PTC3424 - Processamento Digital de Sinais

Aula 6: Representação de sistemas LIT no domínio do tempo: a soma de convolução

Prof. Marcio Eisencraft

EPUSP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Março 2025

Sumário

Sumário

Bibliografia Básica

Principais referências:

- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S. *Sinais e Sistemas*, 2ª edição, Pearson, 2010.
  - Capítulo 2.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.
  - Capítulo 2.
- Colab para gerar as figuras da aula.

Outras fontes recomendadas:

- Documentações e tutoriais do `numpy`.
- Documentações e tutoriais do Scipy Signal Processing

Sumário

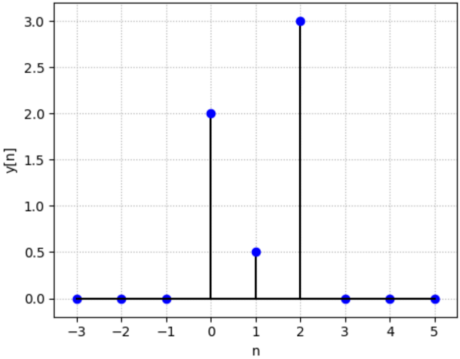
Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LIT)

- Muitos sistemas físicos podem ser modelados, pelo menos inicialmente, como sistemas **Lineares e Invariantes no Tempo (LIT)**.
- Além disso, esses sitemas são mais simples de projetar e com comportamento mais fácil de prever. Assim, muitos projetos de Engenharia são baseados em sistemas LIT.
- Um sistema LIT fica totalmente caracterizado por sua **resposta ao impulso**, ou seja, pela saída quando a entrada é o impulso unitário $\delta[n]$.
- Se conhecemos a resposta ao impulso, podemos obter a saída para qualquer entrada, como sistematizaremos na aula de hoje.

Exemplo Motivador

Exercício Resolvido na Aula 05:

- Um sistema LIT tem a seguinte resposta à entrada $x[n] = \delta[n]$.



  Esboce a saída $y[n]$ quando a entrada for

  1. $x[n] = 3\delta[n]$; $x[n] = \delta[n-2]$; $x[n] = 2\delta[n] + 0.5\,\delta[n-1]$

- Conclusão: se o sistema é LIT, basta deslocar e somar versões de $y[n]$ para obter a saída a qualquer entrada!

Sumário

Sistemas LIT e a resposta ao impulso

- Vimos que qualquer sinal discreto $x[n]$ pode ser escrito como uma soma de impulsos:

$$\boxed{x[n] \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k].} \tag{1}$$

- Seja o sistema

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

e vamos definir sua resposta ao impulso unitário como $h[n]$:

$$\boxed{h[n] \triangleq H\left\{\delta[n]\right\}}$$

A soma de convolução

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

$$\begin{aligned} y[n] = H\{x[n]\} &\underset{\text{De (1)}}{=} H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\} \underset{\text{Lin.}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\{x[k]\,\delta[n-k]\} \\ &\underset{\text{Homog.}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,H\{\delta[n-k]\} \underset{\text{IT}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

Assim,

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

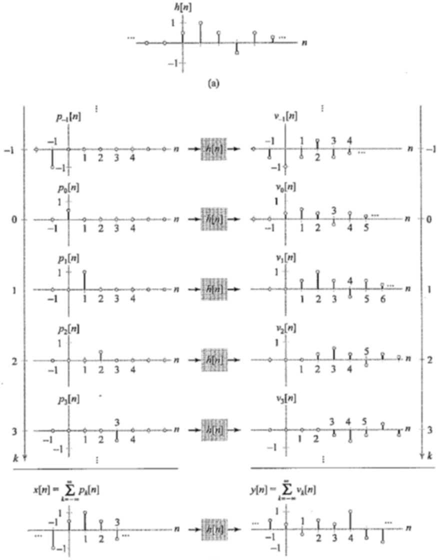
Soma de Convolução

Expressão

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k],$$

- Chamada de **convolução discreta** representada pelo símbolo $*$.
- Escrevemos $y[n] = x[n] * h[n]$.
- Interpretação prática: "deslizar" e "multiplicar" e "somar".

Interpretação gráfica



(b)

Método de "Inverter e Deslocar"

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k].}$$

- Outra abordagem: calculamos diretamente a convolução para cada n_0 fixo em vez de calcular para todos os n de uma vez. É a abordagem usada computacionalmente:

$$y\left[n_0\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n_0 - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h\left[-\left(k - n_0\right)\right]$$

- Graficamente: "espelhe" $h[k]$ para $h[-k]$, depois desloca de $+n_0$.
- Multiplicar com $x[k]$ ponto a ponto e somar todas as amostras resulta em $y[n_0]$.

Exemplo de Cálculo

Um sistema LIT H possui resposta ao impulso dada por

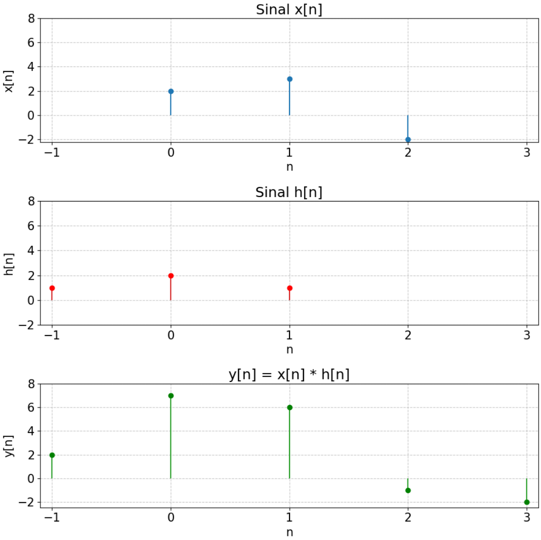
$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = \pm 1 \\ 2, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a resposta deste sistema à entrada $x[n] = \{\underset{\uparrow}{2}, 3, -2\}$:

1. usando a interpretação de "somas de $h[n]$"
2. usando o método de inverter e espelhar.
3. Calcule o produto dos polinômios $2 + 3z - 2z^2$ por $z^{-1} + 2 + z$. O que você nota?

Python

```
x = np.array([2, 3, -2])
n_x = np.arange(0, 3)
h = np.array([1,2,1])
n_h = np.arange(-1, 2)
n_y = np.arange(n_x[0]+
    n_h[0], n_x[-1]+ n_h
    [-1]+1)
y = np.convolve(x, h)
```



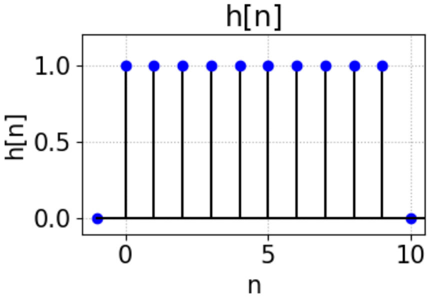
Exercícios

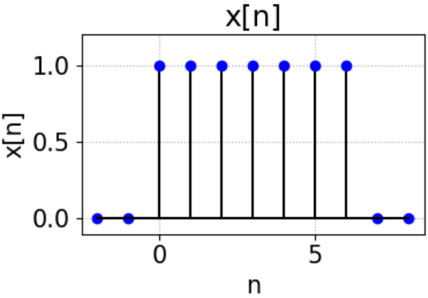
Um sistema LIT tem a resposta ao impulso dada por

$$h[n] = u[n] - u[n-10].$$

Determine a saída desse sistema quando a entrada for o pulso retangular

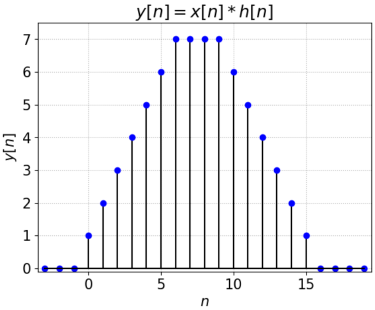
$$x[n] = u[n-2] - u[n-7].$$





Resolução Python

```
n_h = np.arange(-1, 12)
h = np.zeros_like(n_h, dtype=float)
h[(n_h >= 0) & (n_h <= 9)] = 1.0
n_x = np.arange(-2, 9)
x = np.zeros_like(n_x, dtype=float)
x[(n_x >= 0) & (n_x <= 6)] = 1.0
n_y = np.arange(n_x[0]+n_h[0], n_x[-1]+n_h[-1]+1)
y = np.convolve(x, h)
```



Exercícios

Calcule a resposta ao degrau para um sistema cuja resposta ao impulso é dada por

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

com $\alpha < 1$.

Exercícios

Considere um sistema LIT com resposta ao impulso:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \le n \le 3, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre uma expressão que relacione diretamente uma entrada arbitrária $x[n]$ à saída deste sistema, $y[n]$.

Exercícios

Admitamos que a entrada $x[n]$ para um sistema LIT H seja

$$x[n] \; = \; \left(u[n] - u[n-10]\right) \alpha^n,$$

e que a resposta ao impulso desse sistema seja

$$h[n] \; = \; \beta^n \, u[n], \quad (\text{com } 0 < \beta < 1).$$

Encontre a saída $y[n]$ deste sistema.

Resposta: $y[n] \; = \; \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \beta^n \, \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, & 0 \leq n < 10, \\ \beta^n \, \dfrac{1 - r^{10}}{1 - r}, & n \geq 10, \end{cases}$ em que $r \; = \; \frac{\alpha}{\beta}$.