho $K = 43,2$, vide fig. 69. Note que o ganho K é fornecido pelo Matlab, mas poderia ter sido calculado diretamente a partir do gráfico traçando uma reta desde a origem ao longo da linha correspondente ao $\zeta = 0,51$ e identificando os polos correspondentes na intersecção com o LR.

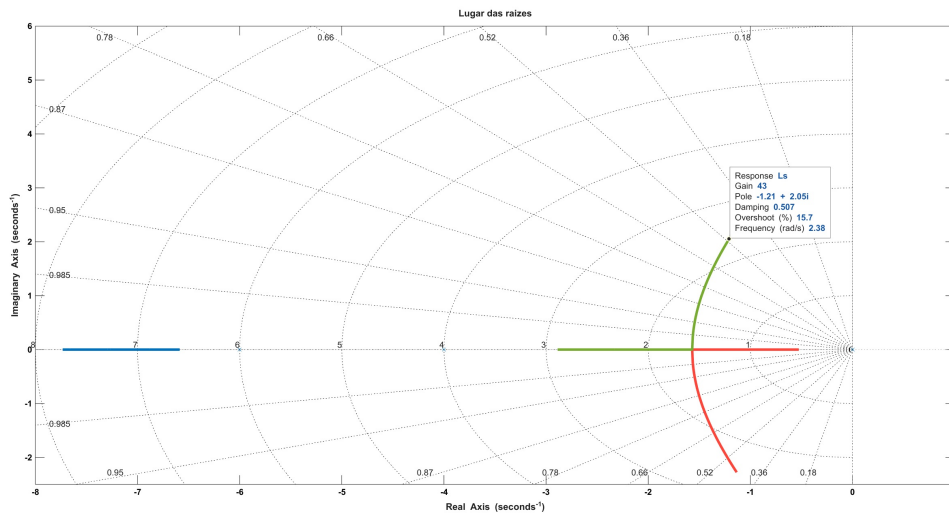


Figura 69: Lugar das raízes para $G(s)$ sem compensador de avanço.

O desempenho do sistema sem o compensador quando submetido à entrada degrau unitário é mostrado na curva azul fig. 70, na qual se verifica que o tempo de acomodação a 5% é de aproximadamente 5,3 segundos. Suponhamos que se queira reduzir esse tempo para 1,0 segundos sem alterar o coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,51$. Com isso, pela eq. 6.53,

$$T_a(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n} \Rightarrow 1,0 = \frac{3}{0,51\omega_n} \Rightarrow \omega_n = 5,88 \text{ rad/s}$$

os polos dominantes em malha fechada devem ser $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -3 \pm 5,06j$, que não podem ser atingidos somente variando o ganho K , pois esses polos não fazem parte

do LR. Assim, vamos projetar um compensador de avanço de fase procurando atender às novas especificações.

Voltemos à eq. 8.27 e adotemos o zero do compensador na mesma posição que a parte real dos polos dominantes em malha fechada, $z_c = -3,0$. Para calcular o polo do compensador, utiliza-se a condição de fase:

$$\angle(s + p_c) = \angle(s + 3,0) - (\angle(s + 0) + \angle(s + 4) + \angle(s + 6)) + \pi$$

No polo de malha fechada $s = -3 + 5,06j$ temos:

$$\begin{aligned} \angle(s + p_c) &= \left[\arctg \frac{5,06}{-3+3} - \left(\arctg \frac{5,06}{-3+0} + \arctg \frac{5,06}{-3+4} + \arctg \frac{5,06}{-3+6} \right) + \pi \right] \frac{180^\circ}{\pi} \\ \angle(s + p_c) &= 90^\circ - (120,7^\circ + 78,8^\circ + 59,3^\circ) + 180^\circ = 11,2^\circ \\ \arctg \frac{5,06}{-3+p_c} &= 11,2^\circ \Rightarrow \frac{5,06}{-3+p_c} = \operatorname{tg}(11,2^\circ) \Rightarrow p_c \approx 28,6. \end{aligned}$$

A condição de módulo fornece o ganho:

$$\left| \frac{K_c(s+3)}{(s+28,6)} \frac{1}{s(s+4)(s+6)} \right| = 1 \Rightarrow K_c = \frac{|s+28,6| \cdot |s| \cdot |s+4| \cdot |s+6|}{|s+3|}$$

para $s = -3 + 5,06j$, $\Rightarrow K_c = 807,8$ e $G_c(s) = 807,8 \frac{s+3}{s+28,6}$.

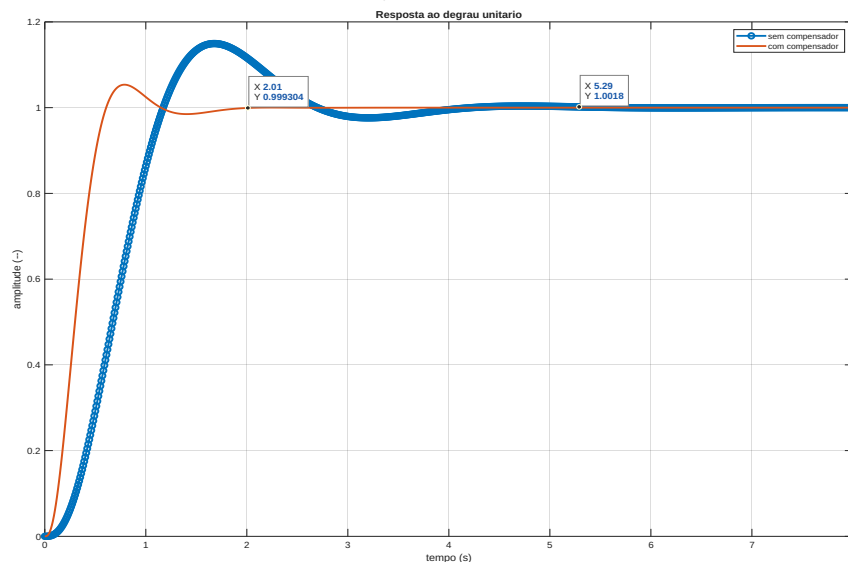


Figura 70: Resposta comparativa no tempo do sistema da fig. 68 à entrada em degrau unitário sem e com o compensador de avanço.

Os resultados da simulação temporal do sistema sem e com o compensador de avanço são mostrados na fig. 70, onde se observa que o tempo de assentamento diminuiu consideravelmente com a introdução do compensador de avanço, muito embora a especificação de 1 segundo não tenha sido plenamente atingida. O motivo para isso relaciona-se à aproximação matemática que considera a planta em malha fechada como de segunda ordem quando, na verdade tem-se um sistema de quarta ordem. De qualquer forma, houve também diminuição

no sobressinal e no tempo de subida, fatores positivos quando se trata de sistemas de controle.

8.4.2 Compensação por atraso de fase

Ao contrário do que ocorre com a compensação por avanço de fase, o atraso de fase faz com que o LR se desloque para a direita do plano complexo, o que pode trazer complicações caso os polos em malha fechada, pela ação de algum distúrbio, por exemplo, passem para a região instável. A compensação por atraso é utilizada quando a resposta transitória é adequada mas o erro em estado estacionário não atende às especificações. A função de transferência de um compensador de atraso de primeira ordem é dada por

$$G_c = K_c \frac{s + z_c}{s + p_c} \quad \text{com } z_c > p_c. \quad (8.28)$$

O efeito que a introdução de um compensador de atraso no ramo direto implica no erro em estado estacionário para uma entrada em degrau unitário é calculado com a aplicação do TVF na função de transferência do erro:

$$\begin{aligned} \text{sem comp. } e_s(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + G_p(s)} = \frac{1}{1 + G_p(0)} = \frac{1}{1 + k_0} \\ \text{com comp. } e_c(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s+z_c}{s+p_c} G_p(s)} = \frac{1}{1 + K_c \frac{z_c}{p_c} k_0} \therefore e_c(\infty) < e_s(\infty) \end{aligned} \quad (8.29)$$

Para que a resposta transitória não sofra alterações significativas e ao mesmo tempo o erro em estado estacionário seja diminuído, por exemplo, em 10 vezes, é necessário que o módulo do zero seja aproximadamente 10 vezes maior que o do polo. No entanto, para que a resposta transitória não seja afetada, a única maneira para que isso ocorra é com zeros e polos próximos da origem, local em que a diferença relativa é "grande", mas a absoluta não como, por exemplo, com $z_c = -0,01$ e $p_c = -0,1$.

O procedimento para o projeto do compensador de atraso é análogo ao efetuado para o anterior. Assim, recorre-se a um exemplo, tendo como base o diagrama de blocos da fig. 68, com $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ e $G_c(s)$ a ser determinado. Sabe-se que a planta é projetada para trabalhar com $\zeta = 0,172$ e que a FTMF para esse sistema com realimentação unitária e $G_c(s) = 1$ (isto é, sem compensação) é dada pela eq. $T(s) = \frac{G_p(s)}{1+G_p(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$. A solução do problema será efetuada com o auxílio do Matlab.

Pelo diagrama do lugar das raízes (vide fig. 71, temos, para $\zeta = 0,172$, os polos dominantes em malha fechada e os demais parâmetros:

$$p_{1,2} = -0,69 \pm 3,94j, \quad K_c = 166 \quad \text{e} \quad \angle p_1 = 180 - \arctg(3,94/0,69) \approx 100^\circ.$$

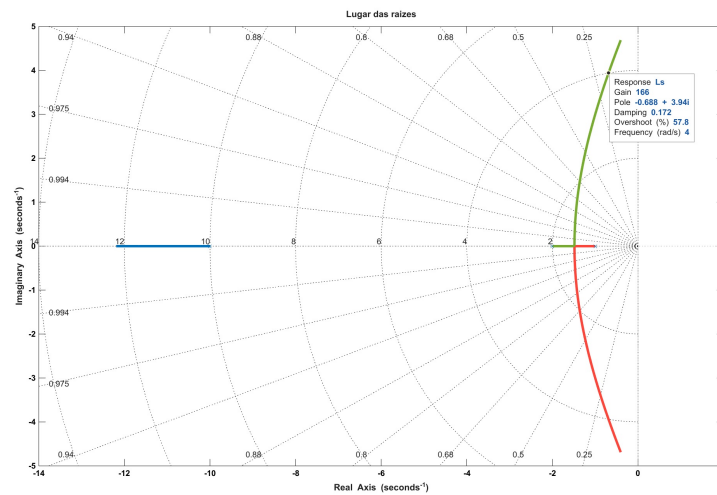


Figura 71: Lugar das raízes para $L(s) = G_p(s) = \frac{1}{s^3 + 13s^2 + 32s + 20}$

A resposta no tempo para o sistema em malha fechada adotando $K = 166$ é mostrada na fig. 72, onde se observa o erro em estado estacionário $e(t \rightarrow \infty) \approx 0,11$ como esperado, pois a planta é do tipo zero, além dos elevados sobressinal e tempo de acomodação característicos de sistemas sub-amortecidos.

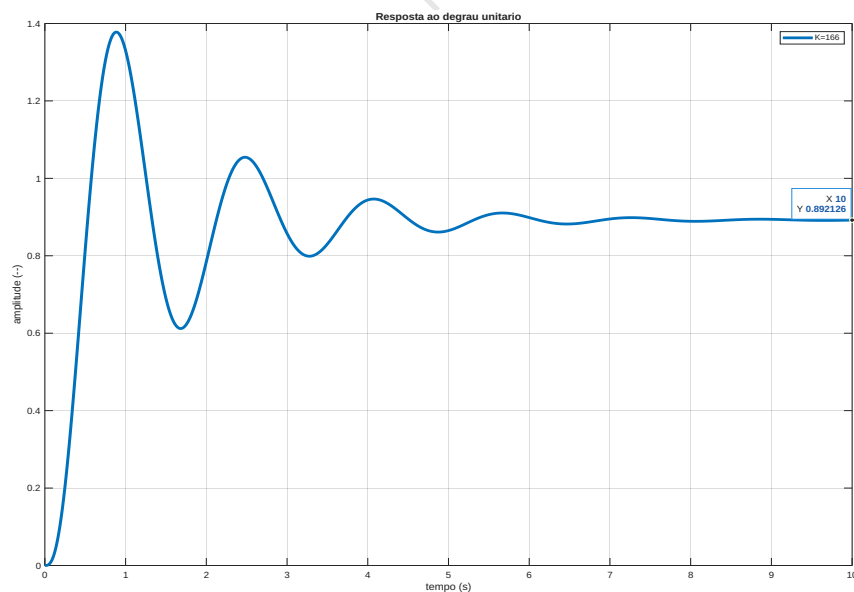


Figura 72: Resposta no tempo para a planta $G_p(s)$ para $K = 166$.

Para que a resposta transitória não mude significativamente mas o erro em estado estacionário seja reduzido em, por exemplo, 10 vezes, temos:

$$e_c = \frac{0,11}{10} = 0,011 = \frac{1}{1 + K_c \frac{z_c}{p_c} K L(0)} = \frac{1}{1 + K_c \frac{z_c}{p_c}} 166 \frac{1}{20}$$

$$0,011 = \frac{1}{1 + K_c \frac{z_c}{p_c} 8,3} \Rightarrow K_c \frac{z_c}{p_c} = 10,83$$

Para que o ganho em regime estacionário (ou permanente) não se altere, ou seja, a posição dos polos dominantes não deve ser substancialmente alterada, é necessário que K_c , o ganho do compensador seja aproximadamente unitário. Assim, com $K_c = 1$, pode-se escolher o zero e o polo do compensador "arbitrariamente". Façamos $p_c = 0,01$; com isso,

$$10,83 = \frac{z_c}{0,01} \Rightarrow z_c = 0,11 \Rightarrow G_c(s) = \frac{s + 0,11}{s + 0,01}$$

A resposta temporal para o sistema com o compensador de atraso é visto na fig. 73, que evidencia os benefícios da inclusão desse componente. O novo gráfico do LR (vide fig. 74) mostra que os novos polos dominantes em malha fechada para o mesmo $\zeta = 0,107$ são $p_{1,2} = -0,48 \pm 4,39j$, ligeiramente distintos dos anteriores na situação sem o compensador.

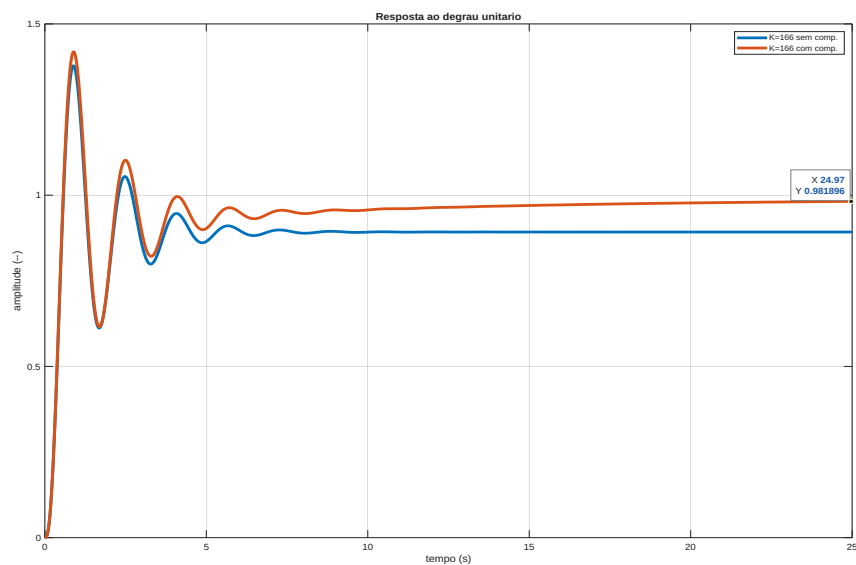


Figura 73: Resposta ao degrau unitário para a planta $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+10)}$

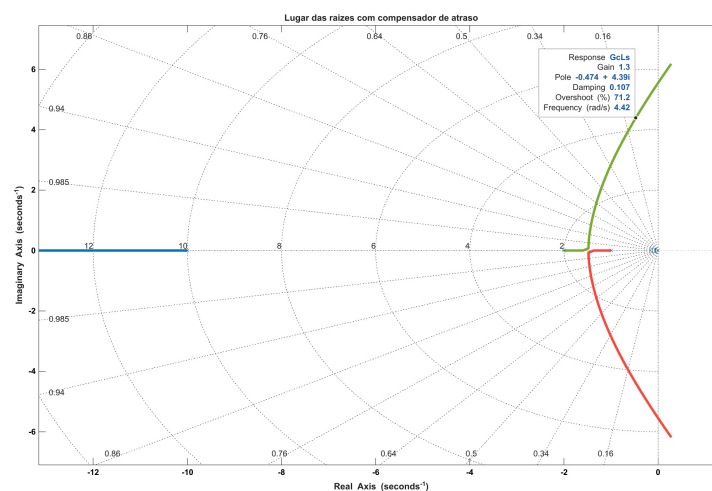


Figura 74: Lugar das raízes para a planta $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ com compensador de atraso

8.4.3 Compensação por avanço e atraso

Como estamos tratando de sistemas lineares, a compensação por avanço e atraso promove a somatória das características trazidas pela utilização de cada uma separadamente. Basicamente, o procedimento envolve primeiro projetar o compensador de avanço para adequar a resposta transitória e, posteriormente, efetuar o ajuste como compensador de atraso para corrigir eventuais erros em regime permanente.

Notas de aula – Prof. F. Trigo

9 MÉTODOS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Os métodos de resposta em frequência foram desenvolvidos nas décadas de 1930–1950 por pesquisadores como Nyquist, Bode e Nichols, entre outros. Basicamente, constituem-se em ferramentas de avaliação do comportamento de sistemas dinâmicos quando submetidos a sinais periódicos, algo comum em diversas aplicações reais. Os métodos de resposta em frequência complementam as análises de transitório. Veja-se um exemplo: um sistema de controle de posicionamento deve, quando solicitado a uma entrada em degrau unitário, apresentar baixo sobressinal, tempo de acomodação dentro de certos limites e tempo de subida estabelecido. No entanto, tal sistema é afetado também por uma perturbação proveniente de suas fundações. Uma maneira de estabelecer a influência de tais perturbações sobre a resposta dinâmica do sistema é efetuar uma varredura de frequências até que se determine quais frequências e harmônicos provocam as maiores amplitudes de vibração. Assim, pode-se redimensionar tais fundações de modo a obter o menor efeito possível.

Os métodos de resposta em frequência apresentam as seguintes vantagens sobre outros métodos de análise já estudados:

- não é necessária a obtenção de raízes da equação característica;
- podem ser utilizados para levantar características do sistema por testes simples com equipamentos baratos e precisos;
- podem ser utilizados na *identificação* de sistemas;
- a metodologia é extensível também a sistemas não lineares.

9.1 Saídas em regime permanente para entradas senoidais

Seja, no diagrama da fig. 75, a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + L(s)} \quad (9.1)$$

estável, linear e invariante no tempo e sujeita a uma entrada $r(t) = A \sin(\omega t)$. A saída $c(t)$ pode ser obtida como se segue:

$$\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[A \sin(\omega t)] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (9.2)$$

$$\text{com } T(s) = \frac{N(s)}{\prod_{k=1}^n (s + p_k)} \Rightarrow \quad (9.3)$$

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} T(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{N(s)}{\prod_{k=1}^n (s + p_k)} \quad (9.4)$$

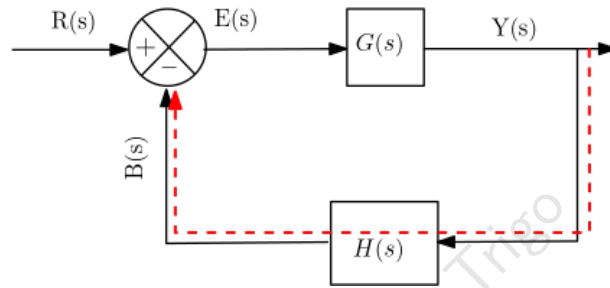


Figura 75: Diagrama de blocos de um sistema genérico em malha fechada (a realimentação unitária é representada pela linha vermelha pontilhada)

A expansão em frações parciais conduz a

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{N(s)}{\prod_{k=1}^n (s + p_k)} = \frac{a_1}{s + j\omega} + \frac{a_2}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + p_1} + \frac{b_2}{s + p_2} + \dots + \frac{b_n}{s + p_n} \quad (9.5)$$

A resposta no tempo é obtida com a transformação inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t} + b_1 e^{-p_1 t} + b_2 e^{-p_2 t} + \dots + e^{-p_n t} \quad (9.6)$$

Porém, como por hipótese, o sistema é *estável*, quando entra em regime (isto é, $t \rightarrow \infty$), todos os termos $b_k e^{-p_k t}$ tendem a zero. Assim, a resposta em regime fica

$$y(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t}, \quad (9.7)$$

que, como se nota, depende *apenas da entrada periódica*. Prosseguindo na análise, devem-se calcular os resíduos a_1 e a_2 nos polos $\pm j\omega$. Pelos métodos já estudados, pode-se escrever:

$$a_1 = T(s) \cdot (s + j\omega) \frac{A\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{A}{2j} T(-j\omega) \quad (9.8)$$

$$a_2 = T(s) \cdot (s - j\omega) \frac{A\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{A}{2j} T(j\omega) \quad (9.9)$$

Nota-se que a_1 e a_2 são complexos conjugados (representa-se $a_2 = \bar{a}_1$). Lembrando ainda que $F(j\omega)$ e $F(-j\omega)$ são números complexos e, portanto, podem ser escritos em termos de módulo e fase, tem-se:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)|\angle T(j\omega) = |T(j\omega)|e^{j\phi} \quad (9.10)$$

$$T(-j\omega) = |T(-j\omega)|\angle T(-j\omega) = |T(j\omega)|e^{-j\phi} \quad \text{com} \quad \text{tg}\phi = \frac{\text{Im}(T(\pm j\omega))}{\text{Re}(T(\pm j\omega))} \quad (9.11)$$

Voltando às eqs. 9.8 e 9.9,

$$a_1 = -\frac{A}{2j}|T(-j\omega)|e^{-j\phi} = -\frac{A}{2j}|T(-j\omega)|[\cos(-\phi) + j\text{sen}(-\phi)] \Rightarrow \quad (9.12)$$

$$a_1 = -\frac{A}{2j}|T(-j\omega)|[\cos(\phi) - j\text{sen}(\phi)] \quad (9.13)$$

$$a_2 = \frac{A}{2j}|T(j\omega)|e^{j\phi} = \frac{A}{2j}|T(j\omega)|[\cos(\phi) + j\text{sen}(\phi)] \Rightarrow \quad (9.14)$$

$$a_2 = \frac{A}{2j}|T(j\omega)|[\cos(\phi) + j\text{sen}(\phi)] \quad (9.15)$$

A resposta temporal fica, de acordo com a eq. 9.7,

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{A}{2j}|T(-j\omega)|e^{-j\phi}e^{-j\omega t} + \frac{A}{2j}|T(j\omega)|e^{j\phi}e^{j\omega t} \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{A}{2j}|T(j\omega)|[-e^{-j(\omega t + \phi)} + e^{j(\omega t + \phi)}] \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{A}{2j}|T(j\omega)|[-(\cos(-\omega t - \phi) + j\text{sen}(-\omega t - \phi)) + \cos(\omega t + \phi) + j\text{sen}(\omega t + \phi)] \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{A}{2j}|T(j\omega)| \cdot 2j \cdot \text{sen}(\omega t + \phi) \Rightarrow \\ y(t) &= A|T(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (9.16)$$

Da demonstração acima conclui-se que:

1. a *amplitude* de resposta $A|T(j\omega)|$ é proporcional à entrada e ao módulo da função de transferência calculada em $s = \pm j\omega$;
2. a resposta é *senoidal* com *frequência idêntica* à frequência de excitação, ω rad/s;
3. a *fase* da resposta difere da fase da excitação ϕ graus. Quando $\phi > 0$, ocorre *avanço de fase*, ao passo que se $\phi < 0$, há *atraso de fase*.

Genericamente, para $r(t) = A\text{sen}(\omega t + \gamma)$ e $y(t) = B\text{sen}(\omega t + \beta)$,

$$\frac{y(t)}{r(t)} = \frac{B \text{sen}(\omega t + \beta)}{A \text{sen}(\omega t + \gamma)} = \frac{B e^{j(\omega t + \beta)}}{A e^{j(\omega t + \gamma)}} \quad (9.17)$$

$$\therefore \frac{y(t)}{r(t)} = \frac{B}{A} e^{j(\beta - \gamma)} = T(j\omega) \quad \text{com} \quad (9.18)$$

$$|T(j\omega)| = \frac{B}{A} \quad \text{e} \quad \phi(T(j\omega)) = \angle T(j\omega) = \beta - \gamma \quad (9.19)$$

Exemplo: determinar a resposta do sistema representado pela FT $T(s) = \frac{6}{s+4}$ quando submetido à entrada $r(t) = 3\cos(7t + 20^\circ)$.

Em primeiro lugar, calcula-se $F(j\omega)$,

$$T(s = j7) = \frac{6}{j7 + 4} = |T(j7)|e^{j\phi} = 0,74e^{-j60^\circ}$$

Por analogia com $r(t) = A\sin(\omega t + \gamma)$ e $y(t) = B\sin(\omega t + \beta)$, tem-se:

$$A = 3 \quad \omega = 7 \text{ rad/s} \quad \gamma = 20^\circ$$

Com isso, a resposta $c(t)$ fica,¹:

$$\begin{aligned} \text{amplitude de } y(t) \quad B &= A \cdot |F(j7)| = (3) \cdot (0,74) = 2,22 \\ \text{fase de } y(t) \quad \beta &= \phi + \gamma \\ \text{como } \gamma &= 20^\circ \quad \text{e} \quad \phi = -60^\circ \implies \beta = 20^\circ + (-60^\circ) = -40^\circ \\ \therefore \quad y(t) &= 2,22\cos(7t - 40^\circ) \end{aligned}$$

Verifica-se que, para uma entrada periódica (cosseno), a saída é também periódica e a amplitude depende da frequência ω .

9.2 Diagrama de Bode – fundamentos ²

9.2.1 Definições

Apresentam-se a seguir algumas definições utilizadas na construção do Diagrama de Bode e na análise no domínio da frequência.

1. Amplitude normalizada

$$A(\omega) \triangleq \frac{\text{amplitude da saída senoidal}}{\text{amplitude da entrada senoidal}} = |T(s = j\omega)| \quad (9.20)$$

2. Fase

$$\phi(\omega) \triangleq \angle T(s = j\omega) = \angle T(j\omega) = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\text{Im}(T(\pm j\omega))}{\text{Re}(T(\pm j\omega))} \right] \quad (9.21)$$

3. Decibel (dB)

O decibel (dB) é uma grandeza adimensional que representa a relação entre logaritmos das amplitudes de sinais de saída e entrada. Fisicamente, representa a intensidade sonora

¹Lembre-se de que o ângulo de fase em graus mostrado aqui serve apenas o propósito didático. Todos os cálculos com números complexos devem ser efetuados com arcos em **radianos**.

²Esta seção é a reprodução do respectivo conteúdo das notas de aula de PME 3380, onde a construção dos Diagrama de Bode foi abordada.

mais baixa perceptível pelo ouvido humano.

$$dB \triangleq 10 \log_{10} \left(\frac{\text{amplitude da saída}}{\text{amplitude da entrada}} \right) \quad (9.22)$$

4. Relações de frequências

$$1 \text{ oitava} = 20 \log_{10} \left(\frac{2 \cdot \text{amplitude}}{\text{amplitude}} \right) = 20 \log_{10} 2 \cong 6 \text{ dB} \quad (9.23)$$

$$1 \text{ década} = 20 \log_{10} \left(\frac{10 \cdot \text{amplitude}}{\text{amplitude}} \right) = 20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB} \quad (9.24)$$

9.2.2 Diagrama de Bode – aspectos gerais

O Diagrama de Bode é um gráfico constituído por duas partes: a primeira parte (ou primeiro diagrama) apresenta as curvas de amplitude $A(\omega)$ em função da frequência à medida que esta é variada entre zero e infinito; a segunda parte (ou diagrama) mostra o ângulo de fase $\phi(\omega)$ em função da frequência.

A escala-padrão de representação da amplitude de $|F(j\omega)|$ é um múltiplo da escala em decibel,

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |F(j\omega)| \quad (9.25)$$

A principal vantagem da representação nesta escala é que, como será visto na construção do diagrama, a multiplicação de módulos transforma-se em simples adição de escalares.

A escala de representação do ângulo de fase é linear. Já a escala de frequências (abscissas) é logarítmica, de modo a abranger grandes faixas de variação.

9.2.3 Diagrama de Bode – fatores básicos na construção do diagrama

A construção do diagrama de Bode de uma função $F(s)$ envolve uma série de procedimentos que podem ser padronizados, quais sejam:

-amplitude e fase de um ganho K

-amplitude e fase de fatores integrais ou derivativos, $s = (j\omega)^{\pm 1}$

-amplitude e fase de fatores de primeira ordem, $(1 + sT)^{\pm 1} = (1 + j\omega T)^{\pm 1}$

-amplitude e fase de fatores de segunda ordem, $(\omega_n^2 / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2))^{\pm 1}$ que, com $s = j\omega$, fica

$$\left[\frac{1}{1 + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j + \left(\frac{\omega}{\omega_n} j \right)^2} \right]^{\pm 1}$$

Ganho K

Um ganho K é representado, no plano complexo, por $K = K + j0$. Assim, aplicando-se as equações 9.25 e 9.21 obtém-se

$$A(\omega) = 20 \log_{10} K \text{ dB}$$

$$\phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{0}{K} = 0^\circ$$

Portanto, no diagrama de amplitude, o ganho K é representado por uma reta paralela ao eixo das abscissas, com valor positivo se $K > 1$, negativo se $0 < K < 1$ e nulo se $K = 1$ (0 dB). O ângulo de fase é nulo para toda a faixa de frequências. Salienta-se ainda que, caso o ganho seja multiplicado por potências de 10,

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(10^n K) = 20(\log_{10} 10^n + \log_{10} K) = 20 \log_{10} K + 20n$$

Fatores integrais e derivativos

Seja $s = j\omega$ (fator derivativo). Aplicando-se as equações 9.25 e 9.21,

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |j\omega| = 20 \log_{10} \omega \text{ dB}$$

$$\phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{0} \right) = 90^\circ \left(\pi/2 \right) \text{ rad}$$

Seja, agora, $s = (j\omega)^{-1}$ (fator integral). Aplicando-se as equações 9.25 e 9.21,

$$A(\omega) = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log_{10} \omega \text{ dB}$$

$$\phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-\omega}{0} \right) = -90^\circ \left(-\pi/2 \right) \text{ rad}$$

Observa-se também que, para $s = j\omega$, :

$$\omega = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow A(\omega) = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\text{variação de uma oitava: } 20 \log_{10} \left(\frac{2\omega}{\omega} \right) = 20 \log_{10} 2 \cong 6 \text{ dB}$$

$$\text{variação de uma década: } 20 \log_{10} \left(\frac{10\omega}{\omega} \right) = 20 \log_{10} 10 \cong 20 \text{ dB}$$

Por analogia, para $s = (j\omega)^{-1}$

$$\omega = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow A(\omega) = -20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\text{variação de uma oitava: } -20 \log_{10} 2 \cong -6 \text{ dB}$$

$$\text{variação de uma década: } -20 \log_{10} 10 \cong -20 \text{ dB}$$

Conclui-se que os fatores derivativo e integral geram, no diagrama de amplitude, retas cujas inclinações são respectivamente 6 dB/oitava (20 dB/década) e -6 dB/oitava (-20 dB/década); além disso, o ponto ($\omega = 1 \text{ rad/s}$; 0 dB) irá sempre pertencer às respectivas

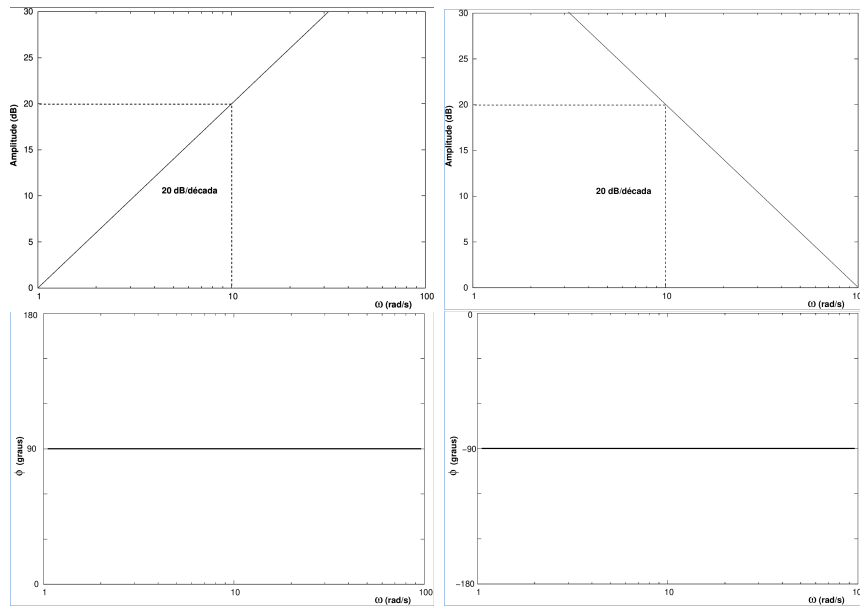


Figura 76: Diagramas de Bode: fatores derivativo e integral.

retas. Os ângulos de fase são constantes com valores 90° e -90° , respectivamente. A situação descrita pode ser vista na fig. 76.

Para fatores integrais ou derivativos de multiplicidade n , ou seja, $(j\omega)^{\pm n}$, tem-se,

$$A(\omega) = \pm 20n \text{ dB/década}$$

$$\phi(\omega) = \pm n \frac{\pi}{2}$$

Fatores de primeira ordem

Fatores de primeira ordem são do tipo

$$(1 + sT)^{\pm 1} \big|_{s=j\omega} = (1 + j\omega T)^{\pm 1}, \quad (9.26)$$

onde T é a constante de tempo do sistema. Neste caso, o diagrama de Bode é construído tendo como abscissa múltiplos e submúltiplos da constante de tempo.

Seja o fator de primeira ordem $(1 + j\omega T)$. Aplicam-se as equações 9.25 e 9.21:

Amplitude

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |1 + j\omega T| = 20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right) \quad (9.27)$$

$$\text{para } \omega \ll \frac{1}{T} \implies A(\omega) = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \quad (9.28)$$

$$\text{para } \omega \gg \frac{1}{T} \implies A(\omega) = 20 \log_{10} \omega T \text{ dB} \quad (9.29)$$

As equações 9.55 e 9.56 são as *assíntotas* à curva real, dada pela eq. 9.54. Dois pontos

são importantes na construção do diagrama de amplitude:

$$A\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = 20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB} \quad (9.30)$$

$$A\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \quad (9.31)$$

Conclui-se que, para $\omega \leq 1/T$, a amplitude vale 0 dB, ao passo que, para $\omega > 1/T$ a aproximação leva a uma reta com inclinação de 20 dB/década, ou 6 dB/oitava. O valor $\omega = 1/T$ é denominado *frequência de canto*, e representa o ponto a partir do qual a assíntota horizontal passa a inclinada.

Ângulo de fase

$$\phi(\omega) = \angle F(j\omega) = \angle(1 + j\omega T) \quad (9.32)$$

$$\phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega T}{1}\right) \quad (9.33)$$

$$\text{para } \omega \ll \frac{1}{T} \implies \phi(\omega) = 0^\circ (0 \text{ rad}) \quad (9.34)$$

$$\text{para } \omega \gg \frac{1}{T} \implies \phi(\omega) = 90^\circ (\pi/2 \text{ rad}) \quad (9.35)$$

$$\text{para } \omega = \frac{1}{T} \implies \phi(\omega) = 45^\circ (\pi/4 \text{ rad}) \quad (9.36)$$

Erro em amplitude

Quando efetua-se a aproximação pelas assíntotas, eqs. 9.55 e 9.56, incorre-se em erro com relação ao valor que seria obtido caso a amplitude fosse calculada de acordo com a expressão exata, eq. 9.54. Em termos práticos, consideram-se os erros existentes no intervalo entre uma oitava acima e uma oitava abaixo da frequência de canto. Assim, subtraindo-se o valor aproximado do exato obtêm-se

$$\text{para } \epsilon(A(\omega))|_{\omega=1/T} \implies \epsilon = 20 \log_{10}(\sqrt{1+1}) - 20 \log_{10} 1 = 3,03 \text{ dB (freq. de canto)} \quad (9.37)$$

$$\text{para } \epsilon(A(\omega))|_{\omega=2/T} \implies \epsilon = 20 \log_{10}(\sqrt{1+4}) - 20 \log_{10} 2 = 0,97 \text{ dB (1 oitava acima)} \quad (9.38)$$

$$\text{para } \epsilon(A(\omega))|_{\omega=1/2T} \implies \epsilon = 20 \log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right) - 20 \log_{10} 1 = 0,97 \text{ dB (1 oitava abaixo)} \quad (9.39)$$

Observa-se que o erro é máximo na frequência de canto e simétrico em relação a ela nas duas direções. Um cálculo simples irá revelar que, para $\omega = 4/T$ (duas oitavas acima) ou $\omega = 1/4T$ (duas oitavas abaixo), o erro é de 0,26 dB, decaindo para 0,04 dB quando se avalia o intervalo de ± 1 década, que pode ser admitido desprezível.

O diagrama de Bode para as aproximações referentes a um fator de primeira ordem no numerador de $F(s)$ (o que representa um zero em $s = -1/T$) é mostrado na fig. 77 (a).

Considera-se agora o fator de primeira ordem $\frac{1}{1+j\omega T}$. O desenvolvimento é totalmente análogo, levando a resultados que apresentam sinais invertidos em relação ao caso anterior.

Amplitude

$$A(\omega) = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right) \quad (9.40)$$

$$\text{para } \omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow A(\omega) = -20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \quad (9.41)$$

$$\text{para } \omega \gg \frac{1}{T} \Rightarrow A(\omega) = -20 \log_{10} \omega T \text{ dB} \quad (9.42)$$

As equações 9.41 e 9.42 são as *assíntotas* à curva real, dada pela eq. 9.40. Neste caso, os dois pontos para a construção do diagrama de amplitude são:

$$A\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = -20 \log_{10} 10 = -20 \text{ dB} \quad (9.43)$$

$$A\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = -20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \quad (9.44)$$

Conclui-se que, para $\omega \leq 1/T$, a amplitude vale 0 dB, ao passo que, para $\omega > 1/T$ obtém-se uma reta com inclinação de -20 dB/década, ou -6 dB/oitava. Novamente, denomina-se $\omega = 1/T$ como frequência de canto.

Ângulo de fase

$$\phi(\omega) = \angle F(j\omega) = \angle(1 + j\omega T)^{-1} \quad (9.45)$$

$$\text{como } \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1(1-j\omega T)}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2} \Rightarrow \quad (9.46)$$

$$\phi(\omega) = -\text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega T}{1} \right) \quad (9.47)$$

$$\text{para } \omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ (0 \text{ rad}) \quad (9.48)$$

$$\text{para } \omega \gg \frac{1}{T} \Rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ (-\pi/2 \text{ rad}) \quad (9.49)$$

$$\text{para } \omega = \frac{1}{T} \Rightarrow \phi(\omega) = -45^\circ (-\pi/4 \text{ rad}) \quad (9.50)$$

Erro em amplitude

$$\text{Para } \epsilon(A(\omega))|_{\omega=1/T} \Rightarrow \epsilon = -20 \log_{10} \left(\sqrt{1+1} \right) - (-20 \log_{10} 1) = -3,03 \text{ dB (freq. de canto)} \quad (9.51)$$

$$\text{para } \epsilon(A(\omega))|_{\omega=2/T} \Rightarrow \epsilon = -20 \log_{10} \left(\sqrt{1+4} \right) - (-20 \log_{10} 2) = -0,97 \text{ dB (1 oitava acima)} \quad (9.52)$$

$$\text{para } \epsilon(A(\omega))|_{\omega=1/2T} \Rightarrow \epsilon = -20 \log_{10} \left(\sqrt{1+\frac{1}{4}} \right) - (-20 \log_{10} 1) = -0,97 \text{ dB (1 oitava abaixo)} \quad (9.53)$$

As considerações em relação ao decaimento logarítmico quando se aumenta o intervalo de avaliação para ± 4 oitavas ou ± 1 década são idênticas, com a ressalva da inversão no sinal.

Amplitude

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |1 + j\omega T| = 20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right) \quad (9.54)$$

$$\text{para } \omega \ll \frac{1}{T} \implies A(\omega) = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \quad (9.55)$$

$$\text{para } \omega \gg \frac{1}{T} \implies A(\omega) = 20 \log_{10} \omega T \text{ dB} \quad (9.56)$$

As equações 9.55 e 9.56 são as *assíntotas* à curva real, dada pela eq. 9.54. Dois pontos são importantes na construção do diagrama de amplitude:

$$A\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = 20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB} \quad (9.57)$$

$$A\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \quad (9.58)$$

Conclui-se que, para $\omega \leq 1/T$, a amplitude vale 0 dB, ao passo que, para $\omega > 1/T$ a aproximação leva a uma reta com inclinação de 20 dB/década, ou 6 dB/oitava. O valor $\omega = 1/T$ é denominado *frequência de canto*, e representa o ponto a partir do qual a assíntota horizontal passa a inclinada.

Ângulo de fase

$$\phi(\omega) = \angle F(j\omega) = \angle(1 + j\omega T) \quad (9.59)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega T}{1} \right) \quad (9.60)$$

$$\text{para } \omega \ll \frac{1}{T} \implies \phi(\omega) = 0^\circ (0 \text{ rad}) \quad (9.61)$$

$$\text{para } \omega \gg \frac{1}{T} \implies \phi(\omega) = 90^\circ (\pi/2 \text{ rad}) \quad (9.62)$$

$$\text{para } \omega = \frac{1}{T} \implies \phi(\omega) = 45^\circ (\pi/4 \text{ rad}) \quad (9.63)$$

Erro em amplitude

Quando efetua-se a aproximação pelas assíntotas, eqs. 9.55 e 9.56, incorre-se em erro com relação ao valor que seria obtido caso a amplitude fosse calculada de acordo com a expressão exata, eq. 9.54. Em termos práticos, consideram-se os erros existentes no intervalo entre uma oitava acima e uma oitava abaixo da frequência de canto. Assim, subtraindo-se o valor

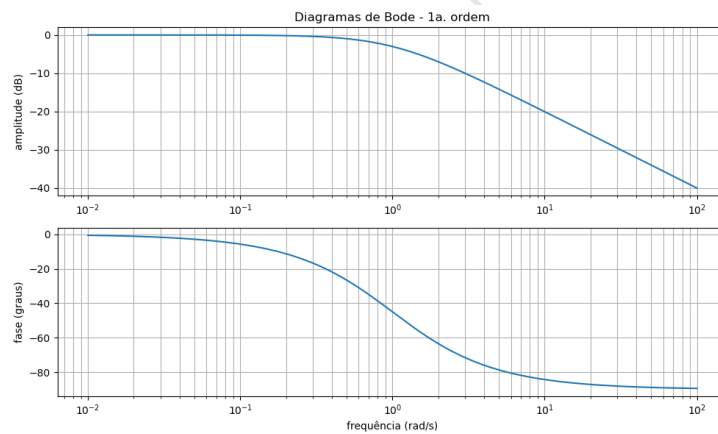
aproximado do exato obtêm-se

$$\text{para } \epsilon(A(\omega))|_{\omega=1/T} \Rightarrow \epsilon = 20 \log_{10} \left(\sqrt{1+1} \right) - 20 \log_{10} 1 = 3,03 \text{ dB (freq. de canto)} \quad (9.64)$$

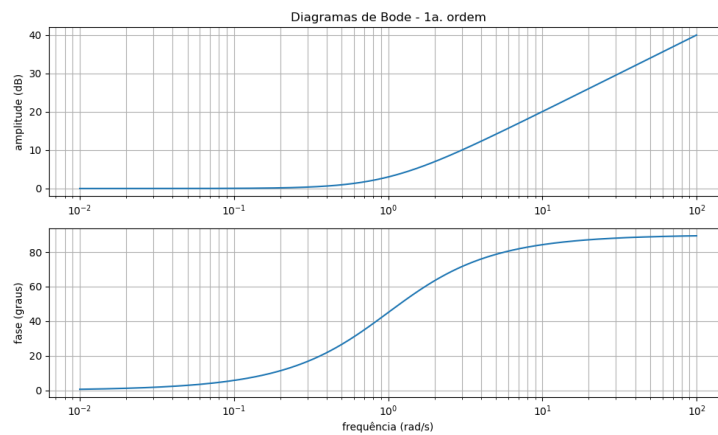
$$\text{para } \epsilon(A(\omega))|_{\omega=2/T} \Rightarrow \epsilon = 20 \log_{10} \left(\sqrt{1+4} \right) - 20 \log_{10} 2 = 0,97 \text{ dB (1 oitava acima)} \quad (9.65)$$

$$\text{para } \epsilon(A(\omega))|_{\omega=1/2T} \Rightarrow \epsilon = 20 \log_{10} \left(\sqrt{1+\frac{1}{4}} \right) - 20 \log_{10} 1 = 0,97 \text{ dB (1 oitava abaixo)} \quad (9.66)$$

Observa-se que o erro é máximo na frequência de canto e simétrico em relação a ela nas duas direções. Um cálculo simples irá revelar que, para $\omega = 4/T$ (duas oitavas acima) ou $\omega = 1/4T$ (duas oitavas abaixo), o erro é de 0,26 dB, decaindo para 0,04 dB quando se avalia o intervalo de ± 1 década, que pode ser admitido desprezível. O diagrama de Bode para as aproximações referentes a um fator de primeira ordem no denominador de $F(s)$ (o que representa um pólo em $s = -1/T$) é mostrado na fig. 77 (b).



(a) $(1 + Ts)^{-1}$



(b) $(1 + Ts)^1$

Figura 77: Diagramas de Bode: fatores de primeira ordem.

Fatores de segunda ordem

Os fatores de 2ª ordem são genericamente expressos como

$$F(s) = \left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right]^{\pm 1} \quad (9.67)$$

Considerando-se o expoente 1 e fazendo-se $s = j\omega$, obtêm-se

$$F(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j^2\omega^2 + 2j\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \quad (9.68)$$

Dividindo-se a equação precedente por ω_n^2 chega-se a

$$F(j\omega) = \frac{1}{j^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j + 1} = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j + \left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right)^2}, \quad (9.69)$$

que é a forma padrão de um sistema de segunda ordem. Observe que, quando $\zeta > 1$, o denominador pode ser escrito como o produto de dois fatores de primeira ordem com *pólos reais* (caso o expoente da eq. 9.67 seja -1, tem-se o produto de dois fatores de primeira ordem com *zeros reais*).

Por outro lado, quando $0 \leq \zeta < 1$, o termo quadrático é o produto de dois fatores com raízes complexas conjugadas.

Amplitude

As equações 9.25 e 9.21 aplicadas à eq. 9.69 fornecem:

$$A(F(j\omega)) = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + 2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right)^2} \right| \Rightarrow \quad (9.70)$$

$$A(\omega) = -20 \log_{10} \left| 1 + 2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right)^2 \right| \Rightarrow \quad (9.71)$$

$$A(\omega) = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (9.72)$$

$$A(\omega) = -20 \log_{10} \sqrt{1 - 2\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2 + \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^4 + 4\zeta^2\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \quad (9.73)$$

Para $\omega \ll \omega_n$,

$$\Rightarrow A(\omega) = -20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} - \text{assíntota das baixas frequências} \quad (9.74)$$

$$\text{para } \omega \gg \omega_n \Rightarrow A(\omega) = -20 \log_{10} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} \Rightarrow \quad (9.75)$$

$$A(\omega) = -40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB} - \text{assíntota das altas frequências} \quad (9.76)$$

Nota-se que a amplitude da resposta é função tanto de um fator externo, qual seja, a frequência do sinal de entrada, quanto de um fator “interno”, o coeficiente de amortecimento

ζ , característico do sistema dinâmico. As curvas de amplitude refletem essa dependência, como pode ser visto no gráfico da fig. 78 (a). Neste diagrama, alguns pontos notáveis são:

$$\begin{aligned} \text{para } \omega = 0 \text{ rad/s} &\Rightarrow A(\omega) = 0 \text{ dB} \\ \text{para } \omega = \omega_n \text{ rad/s} &\Rightarrow A(\omega) = -40 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \text{ pela eq. 9.75} \\ \text{para } \omega = 10\omega_n \text{ rad/s} &\Rightarrow A(\omega) = -40 \log_{10} 10 = -40 \text{ dB} \text{ pela eq. 9.75} \end{aligned}$$

A última equação mostra que a assíntota das altas frequências possui gradiente -40 dB/década, fato que será amplamente utilizado na construção do esboço do Diagrama de Bode. Como mencionado anteriormente, a amplitude é função da frequência de excitação e do coeficiente de amortecimento. Fixado um valor de ζ , obtém-se a curva correspondente de amplitude. Quando a frequência do sinal de entrada iguala-se à frequência natural do sistema, a eq. 9.70 fica,

$$A(F(j\omega)) = A(F(j\omega_n)) = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j2\zeta - 1} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j2\zeta} \right| \quad (9.77)$$

fazendo com que, dessa forma, o denominador atinja um mínimo e, conseqüentemente, ocorra um pico de amplitude, cujo valor é inversamente proporcional ao valor de ζ . A frequência ω_n é a frequência de canto para o fator quadrático.

Ângulo de fase

Considera-se a função

$$F(s = j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n}j) + (\frac{\omega}{\omega_n}j)^2} = \quad (9.78)$$

$$\frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})j} = \quad (9.79)$$

$$\frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})j} \left[\frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 - 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})j}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 - 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})j} \right] \quad (9.80)$$

$$= \frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 - 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})j}{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2 - 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (9.81)$$

Portanto,

$$\text{tg}\phi(\omega) = \frac{-2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \Rightarrow -\text{tg}\phi(\omega) = \frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}, \quad (9.82)$$

que, tal qual a amplitude, depende de ω e ζ . Assim,

$$\text{para } \omega \ll \omega_n \Rightarrow -\text{tg}\phi(\omega) = 0 \Rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ (0 \text{ rad}) \quad (9.83)$$

$$\text{para } \omega \gg \omega_n \Rightarrow -\text{tg}\phi(\omega) = 0^- \Rightarrow \phi(\omega) = -180^\circ (-\pi \text{ rad}) \quad (9.84)$$

$$\text{para } \omega = \omega_n \Rightarrow -\text{tg}\phi(\omega) = -\frac{2\zeta}{0} \Rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ (-\pi/2 \text{ rad}) \quad (9.85)$$

O comportamento do ângulo de fase para fatores de segunda ordem é visto no gráfico da fig.

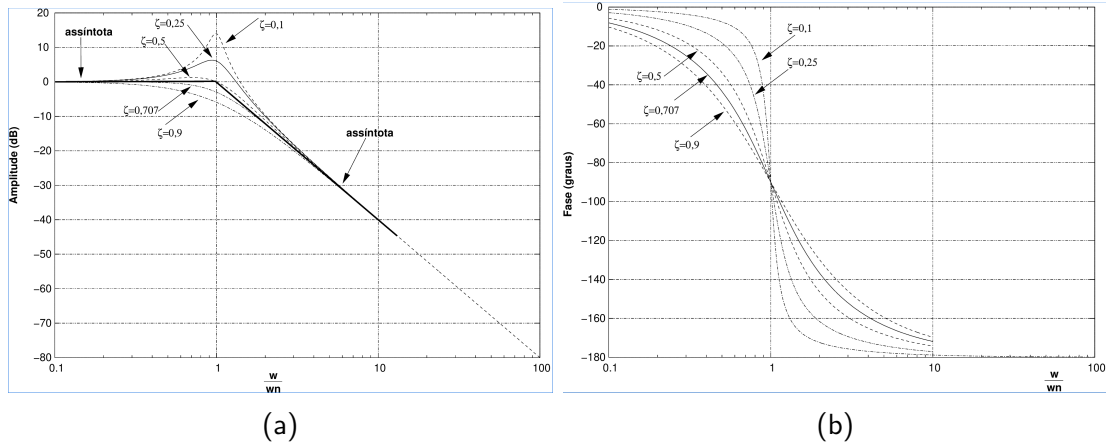


Figura 78: Diagramas de Bode: fatores de 2a. ordem.

78 (b).

RESSONÂNCIA

Já foi observado que a amplitude da resposta é função tanto da frequência natural do sistema quanto do seu coeficiente de amortecimento. O gráfico de amplitude, no diagrama de Bode, indica que existe um valor de ζ que delimita a ocorrência ou não de um pico, com $\omega \cong \omega_n$.

Quando $|F(j\omega)|$ apresentar um pico, a frequência correspondente será denominada *frequência de ressonância*, ω_r . Matematicamente, um pico de amplitude implica a ocorrência de um mínimo no denominador da eq. 9.87 abaixo,

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + 2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right)^2} \right| \quad (9.86)$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (9.87)$$

Para achar o mínimo no denominador, faz-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left(\left[1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{d\omega} \left(\left[\frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_n^2} \right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega_n^4 - 2\omega_n^2\omega^2 + \omega^4}{\omega_n^4} + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^4} \right) &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega_n^4 + \omega^4 - 2\omega^2\omega_n^2(1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^4} \right) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{d}{d\omega} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2(1 - 2\zeta^2) \right) &= 0 \Rightarrow \\
0 + 4\frac{\omega^3}{\omega_n^4} - 4\frac{\omega}{\omega_n^2}(1 - 2\zeta^2) &= 0 \Rightarrow \\
4\omega \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^4} - \frac{1 - 2\zeta^2}{\omega_n^2} \right) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\omega^2}{\omega_n^4} = \frac{1 - 2\zeta^2}{\omega_n^2} \Rightarrow \omega^2 &= \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)
\end{aligned}$$

Assim, o valor de ω que minimiza o denominador da eq. 9.87 é a frequência de ressonância

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (9.88)$$

Com respeito à eq. 9.88, os seguintes pontos podem ser destacados:

- em sistemas cujo amortecimento é nulo ou muito pequeno, a frequência de ressonância ω_r tende à frequência natural, ω_n ;
- quando o radical se anula, não há pico de ressonância. O valor de ζ que torna o radical nulo é $\zeta = 0,707$;
- para $0 < \zeta \leq 0,707$, a frequência de ressonância ω_r é inferior à frequência natural amortecida, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, e a resposta ao degrau é oscilatória;
- para $\zeta \rightarrow 0$, a frequência de ressonância tende à frequência natural;
- quando $\zeta > 0,707$, não há pico de ressonância. Sabe-se, que para $0,707 \leq \zeta \leq 1$, o sistema é amortecido porém ainda sujeito a oscilações, quando solicitado ao degrau. Porém as oscilações decaem rapidamente.

O valor de pico na ressonância, M_r , pode ser encontrado substituindo-se a eq. 9.88 na eq. 9.87, que conduz a

$$M_r = |F(j\omega)| = |F(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (9.89)$$

A equação 9.89 indica que, à medida que ζ tende a zero, a amplitude tende ao infinito, ou seja, um sistema não amortecido, quando sujeito a vibrações na sua frequência natural, tende a oscilar com amplitudes cada vez maiores. Além disso, sistemas fracamente amortecidos, quando excitados em frequência próximas à frequência de ressonância, tendem a apresentar maiores amplitudes de oscilação.

As características de resposta apresentadas acima permitem a obtenção de esboços do diagrama de Bode para funções genéricas, desde que devidamente decompostas em termos de ordem inferior. O desenvolvimento para fatores de 2a. ordem, eq. 9.67 com expoente -1 é

totalmente análogo, com diagramas de Bode simétricos com respeito ao eixo das abscissas e não são mostrados aqui.

9.3 Gráficos Polares: Gráfico de Nyquist

Uma representação alternativa para a resposta em frequência de um sistema é através de gráficos polares para a função de transferência. O Gráfico polar de $T(j\omega)$ é uma representação do módulo $|T(j\omega)|$ contra o ângulo de fase $\angle T(j\omega)$ com ω variando de zero a ∞ , denominado *Gráfico de Nyquist*. O ângulo de fase é medido no sentido anti-horário a partir do eixo real positivo, conforme representado na fig. 79.

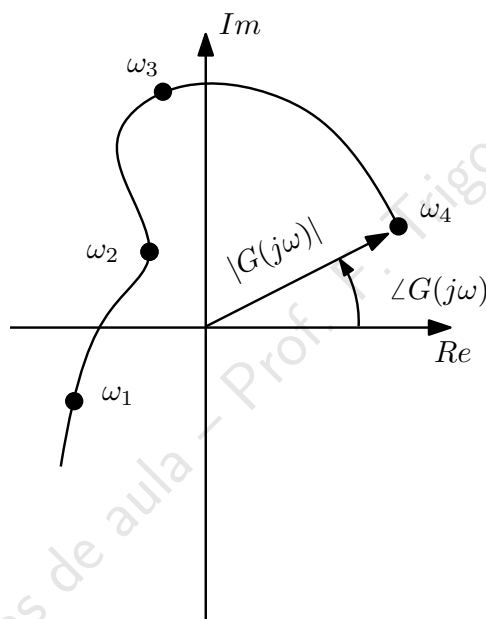


Figura 79: Gráfico de Nyquist

Note que, se $G(j\omega) = G_c(j\omega) \cdot G_p(j\omega)$, então

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= |G_c(j\omega)| \cdot |G_p(j\omega)| \\ \angle G(j\omega) &= \angle G_c(j\omega) + \angle G_p(j\omega) \end{aligned}$$

A vantagem do uso do gráfico polar é que permite colocar todas as características de resposta em frequência para todas as frequências em um único gráfico. A desvantagem é que não permite perceber claramente a contribuição de cada fator individualmente.

Da mesma forma que nos Diagramas de Bode, pode-se montar o gráfico individual para cada fator.

1. Fatores integrais e derivativos, $(j\omega)^{\pm 1}$, cujos gráficos são mostrados na fig. 80:

$$\begin{aligned} \frac{1}{j\omega} : G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ \\ j\omega : G(j\omega) &= j\omega = \omega \angle +90^\circ \end{aligned}$$

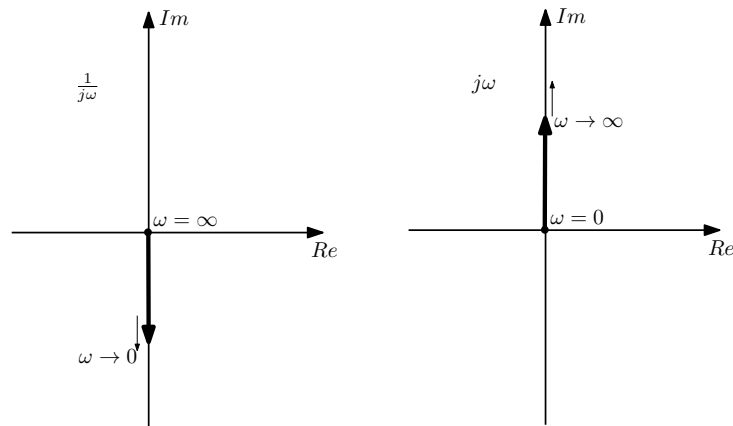


Figura 80: Gráfico de Nyquist para fatores integrais e derivativos.

2. Fatores de primeira ordem, $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$, cujos gráficos são mostrados na fig. 81:

$$(1 + j\omega T)^{-1} : G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle \tan^{-1} \omega T$$

$$(1 + j\omega T)^{+1} : G(j\omega) = 1 + j\omega T = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \angle \pi/2$$

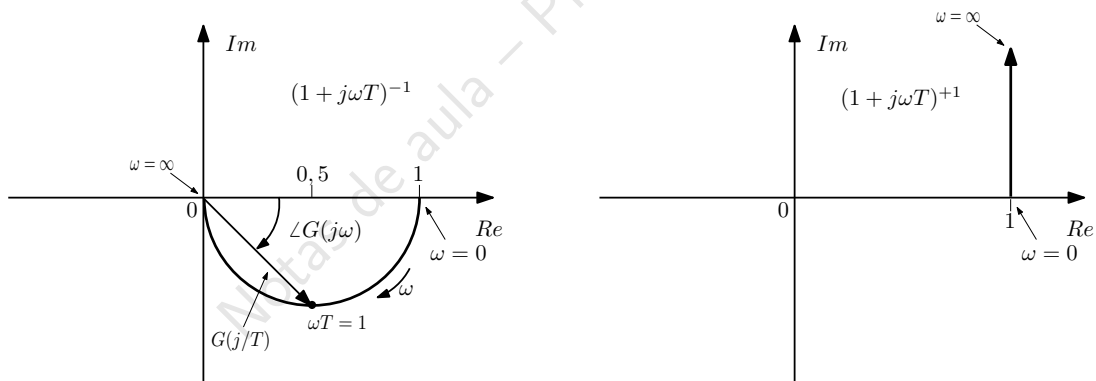


Figura 81: Gráfico de Nyquist para fatores de primeira ordem. Note que para $-\infty < \omega \leq 0$ ambos os gráficos são simétricos com respeito ao eixo real e não são mostrados na figura.

3. Fatores de segunda ordem, $\left[\left(1 + 2\zeta j \frac{\omega}{\omega_n} + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \right]^{\pm 1}$ com $\zeta > 0$, cujos gráficos são mostrados na fig. 82:

- $G(j\omega) = \frac{1}{\left[\left(1 + 2\zeta j \frac{\omega}{\omega_n} + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \right]}$

$$G(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 (\omega/\omega_n)^2}} \\ \angle G(j\omega) &= \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2 (\omega_n^2 - \omega^2)} \right) \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = 1, \quad \angle G(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -180^\circ$$

$$|G(j\omega = j\omega_n)| = \frac{-2\zeta}{0}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

$$\bullet G(j\omega) = \left[\left(1 + 2\zeta j \frac{\omega}{\omega_n} + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \right]^{-1}$$

$$G(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| &= \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 (\omega/\omega_n)^2} \\ \angle G(j\omega) &= \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})} \right) \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = 1, \quad \angle G(j\omega) = 0$$

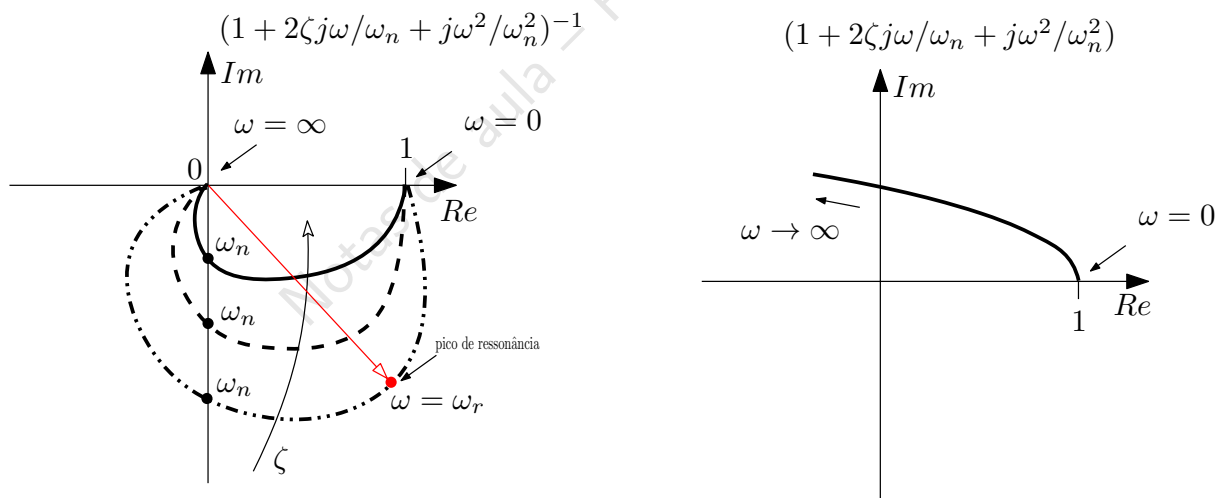


Figura 82: Gráfico de Nyquist para fatores de segunda ordem. Como na figura anterior, para $-\infty < \omega \leq 0$ há simetria com respeito ao eixo real.

Deve-se ressaltar que, para sistemas amortecidos, a frequência de ressonância ω_r **não é idêntica** à frequência natural ω_n não amortecida. No gráfico de Nyquist, ω_r corresponde à maior amplitude medida a partir da origem, como indicado na fig. 82 para um dos valores genéricos de ζ .

9.4 Estabilidade relativa utilizando diagramas de Bode

Suponha que seja dado um sistema para o qual já foi efetuada alguma ação de controle no sentido de obter respostas limitadas para entradas limitadas, ou seja, **obteve-se sua estabilidade absoluta**, que pode ser comprovada, por exemplo, pelo critério de Routh-Hurwitz.

Eventualmente, ainda haja necessidade de ajustes para alcançar alguma especificação de desempenho; por outro lado, é importante também saber qual o efeito que mudanças na planta causadas por condições como envelhecimento ou modificação de algum parâmetro constitutivo pode causar no seu funcionamento. Para isso, sistemas de controle devem ser projetados com certa flexibilidade para correções sem que, entretanto, a estabilidade absoluta seja perdida. Na linguagem de controle, a quantificação dessa flexibilidade é denominada *estabilidade relativa*.

A estabilidade relativa de um sistema é determinada com base na suas margens de ganho e fase. Para compreender o que isso significa, recordemos o conceito de sensibilidade com o auxílio da fig. 83

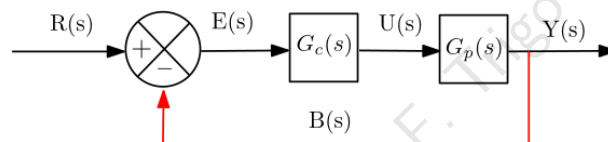


Figura 83: Diagrama de blocos para um sistema genérico em malha fechada com $G_c(s) = K$, $H(s) = 1$.

Para $G_c(s) = K$, valor real fixo e $H(s) = 1$ (realimentação unitária) a sensibilidade é

$$S(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + KG(s)} = \frac{1}{1 + L(s)},$$

ou seja, quanto **maior** a função de transferência de retorno (o denominador de $S(s)$), **menor** a sensibilidade do sistema em malha fechada a modificações nos parâmetros da planta. Ocorre que, se a equação característica $1 + L(s) = 1 + KG(s) = 0 \Rightarrow G(s) = -1/K$ para algum **valor de frequência** quando esta varia entre zero e infinito, **o sistema em malha fechada se torna instável a partir dessa frequência**.

É comum em análise de margens de ganho e fase utilizar $K = 1$. Nessas condições, a instabilidade ocorre sempre que a **FTMA** $L(s)$ seja tal que a equação característica se anule, ou seja,

$$\begin{aligned} L(s) &= -1 \Rightarrow L(s) = |L(s)|\angle(L(s)) \\ L(s) &= 1\angle -180^\circ \end{aligned}$$

Essencialmente, os diagramas de Bode contêm as mesmas informações que o diagrama de Nyquist, porém na forma de dois gráficos, amplitude e fase. Na fig. 84 são apresentados os diagramas de Nyquist e Bode para uma FTMA (*loop function*) $L(s)$ genérica, que nos permitirá definir as margens de ganho e fase. Em (a) e (b) o sistema é **estável em malha fechada**; em (c) e (d), o sistema é **instável em malha fechada**. Assim,

- **Margem de ganho:** é o valor K_g pelo qual a FTMA $L(s)$ pode ser multiplicada, na

frequência ω_g para a qual ocorre uma mudança de fase de 180° , **sem que o módulo da equação característica $|1 + K_g L(s)|$ atinja zero**;

- **Margem de fase:** corresponde ao atraso angular ϕ que pode ser adicionado à FTMA $L(s)$, na frequência ω_f para o qual o seu módulo é unitário, **sem que o módulo da equação característica $|1 + L(s)|$ seja anulado**. Como a escala de amplitude no diagrama de Bode é logarítmica, segue que, quando $|L(s)| = 1$, $20 \log_{10} |L(s)| = 0$, conforme mostrado no gráfico correspondente.

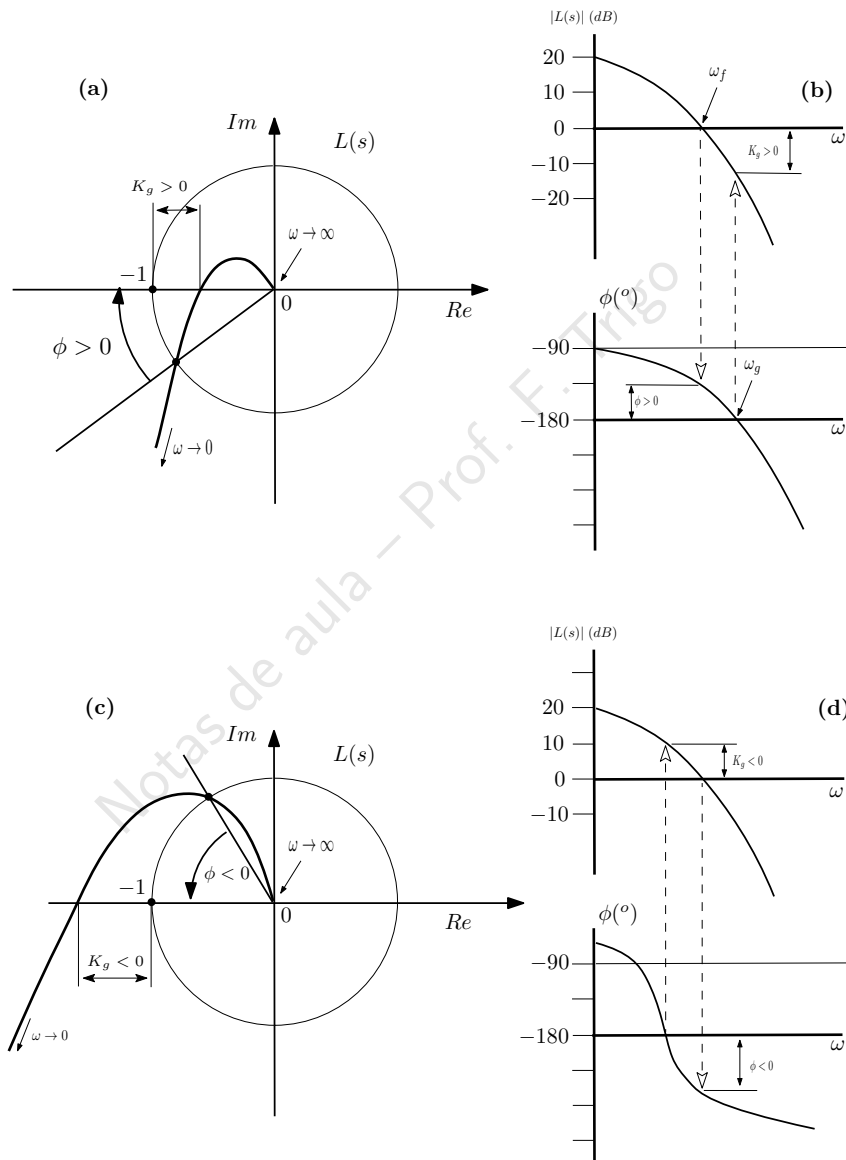


Figura 84: Diagramas de Nyquist e Bode de uma FTMA $L(s)$ genérica mostrando margens de ganho e fase.

Compensadores de avanço e atraso de fase podem também ser projetados com auxílio dos diagramas de Bode, **sempre respeitando ambas as margens**. É importante salientar que **sistemas de primeira e segunda ordem possuem margem de ganho infinita**, pois a fase nunca atinge -180° . Exemplos de aplicação são apresentados em sala e também podem ser consultados nas referências do curso.

PARTE II

MÓDULOS 5–8

Notas de aula – Prof. E. Trigo

10 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA E ESPAÇO DE ESTADOS

Como vimos anteriormente, há duas maneiras importantes para a representação de sistemas dinâmicos:

- no domínio das frequências ou modelo de função de transferência; tal abordagem é conhecida como *Controle Clássico*
- no domínio do tempo ou em espaço de estados, que caracteriza o chamado *Controle Moderno*.

Sempre é importante ressaltar que as técnicas de controle mais atuais, dentre elas, ótimo, robusto, adaptativo ou estocástico, além outras que combinam várias delas, reúnem as melhores características das duas abordagens. Os módulos 5 a 8 do curso têm como objetivo as técnicas de controle moderno, que demandam as seguintes definições:

- **estado:**
O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis, funções do tempo chamadas *variáveis de estado* cuja especificação determina completamente a evolução do sistema no tempo na ausência de excitação externa.
- **vetor de estado:**
ao conjunto das n variáveis de estado agrupadas sequencialmente na forma de um vetor x dá-se o nome *vetor de estado*.
- **espaço de estados:** o espaço n -dimensional no qual os eixos são as n variáveis de estado é denominado *espaço de estados*.

O comportamento de um sistema dinâmico é descrito por um conjunto de equações diferenciais, ordinárias ou parciais, o seu *modelo matemático*. Para a solução do sistema de equações diferenciais são necessárias *condições iniciais* (para as EDOs e EDDPs) e *condições de contorno* (para as EDDPS). Neste curso, trataremos apenas de sistemas a *parâmetros concentrados*, os quais são descritos por EDOs.

A representação em espaço de estados não é única e, por vezes, as variáveis de estado não representam grandezas físicas. Sabemos que uma EDO de ordem n pode ser convertida em n EDOs de ordem 1. Esse número n , entretanto, é *único* (consequência da definição) e estabelece a *ordem* do sistema.

Como há estreita ligação entre as representações da dinâmica de sistemas no domínio complexo (Laplace) e no domínio do tempo, inicialmente estudaremos como se dá a transformação de uma abordagem para a outra.

Dissemos acima que a representação da dinâmica de um sistema em espaço de estados (EE) não é única, e isso será mostrado mais adiante. Ocorre que, dada uma representação no domínio complexo, esta sim é única. Passemos à representação em EE a partir da representação no domínio complexo.

10.1 Conversão de FT para EE

1. sistemas lineares e invariantes no tempo com uma entrada $u(t)$ (sem derivadas) e uma saída $y(t)$ (UEUS = SISO)

Partimos da FT e definindo $D^n \triangleq \frac{d^n}{dt^n}$,

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \\ (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) &= U(s) \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \\ D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_{n-1} D y + a_n y &= u \\ D^n y &= -a_1 D^{n-1} y - \dots - a_{n-1} D y - a_n y + u \end{aligned} \quad (10.1)$$

A eq. 10.1 é uma EDO de ordem n e, de acordo com a argumentação, pode ser convertida em $2n$ EDOs de ordem 1. Portanto, adotando

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned} \quad (10.2)$$

O sistema das eqs. 10.2 pode ser escrito de forma matricial como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]^T \end{aligned} \quad (10.3)$$

De forma compacta,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{aligned} \quad (10.4)$$

As eqs. 10.4 são uma das possibilidades de representação da função de transferência

10.1 possíveis em *espaço de estados*. Salienta-se que a matriz de alimentação direta, D , nesse caso assumiu o valor nulo, mas isso não invalida a generalidade do procedimento. As matrizes A , B e C são denominadas respectivamente de *modelo do sistema (ou planta)*, de *controle* e do *modelo de observação (ou de medição)* na literatura corrente. A matriz A , construída de modo a conter todos os coeficientes da EDO na última linha¹, possui uma estrutura especial denominada *forma canônica controlável ou primeira forma companheira*.

2. sistemas lineares e invariantes no tempo com uma entrada $u(t)$ (com derivadas) e uma saída $y(t)$

Nesse caso, o procedimento é mais trabalhoso e foi desenvolvido no curso de modelagem de forma mais detalhada. Resumidamente, seja a FT genérica.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (10.5)$$

Adotando-se um polinômio auxiliar $Z(s)$, tem-se

$$T(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} \frac{Z(s)}{U(s)} \quad \text{com} \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{Z(s)} &= (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n) \\ \frac{Z(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \end{aligned} \quad (10.7)$$

O desenvolvimento para a eq. 10.7 é idêntico ao já efetuado e que resultou nas eqs. 10.3. Para a eq. 10.6, tem-se:

$$y = b_0 D^n z + b_1 D^{n-1} z + \dots + b_{n-1} z + b_n z \quad (10.8)$$

Após considerável álgebra, a equação do modelo de observação na forma de EE pode ser obtida:

$$y = (b_n - a_n b_0) x_1 + (b_{n-1} - a_{n-1} b_1) x_2 + \dots + (b_1 - a_1 b_0) x_n + b_0 u \quad (10.9)$$

O modelo completo em EE é

¹Iniciando a numeração dos coeficientes na ordem contrária, a matriz companheira terá valores na primeira linha, mas essa forma é menos comum.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} (b_n - a_n b_0) & (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) & \dots & (b_1 - a_1 b_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [b_0]u \quad (10.10)
\end{aligned}$$

Novamente, de forma compacta,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\
y &= C\mathbf{x} + Du \quad (10.11)
\end{aligned}$$

Nessa formulação, a matriz A também possui os coeficientes da EDO em uma de suas linhas, caracterizando a forma canônica controlável ou primeira forma companheira.

Há também outras formas canônicas. Quando a matriz A apresenta os coeficientes da EDO em uma de suas colunas (normalmente a última), diz-se que possui forma canônica observável ou segunda forma companheira. Nessa situação, com entradas que possuem derivadas, o sistema em espaço de estados fica

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [b_0]u \quad (10.12)
\end{aligned}$$

3. sistemas lineares invariantes ou variantes no tempo com múltiplas entradas (com ou sem derivadas) e múltiplas saídas (MEMS = MIMO):

Este é o caso mais geral que iremos tratar no curso. O procedimento para a passagem ao espaço de estados é o mesmo efetuado nos itens anteriores, com a diferença que, para várias entradas e várias saídas, as dimensões das matrizes B e C devem ser modificadas de acordo com a necessidade. Resumidamente, temos:

para sistemas lineares variantes no tempo – (SLVT)

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}, \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p} \text{ nonumber} \quad (10.13)$$

$$\mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D(t)\mathbf{u}, \quad C(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D(t) \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (10.14)$$

para sistemas lineares invariantes no tempo – (SLIT)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times p} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times p} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Em ambos os casos, a forma matricial compacta é representada pela eq. 10.11.

10.2 Solução do sistema em espaço de estados

10.2.1 caso escalar

Vejamos a solução da equação diferencial escalar $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t)$. Separam-se as soluções do sistema homogêneo $x_h(t) = a(t)x_h(t)$ e particular (ou do sistema forçado por $u(t)$) $\dot{x}_p(t) = b(t)u(t)$ de maneira que $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Para o caso homogêneo,

$$\begin{aligned} \frac{dx_h(t)}{dt} &= a(t)x_h(t) \Rightarrow \frac{dx_h(t)}{x_h(t)} = a(t)(dt) \\ \ln x_h(t) \Big|_{x_h(t_0)}^{x_h(t)} &= \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \Rightarrow \ln \frac{x_h(t)}{x_h(t_0)} = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \\ \Rightarrow x_h(t) &= x(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \end{aligned} \quad (10.16)$$

A solução particular requer um pouco mais de trabalho. Seja a função $p(t)$ (desconhecida) tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [p(t)x_p(t)] &= \dot{p}(t)x_p(t) + p(t)\dot{x}_p(t) \\ p(t) \times \{\dot{x}_p(t) &= a(t)x_p(t) + b(t)u(t)\} \\ p(t)\dot{x}_p(t) - p(t)a(t)x_p(t) &= p(t)b(t)u(t) \end{aligned} \quad (10.17)$$

Adotando $\dot{p}(t) = -p(t)a(t)$ na eq. 10.17, obtém-se uma diferencial exata pois

$$\begin{aligned} p(t)\dot{x}_p(t) - \dot{p}(t)x_p(t) &= p(t)b(t)u(t) \\ \frac{d}{dt} [p(t)x_p(t)] &= p(t)b(t)u(t) \Rightarrow d[p(t)x_p(t)] = p(t)b(t)u(t)dt \\ \int_{t_0}^t d[p(t)x_p(t)] &= \int_{t_0}^t p(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau \Rightarrow \end{aligned}$$

Como $dp(t)/p(t) = -a(t)dt$, $p(t) = p(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau}$, a eq. 10.19 fica

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \int_{t_0}^t \frac{p(\tau)}{p(\tau)e^{-\int_{t_0}^t a(\xi)d\xi}} b(\tau)u(\tau)d\tau \Rightarrow \\ x_p(t) &= \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t a(\xi)d\xi} b(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (10.18)$$

A solução geral é, portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ x(t) &= x(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t a(\xi)d\xi} b(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (10.19)$$

No caso de a constante (sistema invariante no tempo), a solução, a solução simplifica-se para

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b(\tau)u(\tau)d\tau \quad (10.20)$$

10.2.2 caso matricial, SLIT

No caso de SLIT, uma das possibilidades de solução é através das transformadas de Laplace; caso o sistema seja linear porém variante no tempo, esse método não se aplica. No entanto, seu conhecimento auxilia na compreensão dos procedimentos mais gerais. Seja, portanto, o SLIT descrito em EE pelas eqs. 10.11 com $D = [0]$ por simplicidade. Aplicando o operador $\mathcal{L}[\cdot]$ da transformada de Laplace à eq. do modelo da planta obtém-se

$$\begin{aligned} s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t_0) &= A\mathbf{x}(s) + B\mathbf{u}(s) \Rightarrow \\ (sI - A)\mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}(t_0) + B\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{x}(s) &= (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(t_0) + (sI - A)^{-1}B\mathbf{u}(s) \end{aligned} \quad (10.21)$$

Para obter $x(t)$, basta aplicar a transformação inversa de Laplace. No entanto, temos aí uma equação diferencial que envolve matrizes e algum cuidado é necessário. Em primeiro lugar, observemos que, para a escalar e constante, vale a relação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}] &= \frac{1}{s-a} = (s-a)^{-1}; \text{ por analogia,} \\ \mathcal{L}[e^{At}] &= (sI - A)^{-1} \Rightarrow \\ \mathbf{x}(t) &= e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Ainda precisamos definir o que seja e^{At} , algo erroneamente denominado "exponencial de matriz", que não existe. De fato, sob certas condições, é possível construir uma série infinita convergente que tem matrizes quadradas como argumento. Um resultado decorrente do Teorema de Cayley-Hamilton ajuda a resolver essa questão.

Teorema 1. Para A uma matriz quadrada de ordem n com λ_i autovalores, se

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \\ \text{for convergente para cada } x &= \lambda_i, \\ \text{então a série matricial correspondente} \\ \sigma(A) &= a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots \\ \text{também será convergente.}\end{aligned}$$

Como consequência, podemos concluir que

$$e^{A(t-\tau)} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots \quad (10.22)$$

permitindo assim obter a solução $\mathbf{x}(t)$ procurada. A matriz $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ é denominada *resolvente* da matriz A . É possível demonstrar que seus autovalores correspondem aos polos de malha fechada da função de transferência correspondente, ou seja, os valores que anulam a equação característica. Esse é outro resultado decorrente do Teorema de Cayley-Hamilton, cujo enunciado é agora oportuno. Dado o polinômio característico da matriz A , $|\lambda I - A| = (-\lambda)^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = \Delta(\lambda)$, o polinômio matricial correspondente é $\Delta(A) = (-1)^n A^n + C_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0I$.

Teorema 2. Teorema de Cayley-Hamilton: toda matriz quadrada A de ordem n satisfaz à sua própria equação característica, ou seja, $\Delta(A) = [0]$.

O polinômio característico da matriz A igualado a zero resulta em uma equação cuja solução são os autovalores dessa matriz; por outro lado, pelo T. de Cayley-Hamilton a matriz A , obtida a partir de uma FT que possui valores correspondentes aos coeficientes do polinômio característico da FT, ao obedecer à sua própria equação característica mostra que seus autovalores possuem estreita relação com os polos da função de transferência. Na realidade, os autovalores de A são os polos da FT cuja transformação resultou na matriz A .

10.2.3 caso matricial, SLVT

Tratemos agora da forma matricial das equações de estado, eqs. 10.11.

- SLVT com matriz A constante e matriz $B = B(t)$, ou seja, o modelo de planta é dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad (10.23)$$

Com a matriz A constante e o conhecimento da série matricial infinita, a solução homogênea é imediata:

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) \quad (10.24)$$

Para o termo forçante, o desenvolvimento é análogo ao efetuado no caso escalar. Multiplicando a eq. 10.23 por uma matriz $K(t)$ (desconhecida) quadrada de ordem n e rearranjando-a obtemos

$$\begin{aligned} K(t)\dot{\mathbf{x}}_p(t) - K(t)A\mathbf{x}(t) &= K(t)B(t)\mathbf{u}(t) \\ \frac{d}{dt}[K(t)\mathbf{x}_p(t)] &= K(t)\dot{\mathbf{x}}_p(t) + \dot{K}(t)\mathbf{x}_p(t) \end{aligned} \quad (10.25)$$

O lado esquerdo da eq. 10.25 pode ser convertido em uma diferencial matricial-vetorial exata adotando-se $\dot{K}(t) = -K(t)A$, cuja solução é $K(t) = e^{-A(t-t_0)}$ pois A é constante. Com isso,

$$\begin{aligned} d[K(t)\mathbf{x}_p(t)] &= K(t)B(t)\mathbf{u}(t) \Rightarrow \\ K(t)\mathbf{x}_p(t) &= K(t_0)\mathbf{x}_p(t_0) + \int_{t_0}^t K(\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{x}_p(t) &= K^{-1}(t)K(t_0)\mathbf{x}_p(t_0) + \int_{t_0}^t K^{-1}(t)K(\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (10.26)$$

Com isso,

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (10.27)$$

- SLVT com $A = A(t)$ e $B = B(t)$: dentre os sistemas lineares em espaço de estados, este é o caso mais geral. Partimos da equação de estado matricial-vetorial

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B\mathbf{u}(t) \quad (10.28)$$

Atendidas as condições suficientes para a existência de solução única, define-se uma matriz quadrada $U(t_0)$ de ordem n cujas colunas são formadas por vetores de condições iniciais linearmente independentes $\mathbf{x}_i(t_0)$. Decorre disso que, para cada condição inicial $\mathbf{x}_i(t_0)$, irá resultar uma solução $\mathbf{x}_i(t)$, vetor coluna de dimensão n contendo a evolução temporal de cada variável de estado x_j entre os instantes t_0 e t para cada condição inicial i . Com os vetores $\mathbf{x}_i(t)$, é possível construir uma matriz quadrada de ordem n

$$U(t) = [\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}_n(t)]$$

Qualquer matriz $U(t)$ tal que $\dot{U}(t) = A(t)U(t)$ é uma matriz fundamental de soluções desde que $|U(t_0)| \neq 0$.

Admitindo que $U(t)$ tenha sido determinada, segue que

$$\mathbf{x}(t) = U(t)U^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (10.29)$$

A simples substituição da eq. 10.29 na eq. 10.28 mostra que são atendidas a condição inicial e a própria equação diferencial para qualquer instante; portanto, a eq. 10.29 é, de fato, uma solução da eq. 10.28.

A solução da equação com o termo forçante $\mathbf{u}(t)$ é análoga à desenvolvida no item

anterior e consiste em "convertê-la" em uma diferencial exata. Temos:

$$\begin{aligned}
 U(t)U^{-1}(t) &= I \Rightarrow \frac{dU^{-1}(t)}{dt} \{U(t)U^{-1}(t)\} = [0] \\
 \frac{dU}{dt}U^{-1} + U\frac{dU^{-1}}{dt} &= [0] \Rightarrow \frac{dU^{-1}}{dt} = -U^{-1}\frac{dU}{dt}U^{-1} \\
 \therefore \frac{dU^{-1}(t)}{dt} &= -U^{-1}(t)A(t)
 \end{aligned} \tag{10.30}$$

Voltando às eqs. 10.28 e 10.30 efetuemos as seguintes operações:

$$\begin{aligned}
 U^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) &= U^{-1}A(t)\mathbf{x}(t) + U^{-1}B(t)\mathbf{u}(t) \\
 \frac{dU^{-1}(t)}{dt}\mathbf{x}(t) &= -U^{-1}(t)A(t)\mathbf{x}(t) \Rightarrow \\
 U^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{dU^{-1}(t)}{dt}\mathbf{x}(t) &= U^{-1}(t)B(t)\mathbf{u}(t) \Rightarrow \\
 \frac{d}{dt}[U^{-1}(t)\mathbf{x}(t)] &= U^{-1}(t)B(t)\mathbf{u}(t) \Rightarrow \\
 \int_{t_0}^t d[U^{-1}(t)\mathbf{x}(t)] &= \int_{t_0}^t U^{-1}(\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\
 U^{-1}(t)\mathbf{x}(t) - U^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) &= \int_{t_0}^t U^{-1}(\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau
 \end{aligned} \tag{10.31}$$

Pré-multiplicando a eq. 10.31 por $U(t)$ e notando que a integração no termo do lado direito dessa equação envolve τ e não t , a solução completa é obtida:

$$\mathbf{x}(t) = U(t)U^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t U(t)U^{-1}(\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{10.32}$$

Salienta-se que o primeiro termo na eq. 10.32 é idêntico ao da solução da equação homogênea, conforme era esperado. A eq. 10.32 representa a *forma geral da solução*; no entanto, $U(t)$ ainda precisa ser obtida.

10.2.4 Matriz de transição de estados

Define-se matriz de transição de estados como

$$\Phi(t, \tau) \triangleq U(t)U^{-1}(\tau) \tag{10.33}$$

quadrada de ordem n . Na ausência de termos forçantes $\mathbf{u}(t)$, a matriz de transição mapeia seu espaço de soluções em si próprio pois, a partir da definição,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \Phi(t, \tau)\mathbf{x}(\tau) \\
 \mathbf{x}(\tau) &= \Phi(\tau, \tau)\mathbf{x}(\tau) \Rightarrow \Phi(\tau, \tau) = I, \quad \forall \tau
 \end{aligned} \tag{10.34}$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, \tau) = \frac{dU(t)}{dt}U^{-1}(\tau) = A(t)U(t)U^{-1}(\tau) \Rightarrow \frac{d}{dt}\Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau) \tag{10.35}$$

A equação diferencial matricial-vetorial, eq. 10.35, em conjunto com as condições iniciais, eq. 10.34 constituem a definição formal de $\Phi(t, \tau)$.

A matriz de transição possui ainda as seguintes propriedades:

- $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \quad \forall t_0, t_1, t_2$
- $\Phi^{-1}(t, t_0) = \phi(t_0, t) \quad \forall t, t_0$
- $\Phi^{-1}(t, t_0)\Phi(t, t_0) = I$

Finalmente, o cálculo efetivo de $\Phi(t, \tau)$ somente é imediato quando a matriz A for constante, situação na qual o resultado é idêntico ao já mostrado acima:

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \quad (10.36)$$

No caso em que a matriz do sistema é variante no tempo, há soluções numéricas e, em casos bastante particulares, soluções analíticas.

10.2.5 Transformações de variáveis de estado

Mencionamos que a representação em EE não é única, embora representem a mesma função ou matriz de transferência. Admitimos aqui SLIT na forma da eq. 10.11 e vamos supor que um dado vetor de estado não é o mais adequado para a representação de determinado sistema. Promovemos então uma transformação linear utilizando uma matriz T constante (condição não necessária mas que simplifica os cálculos), quadrada de dimensão n e não-singular tal que um novo conjunto $\mathbf{z}$ de variáveis de estado seja construído fazendo $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$. Como T é não singular, a relação $\mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{z}$ é válida. Utilizando essas duas equações nas equações do sistema original temos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \Rightarrow T^{-1}\dot{\mathbf{z}} = AT^{-1}\mathbf{z} + B\mathbf{u} \Rightarrow \dot{\mathbf{z}} = TAT^{-1}\mathbf{z} + TB\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{y} = CT^{-1}\mathbf{z} + D\mathbf{u} \end{aligned} \quad (10.37)$$

Observa-se que as eqs. 10.37 possuem a mesma forma das eqs. 10.11 pois

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \bar{A}\mathbf{z} + \bar{B}\mathbf{u} \quad \text{com} \quad \bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB \\ \mathbf{y} &= \bar{C}\mathbf{z} + D\mathbf{u} \quad \text{com} \quad \bar{C} = CT^{-1} \end{aligned} \quad (10.38)$$

Pode-se demonstrar que os autovalores da matriz $\bar{A}$ possui mesmos autovalores e autovetores que a matriz A do sistema original.

10.3 Controlabilidade e observabilidade

A argumentação aqui apresentada é baseada nas referências Fleury (2004) e Brogan (1991). *Controlabilidade* é uma condição associada à relação existente entre as entradas e o estado e, dessa forma, envolve as matrizes A e B do modelo em espaço de estados. O objetivo maior de

um sistema de controle é saber qual deve ser a ação de controle $u(t)$ tendo como observações as saídas $y(t)$.

No projeto por técnicas no domínio da frequência, procura-se uma representação entrada-saída que "esconde" o que ocorre na planta. A matriz de funções de transferência $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ é uma representação parcial da dinâmica interna do sistema. Explica-se: pode haver um conjunto de variáveis envolvidas no processo que são afetadas pelo controle $u(s)$ mas que não estão descritas no modelo e outro conjunto de variáveis com elementos comuns mas não necessariamente coincidentes que afetam as observações. Há também variáveis que não participam da saída e nem são afetadas pelo controle. A fig. 85 ajuda a entender o que se afirmou. O modelo que descreve o sistema é de fundamental importância, como fica

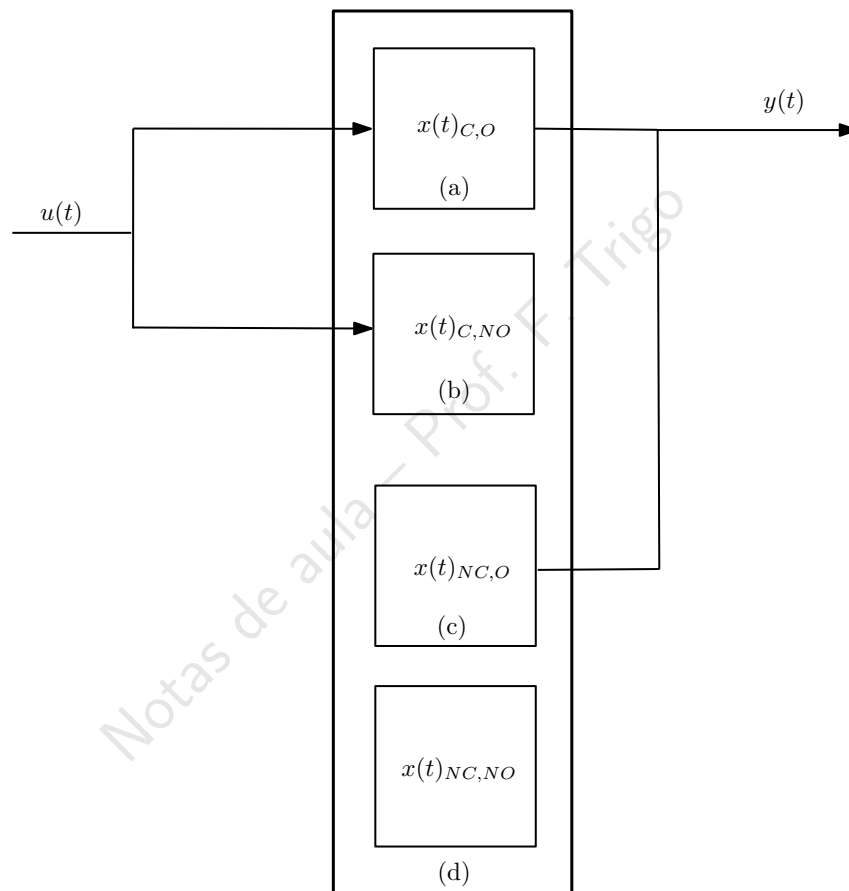


Figura 85: controlabilidade e observabilidade de sistemas: (a) C+O; (b) C+NO; (c) NC+O; (d) NC+NO.

evidenciado nessa figura.

- as ferramentas disponíveis para projeto nos domínios do tempo ou da frequência estão baseadas no vetor $x(t)_{C,O}$ de variáveis controláveis e observáveis do sistema;
- se o sistema de controle afeta tanto as variáveis $x(t)_{C,O}$ quanto as $x(t)_{C,NO}$, não há como prever o comportamento do sistema pois não há como atuar sobre variáveis que não são observáveis e que podem instabilizar o sistema;
- se o controlador não tiver acesso a variáveis observáveis $x(t)_{NC,O}$ para que a correta realimentação seja efetuada, o cálculo do controle estará errado e poderá gerar ações que instabilizam o sistema;

- por último, as variáveis $x(t)_{NC,NO}$ não afetam de maneira alguma o sistema dinâmico.

Da argumentação acima, conclui-se que o projeto de sistemas de controle deve levar em conta que **todas** as variáveis de interesse sejam **variáveis controláveis e observáveis**.

A verificação de controlabilidade e observabilidade para SLVT é matematicamente complexa e envolve os chamados *gramianos* de controlabilidade e observabilidade definidos a seguir.

- Teorema de controlabilidade: um sistema é controlável se, e somente se, seu gramiano de controlabilidade, a matriz

$$P(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) B'(\tau) \Phi'(t, \tau) d\tau \quad (10.39)$$

for inversível para algum $t > t_0$.

- Teorema de observabilidade: Um sistema é observável se, e somente se, seu gramiano de observabilidade, a matriz

$$M(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi'(\tau, t) C'(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (10.40)$$

for inversível para algum $t > t_0$.

Estes teoremas foram enunciados por Kalman (1963) e baseiam-se na determinação do espaço nulo e do espaço de soluções na teoria matricial de sistemas lineares. Sua demonstração, também efetuada por Kalman, é bastante complexa e não faz parte do nosso escopo, conforme mencionado acima.

Para SLIT, há regras práticas para a determinação de controlabilidade e observabilidade. Se o sistema for não controlável, o controlador e os atuadores, representados na matriz B , devem ser modificados (lembre-se que há inúmeras representações no espaço de estados para o mesmo sistema dinâmico). Por outro lado, se o sistema for não observável, o conjunto de medidas e sensores, traduzidos na matriz C , deve ser alterado de modo a tornar o sistema controlável e observável.

Consideremos novamente o SLIT

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times p} \quad (10.41)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (10.42)$$

10.3.1 Regra prática para a verificação de controlabilidade

O estado de uma planta, representado pela eq. 10.41 é controlável em $\tau = t_0$ se, e somente se, existe um sinal de controle $\mathbf{u}(\tau)$ definido em um intervalo finito $t_0 \leq \tau \leq t$ que seja capaz de transferir o sistema do estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ para qualquer estado final $\mathbf{x}(t)$. Se qualquer

estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ é controlável, então o sistema é *completamente controlável*.² Para obter a regra prática de verificação de controlabilidade, adota-se $t_0 = 0$ (poderia ser qualquer valor). Sabemos que para um SLIT,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau, \text{ com } \Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (10.43)$$

Se o sistema é controlável, podemos transferi-lo para qualquer estado $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$. Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \Phi(t_1, 0)\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \Rightarrow \\ -\Phi(t_1, 0)\mathbf{x}(0) &= \int_0^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \Rightarrow \\ \mathbf{x}_0 &= -\Phi^{-1}(t_1, 0) \int_0^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \Rightarrow \\ \mathbf{x}_0 &= -\Phi(0, t_1) \int_0^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \Rightarrow \\ \mathbf{x}_0 &= - \int_0^{t_1} \Phi(0, t_1)\Phi(t_1, \tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \Rightarrow \\ \mathbf{x}_0 &= - \int_0^{t_1} \Phi(0, \tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau = - \int_0^{t_1} e^{A(0-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \Rightarrow \\ \mathbf{x}_0 &= - \int_0^{t_1} e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (10.44)$$

Na eq. 10.44, pela definição

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k$$

Com isso, a eq. 10.44 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= - \int_0^{t_1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k B\mathbf{u}(\tau)d\tau = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \text{adotando } \beta_k &= \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \\ \mathbf{x}(0) &= - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B\beta_k = [B \quad AB \quad \dots A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.45)$$

²Kalman (1963) define controlabilidade dessa forma: A state $\mathbf{x}$ of a plant is said to be 'controllable' if there exists a control signal $u(t)$ defined over a finite interval $0 \leq t \leq t_1$ such that $\Phi(t_1, \mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$. In general, the time t_1 will depend on $\mathbf{x}$. If every state is controllable, the plant is said to be 'completely controllable'.

Para que a eq. 10.45 seja verdadeira, é necessário que a *matriz de controlabilidade* $\mathcal{C}$, de dimensão $n \times n.p$

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad \dots A^{n-1}B] \quad (10.46)$$

possua colunas linearmente independentes, ou seja, possua posto completo. Portanto, no caso de SLIT de ordem n , desde que $\text{posto}(\mathcal{C}) = n$, pode-se afirmar que o sistema será completamente controlável.

10.3.2 Regra prática para a verificação de observabilidade

Como o próprio nome denota, a observabilidade é relacionada ao modelo de observação, eq. 10.42.

Um sistema com esse modelo de observação será totalmente observável se todo estado $\mathbf{x}(t)$ puder ser obtido a partir das observações $y(t)$ ao longo de um intervalo finito de tempo $t_0 \leq \tau \leq t_f$. Em outras palavras, o sistema é completamente observável se todas variáveis de estado afetam cada elemento do vetor de saídas.

A regra prática para a verificação de observabilidade pode ser deduzida de maneira similar à que foi efetuada para a controlabilidade. Considerando as eqs. 10.41 e 10.42 homogênea, adotamos $t_0 = 0$ (poderia ser qualquer valor). Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) = C\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) = C\Phi(t, 0)\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(t) &= C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \mathbf{x}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) C A^k \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(t) &= \alpha_0(t) C \mathbf{x}(0) + \alpha_1(t) C A \mathbf{x}(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t) C A^{n-1} \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (10.47)$$

Para que $\mathbf{y}(t)$ seja unicamente obtido a partir da eq. 10.47, é necessário que a matriz de observabilidade $\mathcal{O}$, de dimensão $m.n \times n$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = [C' \quad A'C' \quad \dots (A')^{n-1}C'] \in \mathcal{R} \quad (10.48)$$

tenha posto completo, no caso, n .

Exemplos serão apresentados em aula.

11 PROJETO DE CONTROLADORES: REGULADORES

Dentre as diversas técnicas existentes para o projeto de controladores no domínio do tempo, as mais conhecidas são o *controle por alocação de polos* e o *controle linear quadrático*, também conhecido como *controle LQR*, os quais serão abordados neste curso.

Inicialmente, convém ressaltar que, quando mencionamos controladores, é importante estabelecermos a diferença entre um *regulador* e um *seguidor de referência*. Um *regulador* é um tipo de controlador cuja função é levar o estado (o vetor de estado) de volta para a origem, da qual este se afasta devido à presença de perturbações (externas ou internas, como desgaste de componentes), com velocidade satisfatória para o desempenho do sistema. Matematicamente,

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$$

Um *seguidor de referência* é um tipo de controlador cuja função é fazer com que o estado **rastree um sinal de referência externo conhecido**.

Matematicamente, em espaço de estados,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + E\mathbf{x}_e(t)$$

$\mathbf{u} \equiv$ vetor de controle

$\mathbf{x}_e \equiv$ vetor de entradas exógenas

11.1 Projeto de reguladores por realimentação de estado: método de alocação de polos

Consideremos novamente o sistema linear invariante no tempo descrito em espaço de estados pelo modelo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, & A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & B &\in \mathbb{R}^{n \times p} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, & C &\in \mathbb{R}^{m \times n}, & D &\in \mathbb{R}^{m \times p} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Para um sistema linear completamente controlável, é possível implementar uma lei de controle de realimentação de estados na forma $\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{x}(t)$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n} \triangleq$ *matriz de ganhos de controle* de tal forma que a localização dos n polos do sistema em malha fechada

no plano complexo possa ser arbitrariamente escolhida. Em primeiro lugar, trataremos do projeto de reguladores por alocação de polos.

A lei de controle é tal que a dinâmica do sistema em malha fechada obedece à seguinte equação de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (11.2)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} = A_c\mathbf{x} \quad (11.3)$$

Como se sabe, dinâmica do sistema não-controlado em malha fechada depende dos n autovalores da matriz de estado; quando um controlador é introduzido, a dinâmica do sistema original é modificada para responder aos novos n autovalores da matriz $A_c = A - BK$, impostos através da matriz $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, e cuja resposta no tempo é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{(A-BK)t}\mathbf{x}(t_0) \quad (11.4)$$

Uma escolha conveniente de K garante estabilidade assintótica, ou seja, para todo $\mathbf{x}(t_0) \neq 0$, é possível impor $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

A seguir, são apresentados três métodos para a alocação de polos. Para todos os métodos, vamos supor um sistema com uma entrada e uma ou múltiplas saídas – UEUS ou UEMS (SISO-SIMO) – cuja realização é dada por $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, com $A(n \times n)$, $B(n \times 1)$, $u(1 \times 1)$, para obter a matriz de ganhos $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$. Além disso, **sempre é necessário antes de iniciar o processo obter um modelo em EE que seja completamente controlável.**

11.1.1 Método de substituição direta ou explícito

1. obter um modelo em EE que seja controlável;
2. da equação característica da matriz do sistema, A , obter os coeficientes $a_1 \dots a_n$ do polinômio característico em s :

$$|(sI - A)| = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n \quad (11.5)$$

3. admitindo que os polos em malha fechada sejam $\mu_1, \dots, \mu_n$, montar o respectivo polinômio característico em s :

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= |sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \\ \alpha(s) &= s^n + \alpha_1s^{n-1} + \dots + \alpha_ns^0 \end{aligned} \quad (11.6)$$

4. igualar os polinômios característicos em malha aberta e fechada.

Os coeficientes α_i serão funções dos ganhos k_i , fornecendo n equações para a sua determinação. O grande problema deste procedimento é quando a ordem do sistema é superior a 3 ou 4. Nestes casos, os métodos seguintes são mais recomendados.

11.1.2 Método de Bass-Gura

O método (ou fórmula) de Bass-Gura aplica-se a sistemas de uma entrada e uma ou mais saídas (SISO ou SIMO) e facilita a alocação de polos em sistemas de maior ordem. Para sua aplicação, é necessário que o sistema esteja descrito por uma de suas formas canônicas controláveis (primeira forma companheira). Admitindo novamente que os polos desejados em malha fechada sejam $\mu_1, \dots, \mu_n$ e considerando o sistema em sua primeira forma canônica controlável,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [(b_n - a_n b_0) \quad (b_{n-1} - a_{n-1} b_1) \quad \dots \quad (b_1 - a_1 b_0)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [b_0]u \quad (11.7)$$

o procedimento consiste em:

1. montar a matriz do sistema controlado em malha fechada, $A-BK$, com $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ de dimensão compatível:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & -a_{n-2} - k_3 & \dots & -a_1 - k_n \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

2. para os polos admitidos, o polinômio característico é idêntico ao da eq. 11.6, resultando em uma matriz do sistema em malha fechada

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

Das eqs. 11.6 e 11.9, resulta a matriz de ganhos de controle

$$\therefore K = [\alpha - \mathbf{a}] = [\alpha_n - a_n \mid \dots \mid \alpha_1 - a_1] \quad (11.10)$$

que será utilizada na realimentação do estado $u = -K\mathbf{x}$.

3. caso a matriz A não esteja na forma canônica controlável, é necessário efetuar uma transformação

$$\mathbf{x} = \mathbb{T}\bar{\mathbf{x}} \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{x} \quad (11.11)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbb{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{T}^{-1}(A\mathbf{x} + Bu)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = (\mathbb{T}^{-1}A\mathbb{T})\bar{\mathbf{x}} + (\mathbb{T}^{-1}B)u \quad (11.12)$$

em que a matriz de transformação é dada por

$$\mathbb{T} = \mathcal{C}W \quad \text{com} \quad (11.13)$$

com $\mathcal{C} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$, matriz de controlabilidade e W dada por

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.14)$$

4. em seguida, sintetiza-se o controlador por realimentação de estado para o sistema mapeado para a forma canônica controlável:

$$u = -\mathbb{K}\bar{\mathbf{x}} \quad (11.15)$$

Uma vez que $\bar{\mathbf{x}}$ está na forma canônica controlável, pelas eqs. 11.10 e 11.11,

$$\mathbb{K} = [\alpha_n - a_n \mid \dots \mid \alpha_1 - a_1] \mathbb{T}^{-1} \quad (11.16)$$

Evidentemente, caso o sistema esteja na forma canônica controlável, $\mathbb{T} = I_n$, matriz identidade de ordem n .

11.1.3 Fórmula de Ackermann

Uma outra maneira de efetuar a alocação de polos é através da fórmula de Ackermann, que possui as seguintes etapas:

1. seja $\tilde{A} = A - BK$ a matriz do sistema controlado em malha fechada com polos selecionados $\mu_1, \dots, \mu_n$ cuja equação característica é a eq. 11.6;
2. de acordo com o teorema de Caley-Hamilton, uma matriz quadrada satisfaz à sua própria equação característica, ou seja

$$\Delta(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \alpha_2 \tilde{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{A}^1 + \alpha_n I = 0 \quad (11.17)$$

O procedimento pode ser deduzido por indução finita. Para tanto, suponhamos $n = 3$. Com isso

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 \tilde{A}^0 &= \alpha_3 I \\
 \alpha_2 \tilde{A}^1 &= \alpha_2 A - \alpha_2 BK \\
 \alpha_3 \tilde{A}^2 &= \alpha_3 (A - BK)^2 = \alpha_3 (A^2 - ABK - BK\tilde{A}) \\
 \tilde{A}^3 &= (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \Rightarrow \\
 \Delta(\tilde{A}) &= \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 - \alpha_2 BK - \alpha_1 ABK \\
 &\quad - \alpha_1 BK\tilde{A} - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 = 0
 \end{aligned} \tag{11.18}$$

Porém, $\Delta(A) = \alpha_3 I + \alpha_2 A^2 + A^3 \neq 0$ que, substituído em 11.18 fornece

$$\begin{aligned}
 \Delta(\tilde{A}) &= \Delta A - \alpha_2 BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 - \alpha_1 ABK - ABK\tilde{A} - A^2BK = 0 \\
 \Delta(A) &= B(\alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 + AB(\alpha_1 K + K\tilde{A}) + A^2BK \\
 \Delta(A) &= [B \mid AB \mid A^2B] + \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{11.19}$$

Identifica-se $\mathcal{C} = [B \mid AB \mid A^2B] \equiv$ matriz de controlabilidade que, para um sistema completamente controlável, é inversível. Assim,

$$\mathcal{C}^{-1}\Delta(A) = \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \tag{11.20}$$

Para obter a matriz K , multiplica-se a eq. 11.20 por uma matriz linha $\mathcal{M} = [0 \ 0 \ 1]$ e, assim,

$$\mathcal{M}\mathcal{C}^{-1}\Delta(A) = \mathcal{M} \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} = K \tag{11.21}$$

3. pode-se extrapolar a expressão 11.21 para um sistema de ordem n qualquer, obtendo-se assim a chamada *fórmula de Ackermann*,

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 01]\mathcal{C}^{-1}\Delta(A) \tag{11.22}$$

para o cálculo da matriz de ganhos de realimentação do estado.

11.2 Projeto de reguladores por realimentação de estado: controlador linear quadrático – LQ

O problema do controle linear quadrático é, na verdade, um problema de minimização de um funcional que leva a uma lei de controle de realimentação completa do estado "ótima" de acordo com algum critério. Assim, a caracterização matemática do problema de controle ótimo

(PCO) requer:

1. a descrição do sistema que deve ser controlado;
2. a descrição das restrições (vínculos estáticos e/ou dinâmico) e eventuais opções;
3. a descrição do objetivo a ser alcançado pelo sistema de controle;
4. o estabelecimento de um critério de avaliação do desempenho.

Consideram-se os sistemas em espaço de estados respectivamente contínuo e discreto dados por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t) \quad (11.23)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (11.24)$$

e os respectivos índices de desempenho globais contínuo e discreto

$$J = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

$$J = S(\mathbf{x}(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ e S , L funcionais escalares e reais que representam as seguintes ponderações:

- S é o "custo" associado ao erro na configuração no instante final;
- L é o "custo" relacionado aos erros causados por transitórios no vetor de estado e ao dispêndio de energia no controle;
- o projetista de controle deve selecionar as funções S e L de acordo com a necessidade de maior ênfase em obter o estado final especificado, comportamento dos transientes e utilização de energia no controle.

De acordo com os funcionais S e L , cinco problemas básicos de controle ótimo são formulados:

- Com $S = 0$ e $L = 1 \Rightarrow J = \int_{t_0}^{t_f} dt$ é o problema de tempo mínimo
- com $S = 0$ e $L = \mathbf{u}^T \mathbf{u} \Rightarrow J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \mathbf{u} dt$ é a ponderação dada ao esforço de controle, que pode ser interpretado como o dispêndio de energia. Este é o problema de esforço mínimo;
- com $S = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_e]^T [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_e]$ e $L = 0$, J irá minimizar o quadrado da norma do erro entre o estado final $\mathbf{x}(t_f)$ e o estado especificado $\mathbf{x}_e$, caracterizando o problema de erro mínimo final;
- com $S = 0$ e $L = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t)]^T [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t)]$, J irá minimizar o quadrado da norma do erro instantâneo entre o estado $\mathbf{x}(t)$ e a trajetória especificada $\mathbf{x}_r(t)$, caracterizando o problema do seguidor de referência.

- finalmente, é adequado propor um critério geral que possa fornecer uma solução de compromisso entre os três primeiros critérios:

$$S = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_e]^T M [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_e],$$

$$L = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t)]^T Q [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t)] + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}$$

com $M, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

Estas matrizes devem ser escolhidas de modo a ponderar a importância do estado final, esforço de controle e erro transitório. Feitas estas considerações, estamos em condições de definir o PCO.

De acordo com Brogan (1991, pg. 503), em tradução livre, *dentre todas as funções (ou sequências, no caso de sistemas discretizados) u possíveis, deseja-se obter a que minimiza o índice de desempenho J e esteja em conformidade com os vínculos dinâmicos dados pelo modelo de estado (eqs. 11.23) e com todas as condições iniciais e finais especificadas. Se a ação de controle depender apenas do estado inicial e de outros parâmetros do sistema, o controle é dito de malha aberta; se a ação de controle for também função do estado instantâneo, caracteriza-se o controle em malha fechada.*

O problema de controle ótimo pode ser resolvido através de várias abordagens, dentre elas:

1. 2o. Teorema de Lyapunov (1890)
2. Princípio da Otimalidade (Bellman) e Programação Dinâmica (1958)
3. Princípio do Mínimo de Pontryagin (1956)

A abordagem que será aqui apresentada é de no. 3, que baseia-se no Cálculo Variacional, assunto abordado em cursos de pós-graduação e motivo pelo qual diversas demonstrações não serão efetuadas, sendo apresentados apenas os resultados mais importantes e que permitem a solução do problema da determinação de uma lei de controle de realimentação do estado do tipo $\mathbf{u} = -K_{ot}\mathbf{x}$.

No problema do regulador, admite-se $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ e, portanto, $M = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{0}$. Assim, o funcional a ser minimizado é dado por

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}(t)^T Q(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T R(t) \mathbf{u}] dt \quad (11.25)$$

Seja o sistema linear em espaço de estados $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t)$. Deve-se obter um controle $\mathbf{u}(t) = -K_{ot}\mathbf{x}(t)$ que minimize J e que atenda às restrições dinâmicas do sistema.

Por simplicidade, porém sem perda de generalidade, admite-se o sistema invariante no tempo, além de matrizes de ponderação $Q \geq 0$ (positiva semi-definida) e $R > 0$ (positiva definida) reais, simétricas e constantes. O Princípio do Mínimo de Pontryagin converte um

problema de controle em um problema de otimização. A chamada *função Hamiltoniana* permite, através de multiplicadores de Lagrange, incluir os vínculos dinâmicos do sistema na busca da ação ótima de controle. Para SLIT, o procedimento para a obtenção da matriz de controle ótimo K_{ot} é descrito abaixo. Iniciamos pela função Hamiltoniana, que inclui o funcional a ser minimizado e as restrições dinâmicas do problema, incluídas por meio de um vetor de multiplicadores de Lagrange λ :

$$\mathcal{H} = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \lambda^T (A \mathbf{x} + B \mathbf{u}) \text{ com} \quad (11.26)$$

$$\lambda(t) = \text{mult. de Lagrange, } \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} = \dot{J}, \quad A \mathbf{x} + B \mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}} \quad (11.27)$$

O princípio do mínimo de Pontryagin estabelece que o controle ótimo deve satisfazer às três seguintes equações:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda^T} = \dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ (condição inicial)} \quad (11.28)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}^T} = \dot{\lambda} = -Q \mathbf{x} - A^T \lambda, \quad \lambda(t_f) = \mathbf{0} \text{ (condição final)} \quad (11.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}^T} = \mathbf{0} = R \mathbf{u} + B^T \lambda \Rightarrow \mathbf{u} = -R^{-1} B^T \lambda \quad (11.30)$$

Substituindo as eqs. 11.29 e 11.30 na eq. 11.26, obtém-se um sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

cujas soluções permitem obter a lei ótima de controle. Adotando

$$\lambda(t) = P(t) \mathbf{x}(t), \quad (11.32)$$

efetuando sua derivada temporal e levando em conta o sistema dado por 11.31, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{P} \mathbf{x} + P \dot{\mathbf{x}} \Rightarrow \\ \dot{\lambda} &= \dot{P} \mathbf{x} + P A \mathbf{x} - P B R^{-1} B^T P \mathbf{x} \end{aligned} \quad (11.33)$$

$$\dot{\lambda} = -Q \mathbf{x} - A^T \underbrace{\lambda}_{P \mathbf{x}} \quad (11.34)$$

Igualando-se as duas últimas equações, obtém-se a célebre equação diferencial matricial de Riccati ¹,

$$-\dot{P} = P A + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P, \text{ com } P(t_f) = \mathbf{0} \quad (11.35)$$

A partir de $P(t_f) = 0$, resolve-se a equação de Riccati **regressivamente no tempo**. Obtido

¹Riccati, Jacopo, matemático veneziano (1676-1754). *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, (1724).

$P(t) \Rightarrow \lambda(t) = P(t)\mathbf{x}(t)$, calcula-se o ganho:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -K_{ot}(t)\mathbf{x}(t) \\ -R^{-1}B^T P(t)\mathbf{x}(t) &= -K_{ot}(t)\mathbf{x}(t) \\ \Rightarrow K_{ot}(t) &= R^{-1}B^T P(t) \end{aligned} \quad (11.36)$$

Finalmente, $\mathbf{u} = -R^{-1}B^T P(t)\mathbf{x}$ é a ação de controle linear quadrática que minimiza o funcional J .

Como vimos, a lei de controle ótima depende da solução da equação diferencial matricial de Riccati, o que está longe de ser uma tarefa simples. No entanto, no projeto de reguladores, com frequência é suficiente garantir o correto funcionamento do sistema em regime, ou seja, no horizonte infinito, $t \rightarrow \infty$. Nessas condições, não haveria necessidade de recalculá-lo o ganho K_{ot} de forma contínua. Em outras palavras, a hipótese de tempo infinitamente longo é justificável e adequada quando a operação contínua é suficientemente longa em comparação com as constantes de tempo intrínsecas do sistema. Nestas condições,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{P}(t) = 0 \Rightarrow \quad (11.37)$$

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (11.38)$$

A eq. 11.38 é denominada *equação algébrica de Riccati*, cuja solução é a matriz $P(t) = P_c$, constante. Este é o caso do problema de *horizonte infinito*, em que a matriz de ganhos de realimentação tende a uma constante, ou seja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = K_c = R^{-1}B^T P_c \text{ e } \mathbf{u}_\infty = -K_c \mathbf{x}(t) \quad (11.39)$$

12 OBSERVADORES

12.1 Introdução

Diversos procedimentos analíticos sofisticados para o projeto de sistemas de controle baseiam-se na suposição de que o vetor de estado completo seja mensurável. Tais procedimentos especificam o valor atual de entrada de controle como uma função do vetor de estado atual. A razão matemática e ao mesmo tempo lógica para a escolha de tal estratégia é simples: como o sistema evolui obedecendo à suas equações de estado, uma estratégia de controle que visa influenciar o comportamento futuro do sistema deve basear-se no valor atual do vetor de estado. Um exemplo disso é o método de alocação de polos, cuja escolha dos autovalores do sistema em malha fechada baseia-se na hipótese de que todas as variáveis de estado sejam conhecidas.

Na prática, entretanto, nem todas as variáveis de estado podem ser diretamente medidas; muito pelo contrário, frequentemente ocorre que apenas poucas das variáveis de estado possam ser medidas, ao passo que as outras não. Existem diversos motivos para justificar a impossibilidade de medição de todas as variáveis de estado. Por exemplo, certos sistemas físicos apresentam características de operação que necessitariam do emprego de equipamentos de medição excessivamente caros para a determinação de todas as suas variáveis de estado, sendo portanto economicamente inviáveis. Além disso, há sistemas em que, mesmo que se disponha de recursos, a medição de certas variáveis de estado seria impossível. Em todas estas situações, as estratégias de controle *devem necessariamente ser baseadas em valores provenientes de um subconjunto das variáveis de estado*.

Existem duas abordagens possíveis para contornar o problema: a primeira é desenvolver procedimentos novos e mais complexos para, a partir de dados insuficientes, elaborar a estratégia de controle; a segunda, normalmente adotada para a escolha da estratégia de controle na impossibilidade do conhecimento direto de todas as variáveis de estado é a de *construir uma aproximação do vetor de estado completo com base apenas no vetor de medidas existente*. A partir daí, utiliza-se o *estado aproximado* em conjunto com modelos de controle mais simples que assumem o conhecimento do estado completo.

Como vimos, é necessário *estimar* um vetor de variáveis de estado que não é totalmente mensurável. O processo de estimação é normalmente denominado *observação* e o “dispositivo” capaz de estimar as variáveis de estado não-mensuráveis é denominado *observador de estados*. O observador nada mais é que um sistema dinâmico determinístico cujas entradas são as saídas mensuráveis do sistema dinâmico original que se deseja controlar e cuja saída é o vetor de estado completo do sistema original.

Luenberger (1964) foi o responsável pela formulação matemática dos observadores de estados. A seguir, são apresentados três tipos de observadores que diferem nas características

de sua resposta dinâmica. Para desenvolver a teoria de observadores, admitiremos que o sistema em estudo seja completamente observável e completamente controlável.

12.2 Observadores de estado para sistemas contínuos

12.2.1 Observador trivial

A solução mais simples para o problema de estimar o estado de um sistema é adotar um observador cuja dinâmica copie integralmente a dinâmica do sistema original. Cabe notar que, nesse caso, haveria total ausência de qualquer medida ou observação sobre o sistema, ou seja, mesmo que alguma medida do sistema real esteja sendo efetuada, ela não será utilizada na simulação. Assim, para um sistema dinâmico dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (12.1)$$

o observador trivial seria

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (12.2)$$

As entradas $\mathbf{u}(t)$ do sistema original são as ações de controle conhecidas; além disso, como o sistema dado pela eq. 12.2 é um modelo matemático que está sendo simulado com entradas conhecidas, o vetor de estado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ pode ser obtido. Se as condições iniciais $\mathbf{x}(0)$ e $\hat{\mathbf{x}}(0)$ forem idênticas o modelo irá comportar-se de maneira exatamente igual ao sistema original. Entretanto, o que define um bom ou mau observador é a convergência do valor estimado para o valor real, isto é, a velocidade com que o *erro de estimação* $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ tende a zero. Utilizando o erro de estimação temos

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$$

Subtraindo a eq. 12.2 da eq. 12.1 obtemos

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)] &= A[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] \quad \text{ou} \\ \dot{\mathbf{e}}(t) &= A\mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad (12.3)$$

Percebe-se da eq. 12.3 que o erro na estimativa tende a zero apenas se o sistema original for estável, o que é determinado pela matriz A e, mais ainda, apenas na velocidade de convergência determinada pelos autovalores do sistema original. Uma maneira de superar tais limitações é a escolha de observadores mais gerais, conforme será visto na sequência.

12.2.2 Observador identidade

Considere o seguinte sistema completamente observável:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (12.4)$$

onde $A_{n \times n}$, $B_{n \times p}$ e $C_{m \times n}$ são matrizes de elementos constantes, $\mathbf{x}(t)_{n \times 1}$ é o vetor de estado, $\mathbf{u}(t)_{p \times 1}$ é o vetor de entradas de controle e $\mathbf{y}(t)_{m \times 1}$ denota a saída mensurável do sistema. Duas observações devem ser feitas com relação ao modelo acima: em primeiro lugar, as matrizes A , B e C poderiam ser variantes no tempo, sem invalidar o desenvolvimento apresentado; em segundo lugar, a saída do sistema poderia incluir também um termo em $\mathbf{u}(t)$ na forma $\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$ que, para simplificar algebricamente o problema, foi omitido.

Seja, agora, o seguinte observador de estados para o sistema dado pelas equações 12.4:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= A\hat{\mathbf{x}}(t) + L[\mathbf{y}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t)] + B\mathbf{u}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= (A - LC)\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + L\mathbf{y}(t)\end{aligned}\quad (12.5)$$

denominado *OBSERVADOR IDENTIDADE*, cujo diagrama de blocos é mostrado na figura 86, em que $\hat{\mathbf{x}}$ (vetor de estado do observador) possui dimensão $n \times 1$ e a matriz $L_{n \times m}$ deve ainda ser determinada. As entradas para o observador são de dois tipos: o primeiro é o conjunto de medidas $\mathbf{y}(t)$ disponíveis a partir do sistema real; o segundo é o conjunto de entradas $\mathbf{u}(t)$ copiados do sistema real e, portanto, disponíveis. Nota-se que o observador identidade é uma generalização do observador trivial, já que se $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ e como $\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$, o observador da eq. 12.5 irá reduzir-se a

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t),$$

que é exatamente o observador trivial.

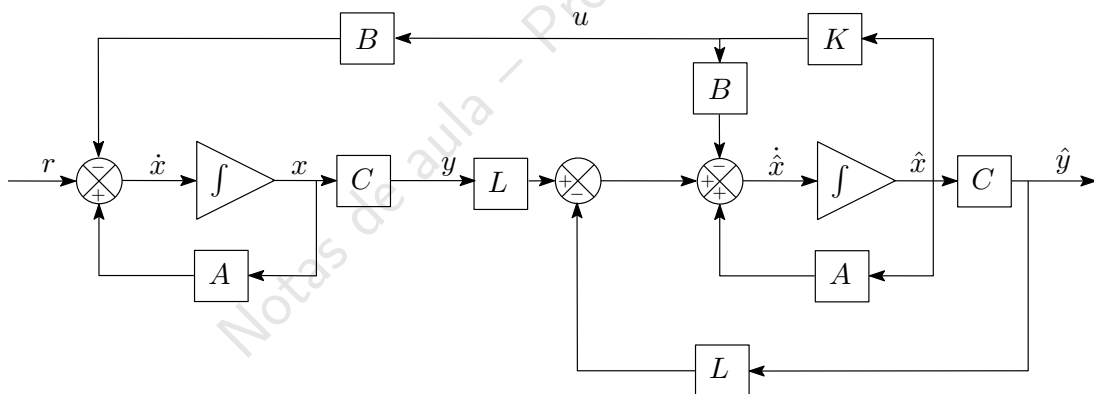


Figura 86: Representação esquemática do observador identidade.

Utilizando $\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$ na eq. 12.5 do observador identidade obtemos

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + LC[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] + B\mathbf{u}(t) \quad (12.6)$$

Subtraindo a eq. 12.6 da primeira das eqs. 12.4 fica

$$[\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)] = [A - LC][\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}] \quad (12.7)$$

Se o observador for inicializado de tal forma que $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$, então $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ para todo $t > 0$ ou seja, o estado estimado pelo observador segue o estado do sistema original. Este observador é chamado identidade pois segue todas as variáveis de estado do sistema real.

Caso $\hat{\mathbf{x}}(0) \neq \mathbf{x}(0)$ o vetor de erro $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ é governado pelo sistema homogêneo

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [A - LC]\mathbf{e}(t) \quad (12.8)$$

Se a matriz $[A - LC]$ do sistema descrito pela eq. 12.8 for assintoticamente estável, o vetor de erros tenderá a zero na taxa determinada pelos autovalores da matriz $[A - LC]$, que podem ser alterados dependendo da matriz L adotada. Dessa forma, o projetista escolhe como será a resposta do observador em termos de levar o erro a zero. Tais ideias estão contidas no *Teorema do Observador Identidade (TOI)* (Luenberger, 1971):

Dado um sistema completamente observável (eqs. 12.4), pode-se construir um observador identidade na forma da eq. 12.5, cujos coeficientes do polinômio característico (que fornece os autovalores) podem ser arbitrariamente escolhidos.¹

Embora a demonstração completa do teorema esteja presente na mesma referência mencionada, é possível recorrer a uma analogia com a solução do problema de controle por alocação de polos que irá evidenciar a *dualidade entre os problemas de observação e controle*, importante resultado decorrente da teoria de controle moderno e que foi descoberto por Kalman (1960) quando investigava estimadores e controladores ótimos.

No problema de controle por alocação de polos, foi demonstrado que para um sistema completamente controlável é possível adotar polos arbitrários para a realimentação de estado em malha fechada resolvendo-se a equação característica com os polos alocados μ_i

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= |sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = 0 \\ \alpha(s) &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n s^0 = 0\end{aligned}\quad (12.9)$$

para os ganhos k_i da matriz K para atender ao modelo $\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x}$. Note a semelhança entre esta equação e a eq. 12.8, cuja lógica nos leva a deduzir que seria possível escrever uma equação análoga à eq. 12.9 com as matrizes A , C e E para o sistema completamente observável, conforme postula o TOI com pequenas modificações. Assim, a partir da eq. 12.8 obtêm-se

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}^T &= (A - LCE)^T = \mathbf{e}^T (A - LC)^T \\ \dot{\mathbf{e}}^T &= \mathbf{e}^T (A^T - C^T L^T) \Rightarrow\end{aligned}\quad (12.10)$$

$$\beta(s) = |sI - A^T + C^T L^T| = (s - \xi_1)(s - \xi_2) \dots (s - \xi_n) = 0 \quad (12.11)$$

$$\beta(s) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n s^0 = 0 \quad (12.12)$$

que fornece n equações para as incógnitas (ganhos) l_i da matriz L a partir de ξ_i polos do observador identidade arbitrariamente escolhidos. A dualidade entre os problemas de alocar polos para controladores ou observadores (estimadores) é clara:

controle	estimação
$A \longrightarrow A^T$	
$B \longrightarrow C^T$	
$K \longrightarrow L^T$	

Finalmente, conclui-se que os ganhos do observador identidade podem ser obtidos utilizando os mesmos métodos já vistos para os ganhos do controlador resolvendo-se o problema dual.

¹A prova deste teorema encontra-se em Luenberger(1971).

12.2.3 Teorema da Separação dos autovalores

Como vimos até aqui, a escolha dos autovalores do observador é arbitrária. Uma questão pertinente que surge é se essa escolha dos autovalores afeta a resposta do sistema completo controlado em malha fechada. Tal problema também foi abordado por Luenberger (1971) e pode ser assim postulado: devido à indisponibilidade parcial ou total do vetor de estado real (veremos, mais adiante, observadores de ordem reduzida), não é possível gerar o vetor $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$; no entanto a introdução de um observador assintótico nos permite utilizar suas estimativas $\hat{\mathbf{x}}$ do estado para gerar uma lei de controle $\mathbf{u} = -K\hat{\mathbf{x}}$. O *Teorema da Separação dos Autovalores* (Luenberger, 1971) afirma que a presença dos autovalores do observador não altera o comportamento do sistema de controle por realimentação. O polinômio característico do sistema composto (controlador e observador) é o produto do polinômio característico do controlador, $(A - BK)$, pelo do observador, $(A - LC)$. Em outras palavras, para sistemas de controle com realimentação em que nem todas as variáveis de estado estão disponíveis através de medições, é possível projetar o controlador como se o vetor completo de estado fosse acessível e utilizar um observador para estimar tal vetor sem alterar a resposta dinâmica do sistema de controle. Uma demonstração simplificada do teorema é apresentada abaixo.

Inicialmente, define-se um erro de estimação como

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &\triangleq \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \Rightarrow \\ \hat{\mathbf{x}}(t) &\triangleq \text{estado estimado} \end{aligned} \quad (12.13)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B(-K\hat{\mathbf{x}}) \Rightarrow \\ \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} - BK(\mathbf{x} - \mathbf{e}) = (A - BK)\mathbf{x} + BK\mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} &= (A - LC)\mathbf{e} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ \mathbf{0} & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.14)$$

A dinâmica da planta com observador é descrita pela matriz particionada na eq. 12.14, cujo polinômio característico é calculado como

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ \mathbf{0} & sI - A + LC \end{vmatrix} \\ \gamma(s) &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - m_n)(s - \xi_1)(s - \xi_2) \dots (s - \xi_n) \end{aligned} \quad (12.15)$$

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ \mathbf{0} & sI - A + LC \end{vmatrix} \\ \gamma(s) &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - m_n)(s - \xi_1)(s - \xi_2) \dots (s - \xi_n) \end{aligned} \quad (12.16)$$

A eq. 12.16 comprova a asserção do teorema. Além disso, na eq. 12.14, a forma matricial deixa clara a separação entre a dinâmica da planta em malha fechada, governada pelos autovalores da matriz $A - BK$ e do erro na estimativa, codificado nos autovalores da matriz $A - LC$ que

não afeta o estado $\mathbf{x}(t)$.

12.2.4 Observadores de ordem reduzida

O observador identidade descrito acima possui um certo grau de redundância pois reconstrói todas as n variáveis de estado do sistema original, muito embora m delas - as variáveis de saída - sejam conhecidas. Parece lógico, portanto, que, eliminando-se esta redundância, um observador de ordem $n - m$ em vez de n possa ser projetado. Assim, o vetor de estado completo do sistema seria reconstituído a partir das $n - m$ variáveis de estado estimadas pelo observador adicionadas às m variáveis medidas. Este procedimento é efetivamente possível, conforme será descrito a seguir.

Seja novamente o sistema dinâmico dado pelas eqs. 12.4 com $C_{m \times n}$ de posto m . Esta condição implica em que *todas as medidas são linearmente independentes*.

Consideremos uma matriz $V_{(n-m) \times n}$ tal que a matriz $P_{n \times n}$ construída como

$$P = \begin{bmatrix} V \\ \bar{C} \end{bmatrix}$$

seja não-singular, o que é sempre possível desde que C tenha posto m .

Introduzimos agora a transformação de variáveis

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = P\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} V \\ \bar{C} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \Rightarrow \mathbf{x}(t) = P^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (12.17)$$

de forma que o vetor de estado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ possa ser particionado como

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\mathbf{x}(t) \\ \bar{C}\mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

onde $\mathbf{w}(t)$ é um vetor de dimensão $(n - m)$ e $\bar{\mathbf{y}}(t)$ é o vetor de medidas. Nessa forma, o vetor de saídas é igual às m últimas variáveis do estado transformado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$; assim, a abordagem utilizada para o projeto do observador de ordem completa também é válida aqui. Em primeiro lugar, obtêm-se estimativas

$$\hat{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(t) \\ \hat{\bar{\mathbf{y}}}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e, posteriormente,} \quad \hat{\mathbf{x}}(t) = P^{-1}\hat{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \quad (12.19)$$

Da eq. 12.17 podemos escrever

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = P\dot{\mathbf{x}}(t) = PA\mathbf{x}(t) + PB\mathbf{u}(t) = PAP^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(t) + PB\mathbf{u}(t)$$

A partir daí, o sistema da eq. 12.18 na forma particionada fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (12.20)$$

Do sistema dado pela eq. 12.20 pode-se extrair um subsistema de ordem $(n - m)$ que possui

como entradas as quantidades conhecidas $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$. Explicitamente,

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = A_{11}\mathbf{w}(t) + A_{12}\mathbf{y}(t) + B_1\mathbf{u}(t) \quad (12.21)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A_{21}\mathbf{w}(t) + A_{22}\mathbf{y}(t) + B_2\mathbf{u}(t) \quad (12.22)$$

Subtraindo a eq. 12.22 multiplicada por uma matriz arbitrária $L_{(n-m) \times m}$ da eq. 12.21 conduz a

$$\dot{\mathbf{w}}(t) - L\dot{\mathbf{y}}(t) = (A_{11} - LA_{21})\mathbf{w}(t) + (A_{12} - LA_{22})\mathbf{y}(t) + (B_1 - LB_2)\mathbf{u}(t), \quad (12.23)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}(t) - L\dot{\mathbf{y}}(t) &= (A_{11} - LA_{21})[\mathbf{w}(t) - L\mathbf{y}(t)] + \\ &+ [A_{11}L - LA_{21}L + A_{12} - LA_{22}]\mathbf{y}(t) + (B_1 - LB_2)\mathbf{y}(t) \end{aligned} \quad (12.24)$$

Fazendo $\mathbf{v}(t) = \mathbf{w}(t) - L\mathbf{y}(t)$ obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= (A_{11} - LA_{21})\mathbf{v}(t) + \\ &+ [A_{11}L - LA_{21}L + A_{12} - LA_{22}]\mathbf{y}(t) + (B_1 - LB_2)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (12.25)$$

Nesta equação, $\mathbf{v}(t)$ é desconhecida, ao passo que $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ constituem entradas conhecidas. Como não existe qualquer observação do vetor $\mathbf{v}(t)$, de dimensão $(n - m)$, constroi-se um observador simplesmente copiando as equações dinâmicas do sistema dado por 12.25, ou seja

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_v(t) &= (A_{11} - LA_{21})\hat{\mathbf{x}}_v(t) + [A_{11}L - LA_{21}L + A_{12} - LA_{22}]\mathbf{y}(t) + \\ &+ (B_1 - LB_2)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (12.26)$$

A eq. 12.26 denota um observador para o sistema da eq. 12.20. Como a dimensão de $\hat{\mathbf{x}}_v(t)$ é $(n - m)$, número mínimo suficiente para completar a estimação do estado original, o observador é denominado *observador de ordem reduzida* ou *observador de Luenberger*. Subtraindo a eq. 12.25 da eq. 12.26 para determinar a dinâmica do erro obtemos

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_v(t) - \dot{\mathbf{v}}(t) = (A_{11} - LA_{21})[\hat{\mathbf{x}}_v(t) - \mathbf{v}(t)], \quad (12.27)$$

ou seja, o erro evolui na forma

$$\mathbf{e}_v(t) = (A_{11} - LA_{21})\mathbf{e}_v(t). \quad (12.28)$$

Além disso, observa-se que o vetor de estado $\hat{\mathbf{x}}_v(t)$ do observador tende a $\mathbf{v}(t)$ na velocidade determinada pelos autovalores da matriz $(A_{11} - LA_{21})$.

A partir do vetor de estado $\hat{\mathbf{x}}_v(t)$ do observador, o estado do sistema original dado pela eq. 12.20 é estimado por $\hat{\mathbf{w}}(t)$ e $\hat{\mathbf{y}}(t)$ determinados através de

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}(t) &= \hat{\mathbf{x}}_v(t) + L\mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{y}(t) \end{aligned} \quad (12.29)$$

O vetor de estado $\hat{\mathbf{x}}_v(t)$ e o vetor de medidas $\mathbf{y}(t)$ fornecem informações suficientes para a

reconstrução aproximada do vetor de estado do sistema original. Com $\hat{\mathbf{w}}(t)$ estimado por $\hat{\mathbf{w}}(t)$, pode-se retornar à estimativa de $\mathbf{x}$. Como

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{x}}(t) = P\mathbf{x}(t),$$

basta utilizar a relação $\hat{\mathbf{x}}(t) = P^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(t)$. A eficiência do observador depende diretamente dos autovalores da matriz do sistema do observador, $[A_{11} - LA_{21}]$. Demonstra-se (Luenberger, 1964) que se o sistema original dado pela eq. 12.4 for completamente observável, então o par A_{11}, A_{21} também o será. Assim, é possível selecionar os autovalores de $[A_{11} - LA_{21}]$ arbitrariamente por uma escolha apropriada de L , o que proporciona ao observador de ordem reduzida a mesma flexibilidade dinâmica que o observador identidade possui. Uma das possibilidades de implementação desse observador é mostrada na fig. 87.

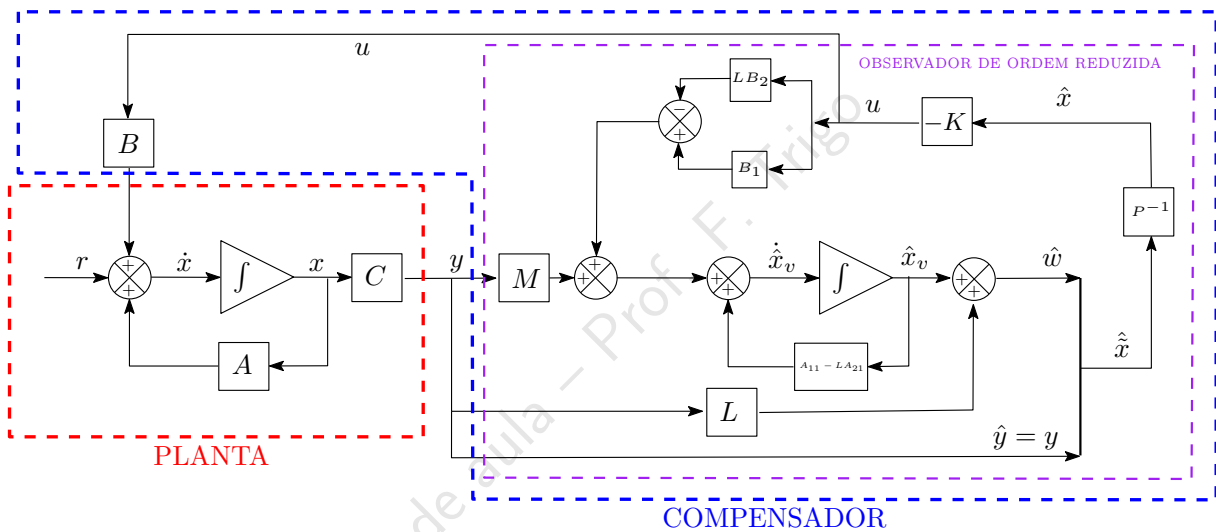


Figura 87: Observador de ordem reduzida ou de Luenberger. No diagrama, $M = A_{11}L - LA_{21}L + A_{12} - LA_{22}$.

O exemplo abaixo ilustra a construção de um observador de ordem reduzida baseado na teoria desenvolvida até aqui:

Exemplo

Considere o sistema de segunda ordem cuja dinâmica obedece à eq. 12.30.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} u \quad (12.30)$$

Este modelo representa um sistema unidimensional simplificado de rastreamento como, por exemplo, a antena de um radar de localização, que deve sempre apontar para um objeto que se move em um plano. No caso da antena, as variáveis de estado x_1 e x_2 denotam respectivamente a posição e a velocidade do objeto a ser rastreado.

As medidas são efetuadas apenas para as posições, ou seja

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12.31)$$

Pede-se construir um observador de ordem reduzida para, a partir das medidas y , estimar o estado completo $\mathbf{x}$.

Solução

Inicia-se a montagem do observador de ordem reduzida pela correta especificação da matriz P :

$$P = \begin{bmatrix} V \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deve-se escolher arbitrariamente uma matriz P positiva e definida. Assim, sejam $a_{11} = 1$ e $a_{12} = -1$ de modo que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A inversa de P será

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Com isso,

$$\tilde{\mathbf{x}} = P\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Lembrando que

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = PAP^{-1}\tilde{\mathbf{x}} + PBu$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} u \\ \Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} -(1+\beta) & (1+\beta) \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} -\gamma \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

A variável a ser observada fica então, de acordo com a eq. 12.25:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= (A_{11} - LA_{21})\mathbf{v}(t) + \\ &\quad [A_{11}L - LA_{21}L + A_{12} - LA_{22}]\mathbf{y}(t) + (B_1 - LB_2)\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

Como $L = [\ell]$, escalar vem:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= [-(1+\beta) - \ell(-1)]v + \\ &\quad [-(1+\beta)\ell - \ell(-1)\ell + (1+\beta) - \ell(-1)]y + (-\gamma + \ell.0)u \end{aligned}$$

Então, de acordo com a eq. 12.26, o observador de ordem reduzida será

$$\dot{\hat{x}}_v = [\ell - (1 + \beta)]\hat{x}_v + [\ell^2 + (1 + \beta) - \beta\ell]y + (-\gamma)u$$

Verifiquemos que o autovalor envolvido na equação para a variável transformada $w(t)$ que deve ser a saída do observador é dado por A_{11} . Nesse caso,

$$\xi = -(1 + \beta)$$

Se escolhermos, por exemplo, $\ell = -4(1 + \beta)$, então o autovalor associado ao observador será

$$\begin{aligned}\lambda &= \ell - (1 + \beta) \\ \implies \lambda &= -5(1 + \beta)\end{aligned}$$

e, portanto, o observador é muito mais rápido que o sistema original.

A estimativa do estado é efetuada por meio de

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{w}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_v(t) + \ell y(t) = \hat{x}_v(t) - 4(\beta + 1)y(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

e como

$$\hat{\mathbf{x}} = P^{-1}\hat{\mathbf{z}} = P \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) - 4(\beta + 1)y(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

tem-se, finalmente

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ -z(t) + 4\beta y(t) + 5y(t) \end{bmatrix}$$

13 PROJETO DE CONTROLADORES: SEGUIDORES DE REFERÊNCIA

Até o momento, vimos como é possível projetar sistemas de controle, com ou sem a utilização de observadores de estado, para retornar o sistema a uma condição fixa estável (normalmente, zero, ou seja, $\mathbf{x}(t_f) \rightarrow 0$), caracterizando-se assim os denominados reguladores ou compensadores, quando são também incorporados os observadores. Na prática, é frequente a necessidade de rastrear condições constantes distintas de zero (um degrau de determinada amplitude, por exemplo) ou mesmo referências variáveis. Estas situações demandam a criação de um tipo especial de sistema de controle, o chamado *seguidor de referência*, que será o escopo deste capítulo.

A literatura apresenta diversas abordagens para a solução do problema de rastreamento mas, basicamente, há diferenças significativas dependendo do tipo de referência a ser seguida (constante ou variável) para qualquer método que venha a ser adotado, como será mostrado a seguir. Será abordado aqui o caso geral utilizando as formulações de modelos assumidos e via otimização linear quadrática. Em ambos as formulações, partimos do sistema padrão em espaço de estados,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{13.1}$$

13.1 Seguidores de referência por modelos assumidos

Esta seção trata da compensação dos efeitos de entradas exógenas (referências e distúrbios) utilizando dinâmicas (modelos) assumidos para essas variáveis. Como será visto, nem sempre é possível utilizar diretamente as técnicas de alocação de polos, uma vez que podem surgir variáveis não controláveis.

Inicialmente, supõe-se que a dinâmica inclua um conjunto de variáveis exógenas representando referências $\mathbf{x}_r$ (fixas ou variáveis) **a serem seguidas** (requisito de projeto) e também **distúrbios conhecidos**, $\mathbf{x}_d$, mas que **devem ser rejeitados**, ou seja, planta e erro de seguimento ou rastreamento e possuem as seguintes dinâmicas:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{x}_d\tag{13.2}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r \Rightarrow \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_r\tag{13.3}$$

$$\text{com } \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r \\ \dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}_d\mathbf{x}_d\end{aligned}\tag{13.4}$$

Utilizando 13.4 $\rightarrow$ 13.3 e fazendo 13.2-13.3 tem-se

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{x}_d - \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r \\
 \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}\mathbf{e} + (\mathbf{A} - \mathbf{A}_r)\mathbf{x}_r + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{x}_d \\
 \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}\mathbf{e} + [\mathbf{A} - \mathbf{A}_r | \mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{x}_o \end{bmatrix} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\
 \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{E}\mathbf{x}_o + \mathbf{B}\mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{13.5}$$

onde

$$\mathbf{x}_o \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} \triangleq [\mathbf{A} - \mathbf{A}_r | \mathbf{F}] \tag{13.6}$$

O vetor $\mathbf{x}_o$ representa as entradas externas cujo modelo é suposto conhecido. O sistema resultante pode ser escrito em forma matricial como

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{x}_a + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{13.7}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}_a, \text{ com } \mathbf{C} = [\mathbf{C}_e | \mathbf{C}_r | \mathbf{C}_d] \tag{13.8}$$

e está representado na fig. 88. Observa-se que não há nenhum caminho para que a ação de controle $\mathbf{u}$ altere as respostas fornecidas pelas malhas cuja dinâmica é assumida, os modelos de referência e de distúrbio. Assim, essa topologia resulta em um sistema que não é controlável; como consequência, conforme mencionado anteriormente, as técnicas convencionais para a alocação dos polos do sistema em malha fechada não podem ser utilizadas na sua forma anteriormente apresentada.

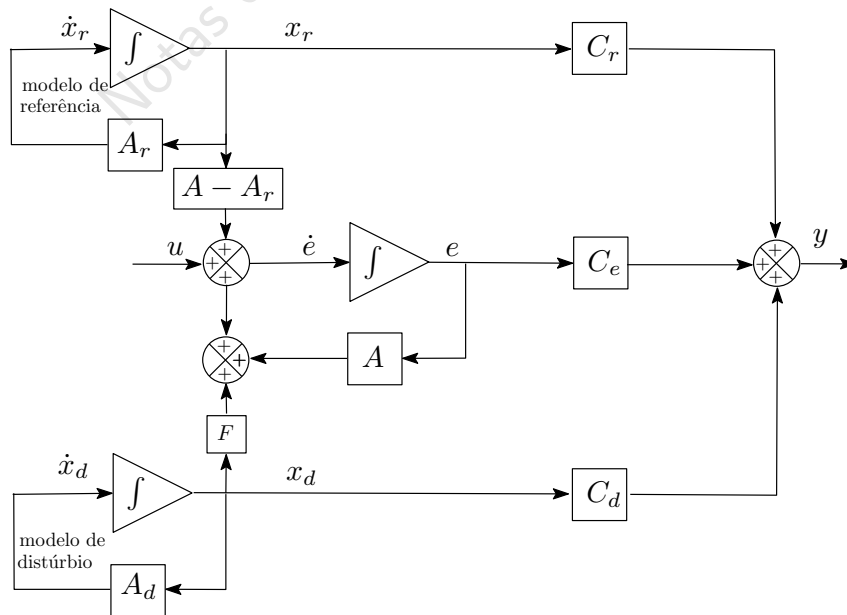


Figura 88: Seguidor de referência por modelos assumidos (Friedland, 2015). Nessa implementação, o sistema final é não-controlável.

A adaptação necessária para que os procedimentos de alocação de polos possam ser

empregados no projeto de seguidores de referência envolve transformações que visam tornar as entradas exógenas parte do vetor de entradas de controle. Para tanto, retoma-se a eq. 13.5. Uma ação ideal de controle linear seria a capaz de levar o erro em regime permanente para zero, rastrear as referências e anular distúrbios, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ot} &= -K\mathbf{e} - K_r\mathbf{x}_k - K_d\mathbf{x}_d = -K\mathbf{e} - K_o\mathbf{x}_o \\ &= -K\mathbf{e} - [K_r|K_d]\mathbf{x}_o \\ &= -K\mathbf{e} - K_o\mathbf{x}_o \end{aligned} \quad (13.9)$$

Dessa forma, seria possível alocar polos para a matriz de ganho da planta em malha fechada, K , para torná-la estável utilizando as mesmas técnicas anteriores. A utilização da eq. 13.9 na eq. 13.5 com a imposição de erro nulo em regime permanente leva a

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= A\mathbf{e} + E\mathbf{x}_o - B(K\mathbf{e} + K_o\mathbf{x}_o) = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} &= [A - BK]\mathbf{e} + [E - BK_o]\mathbf{x}_o \end{aligned} \quad (13.10)$$

Estando a estabilidade garantida em malha fechada pela alocação dos polos da planta, resultando na matriz $A_{mf} = A - BK$, que é inversível, o erro em regime permanente é dado em função da matriz de ganhos dos termos exógenos K_o que deve ainda ser calculada:

$$\mathbf{e} = [A - BK]^{-1}[BK_o - E]\mathbf{x}_o \quad (13.11)$$

Teoricamente, para obter erro nulo bastaria resolver a eq. 13.11 para K_o ; entretanto, em termos práticos, seria difícil dispor de entradas de controle (colunas na matriz B) suficientes para zerar todas as variáveis de estado no vetor de erro. Dessa forma, seria suficiente aceitar como premissa de projeto que uma *combinação linear do vetor de erro* (e não todo o vetor) tivesse resposta nula em regime permanente, o que pode ser obtido através de uma transformação linear $\mathbf{y}_e = C\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Com isso, em 13.11,

$$C\mathbf{e} = C[A - BK]^{-1}[BK_o - E]\mathbf{x}_o = \mathbf{0} \quad (13.12)$$

Para que a eq. 13.12 seja válida para qualquer $\mathbf{x}_o$ é necessário que

$$\begin{aligned} C[A - BK]^{-1}[BK_o - E] &= \mathbf{0} \\ C[A - BK]^{-1}BK_o &= C[A - BK]^{-1}E \end{aligned} \quad (13.13)$$

Nota-se na eq. 13.13 que a solução para K_o depende diretamente da dimensão da matriz C pois:

$$\begin{aligned} \dim(A) &= n \times n; \quad \dim(B) = n \times p \Rightarrow \\ \dim([A - BK]^{-1}) &= n \times n; \quad \dim([A - BK]^{-1}B) = n \times p \end{aligned}$$

Supondo-se $\dim(C) = m \times n$, K_o terá solução única apenas se o sistema for *quadrado*, isto é, se o número de linhas de C for idêntico ao número de entradas, colunas da matriz B , o que corresponde a $m = p$ e resulta em

$$K_o = [C[A - BK]^{-1}B]^{-1}C[A - BK]^{-1}E \quad (13.14)$$

Caso $m > p$, o número de equações será maior que o número de incógnitas, indicando muitas

condições a serem atendidas por K_o e, dependendo do sistema, não haverá solução. Por outro lado, caso $m < p$, há flexibilidade em atender algumas condições, embora todas não possam ser atendidas simultaneamente. Para o sistema quadrado, a matriz

$$B^* = [C[A - BK]^{-1}B]^{-1} C[A - BK]^{-1} \quad (13.15)$$

possui dimensão $p \times n$ ou $m \times n$. Demonstra-se também que $B^\sharp$ é tal que $B^\sharp B = I \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e denomina-se pseudo-inversa à esquerda de B . Na fig. 89 o seguidor de referência em discussão é mostrado. Seguidores de referência por modelos assumidos possuem bom

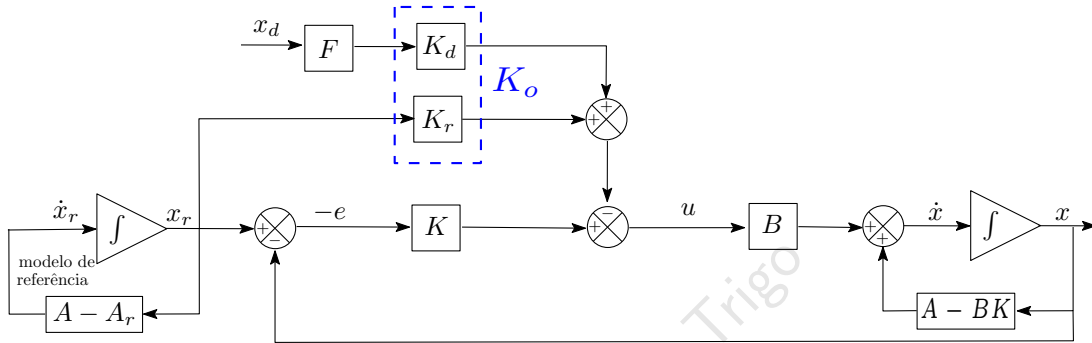


Figura 89: Seguidor de referência por modelos assumidos (adaptado e modificado de Friedland, 2015) com adaptação para tornar o sistema global em MF controlável.

desempenho no rastreamento de condições que cujo objetivo final seja a manutenção de valores constantes em regime permanente. Quando é necessário seguir referências continuamente variáveis, uma abordagem via controle linear quadrático pode ser mais vantajosa. Esse é o próximo item a ser apresentado.

13.2 Seguidores de referência via controle linear quadrático

O desenvolvimento apresentado nesta seção é análogo ao utilizado na dedução das equações para o regulador quadrático da seção 11.2 e consiste na sua generalização.

Consideramos o SLIT dado pela eq. 13.1. O índice de desempenho a ser minimizado é dado por

$$J = \frac{1}{2} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t_f)]^T M [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t_f)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} ([\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r(t)]^T Q [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r(t)] + \mathbf{u}^T(t) R \mathbf{u}(t)) dt \quad (13.16)$$

com $M, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Q \geq 0$ e $R > 0$ e onde $\mathbf{x}_r(t)$ é a referência a ser seguida. Novamente, a função Hamiltoniana irá permitir a inclusão dos vínculos dinâmicos no problema de minimização através dos multiplicadores de Lagrange $\lambda(t)$. O instante final t_f é imposto (finito), o estado final $\mathbf{x}(t_f)$ é livre, o estado $\mathbf{x}(t)$ e o controle $\mathbf{u}(t)$ não são limitados. A

função Hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = & \frac{1}{2}[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t_f)]^T M[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t_f)] \\ & + \frac{1}{2}([\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r(t)]^T Q[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r(t)] + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) \\ & + \boldsymbol{\lambda}^T(t) (A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t))\end{aligned}\quad (13.17)$$

Novamente, o princípio do mínimo de Pontryagin estabelece que o controle ótimo procurado K_{ot} deve satisfazer às seguintes equações:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} = \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{condição inicial}) \quad (13.18)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}^T} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) - A^T \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{equação de co-estado}) \quad (13.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}^T} = \mathbf{0} = R\mathbf{u} + B^T \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \mathbf{u} = -R^{-1} B^T \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{condição algébrica}) \quad (13.20)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = M(\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t_f)) \quad (\text{condição algébrica final}) \quad (13.21)$$

Utilizando a eq. 13.20 na eq. 13.18 e com a eq. 13.19 chega-se ao sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -Q\mathbf{x}_r \end{bmatrix} \quad (13.22)$$

cujas soluções permitem obter a lei ótima de controle. Como no caso do regulador, é necessário resolver a equação diferencial que fornece o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ para que a lei de controle possa ser implementada. Nota-se, agora, a presença de um termo $\mathbf{x}_r(t)$ que corresponde à referência variável a ser seguida e que representa um *deslocamento* que deve ser imposto ao estado para que o erro de acompanhamento possa ser suprimido. Seria, então, lógico adotar uma função-tentativa afim do tipo

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = P(t)\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\nu}(t) \quad (13.23)$$

em que $P(t)$ deve ainda ser obtida. Substituindo a eq. 13.23 na eq. 13.20, obtém-se a lei de controle para o seguidor de referência,

$$\mathbf{u} = -R^{-1} B^T P \mathbf{x} + R^{-1} B^T \boldsymbol{\nu}, \quad (13.24)$$

Efetuada a derivada temporal de 13.23 e levando em conta as eqs. 13.18 e 13.20, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= \dot{P}\mathbf{x} + P\dot{\mathbf{x}} - \dot{\boldsymbol{\nu}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= \dot{P}\mathbf{x} + PA\mathbf{x} - PBR^{-1}B^T P\mathbf{x} - \dot{\boldsymbol{\nu}} + PBR^{-1}B^T P\boldsymbol{\nu} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= \left(\dot{P} + PA - PBR^{-1}B^T P \right) \mathbf{x} - \dot{\boldsymbol{\nu}} + PBR^{-1}B^T P\boldsymbol{\nu}\end{aligned}\quad (13.25)$$

Por outro lado, a substituição da eq. 13.23 na eq. 13.19 fornece

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= -Q\mathbf{x} + Q\mathbf{x}_r - A^T P\mathbf{x} + A^T \boldsymbol{\nu} \\ \dot{\lambda} &= -(Q + A^T P)\mathbf{x} + Q\mathbf{x}_r + A^T \boldsymbol{\nu}\end{aligned}\quad (13.26)$$

Igualando-se as duas últimas equações e agrupando termos obtém-se:

$$(\dot{P} + PA - PBR^{-1}B^T P + Q + A^T P)\mathbf{x} - (\dot{\boldsymbol{\nu}} + A - PBR^{-1}B^T P)\boldsymbol{\nu} - Q\mathbf{x}_r = \mathbf{0} \quad (13.27)$$

Além disso, a condição final dada pela eq. 13.21 também deve ser atendida. Utilizando 13.23 em 13.21 chega-se a

$$P(t_f)(\mathbf{x}(t_f) - \boldsymbol{\nu}(t_f)) = M(\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_r(t_f)) \Rightarrow \quad (13.28)$$

$$\begin{aligned}P(t_f) &= M \\ \boldsymbol{\nu}(t_f) &= \mathbf{x}_r(t_f)\end{aligned}\quad (13.29)$$

Como eq. 13.27 deve ser válida para qualquer estado $\mathbf{x}$, então

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \quad (13.30)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -A + PBR^{-1}B^T P\boldsymbol{\nu} - Q\mathbf{x}_r \quad (13.31)$$

As duas equações diferenciais 13.30 e 13.31 com suas respectivas condições iniciais, eqs. 13.28 e 13.29, devem ser resolvidas para obter a matriz P e o vetor $\boldsymbol{\nu}$ procurados e necessários à implementação da lei de controle para o seguidor de referência, que é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= -R^{-1}B^T \boldsymbol{\lambda} = -R^{-1}B^T P(t)\mathbf{x}(t) + R^{-1}B^T \boldsymbol{\nu}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= -K_{ot}(t)\mathbf{x}(t) + R^{-1}B^T \boldsymbol{\nu}(t) \\ \therefore \Rightarrow K_{ot}(t) &= R^{-1}B^T P(t)\end{aligned}\quad (13.32)$$

ou seja, o ganho de controle é idêntico ao obtido para o regulador e a matriz $P(t)$ também decorre da solução da equação diferencial matricial de Riccati. A dinâmica do seguidor em malha fechada é, assim, expressa por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B(-K_{ot})\mathbf{x}(t) + BR^{-1}B^T \boldsymbol{\nu}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B(-R^{-1}B^T P(t))\mathbf{x}(t) + BR^{-1}B^T \boldsymbol{\nu}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= [A - BR^{-1}B^T P(t)]\mathbf{x}(t) + BR^{-1}B^T \boldsymbol{\nu}(t), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)\end{aligned}\quad (13.33)$$

Definindo um erro de acompanhamento de referência como

$$\mathbf{e}_r(t) \triangleq \mathbf{x}_r - \mathbf{x} \quad (13.34)$$

a lei de controle ótimo para o seguidor em termos do erro é expressa por

$$\mathbf{u}(t) = K_{ot}\mathbf{e}(t) + R^{-1}B^T (\boldsymbol{\nu}(t) - P(t)\mathbf{x}_r(t)) \quad (13.35)$$

e sua representação em diagrama de blocos é dada na fig. 90. No diagrama,

$$K_a(t) = R^{-1}B^T(\boldsymbol{\nu}(t) - P(t)\mathbf{x}_r(t))$$

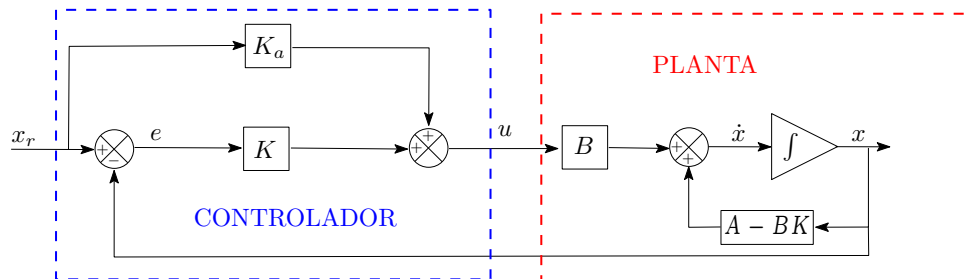


Figura 90: Seguidor de referência por otimização linear quadrática. Nota-se que o controlador possui uma pré-alimentação do erro, responsável por garantir o acompanhamento da referência.

REFERÊNCIAS

- Brogan, W.L. *Modern Control Theory*. New York: Prentice Hall, 1991 (3rd. Ed).
- Castrucci, P.L.; Bittar, A.; Sales, R.M. *Controle Automático*. Rio de Janeiro: LTC, 2018 (2a. Ed.)
- Dorf, R.C. e Bishop, R.H. *Sistemas de Controle Modernos*. São Paulo: LTC, 8a. Edição, 1998.
- Fleury, A.T. *Introdução à Teoria de Controle - Notas de Aula do curso PMC-450*. São Paulo: PMC-EPUSP, 2004.
- Franklin, GF; Powell, JD; Emami-Naeini, A. *Feedback control of dynamic systems*. Mineola: Dover, 2005 (7th Ed.).
- Friedland, B. *Control System Design – An Introduction to State-Space Models*. Harlow: Pearson, 2015 (7th Ed.).
- Kailath, T. *Linear Systems*. Engl. Cliffs: Prentice Hall, 1980.
- Kalman, R.E. *Mathematical Description of Linear Dynamical Systems*. J.S.I.A.M Control, Ser. A, vol 1, no. 2, 1963.
- Kalman, R.E. *On the general theory of control systems*. In: Proceedings First International Conference on Automatic Control, Moscow, USSR, 1960, pp. 481–492.
- Lepschy, AM; Mian, GA; Viaro, U. *Feedback Control in ancient water and mechanical clocks*. IEE Transactions on Education v.35-1, 1992.
- Luenberger, D.G. *An Introduction to Observers*. IEE Transactions on Automatic Control v.AC-16, no. 6, 1971.
- Luenberger, D.G. *Observer the State of Linear System*. IEE Transactions on Military Electronics, 1968.
- Nise, N.S. *Control Systems Engineering*, Hoboken: Willey, 2011 (6th. Ed).
- Ogata, K. *Modern Control Engineering*, NJ: Prentice Hall, 1990 (2nd. Ed).