

PTC3424 - Processamento Digital de Sinais

Aula 5: Sistemas de tempo discreto: exemplos e classificação

Prof. Marcio Eisencraft

EPUSP

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Março 2025

- 1 Bibliografia
- 2 Sistemas de tempo discreto
- 3 Classificação de Sistemas
 - Memória
 - Causalidade
 - Invariância no Tempo
 - Linearidade

- 1 Bibliografia
- 2 Sistemas de tempo discreto
- 3 Classificação de Sistemas
 - Memória
 - Causalidade
 - Invariância no Tempo
 - Linearidade

Principais referências:

- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S. *Sinais e Sistemas*, 2ª edição, Pearson, 2010.
 - Capítulo 1.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.
 - Capítulo 1.
- [Colab](#) para gerar as figuras da aula.

Outras fontes recomendadas:

- Documentações e tutoriais do [numpy](#).
- Documentações e tutoriais do [Scipy Signal Processing](#)

1 Bibliografia

2 Sistemas de tempo discreto

3 Classificação de Sistemas

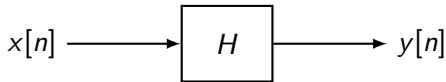
- Memória
- Causalidade
- Invariância no Tempo
- Linearidade

Definição de Sistema de Tempo Discreto

- No contexto deste curso, **sistema** ou **filtro** é uma entidade que **transforma** um ou mais sinais de entrada em um ou mais sinais de saída.
- Aqui estamos interessados nos sistemas **de tempo discreto**, em que tanto a entrada quanto a saída são sinais de tempo discreto (basicamente sequências numéricas).
- O ente matemático usado para representar um sistema é o **operador**: se $y[n]$ é a saída de H com entrada $x[n]$, escrevemos

$$y[n] = H\{x[n]\}.$$

- Diagrama de blocos:



Exemplo simples: Média Móvel

Exemplo: Média móvel

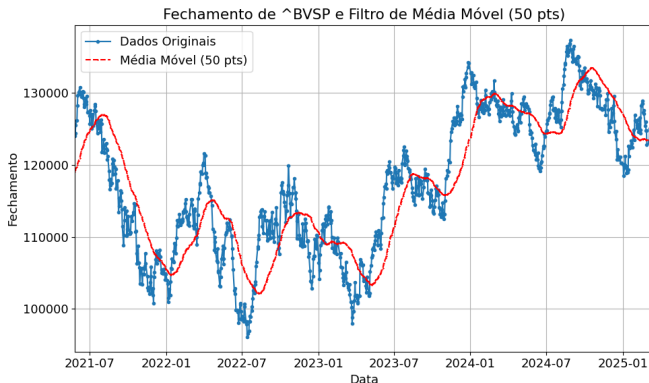
A média móvel é usada para detectar a tendência de uma variável que flutua muito rapidamente como as médias do mercado de ações. Uma variável pode flutuar (para cima ou para baixo) diariamente, mascarando a sua tendência de longo prazo.

Podemos obter a tendência de longo prazo suavizando ou tomando a média dos N últimos valores da variável. Para o mercado de ações, podemos considerar uma média móvel de 3 dias como sendo a média dos valores de fechamento do mercado de ações dos últimos três dias, $x[n]$, $x[n - 1]$ e $x[n - 2]$.

- 1 Escreva a equação de diferenças relacionando $y[n]$ e $x[n]$.
- 2 Desenhe um diagrama de blocos que implemente este sistema.

Exemplo: média móvel

```
def filtro_media_movel_lfilter(dados, tam_janela=3):  
    b = np.ones(tam_janela) / tam_janela  
    a = [1.0]  
    dados_filtrados = lfilter(b, a, dados)  
    return dados_filtrados
```



Mais Exemplos de Sistemas de Tempo Discreto

Mais exemplos

Encontre $y[n]$, $0 \leq n \leq 3$ para o sistema dado por:

$$y[n] + y[n-1] + y[n-2] = x[n] + x[n-1] + x[n-3].$$

com $x[n] = 3u[n]$, $y[-1] = 3$ e $y[-2] = 2$.

```
b = [1,1,0,1]
a = [1, 1, 1]
zi = ifiltic(b, a, y = [3,2])
x = 3*np.ones(10)
y,zf = lfilter(b, a, x, zi = zi)
print(y)
[-2.  5.  3.  1.  5.  3.  1.  5.  3.  1.]
```

Função `lfilter`

Implementa $a[0]*y[n] = b[0]*x[n] + b[1]*x[n-1] + \dots + b[M]*x[n-M] - a[1]*y[n-1] - \dots - a[N]*y[n-N]$

Mais Exemplos de Sistemas de Tempo Discreto

Mais exemplos

A saída de uma caixa registradora $y[n]$ representa o preço total de n itens passados pela caixa. A entrada $x[n]$ é o preço do n -ésimo item.

- a) Escreva a equação de diferenças relacionando $y[n]$ a $x[n]$.
- b) Esquematize a realização deste sistema usando APENAS UM elemento de atraso.

- 1 Bibliografia
- 2 Sistemas de tempo discreto
- 3 Classificação de Sistemas
 - Memória
 - Causalidade
 - Invariância no Tempo
 - Linearidade

- 1 Bibliografia
- 2 Sistemas de tempo discreto
- 3 Classificação de Sistemas
 - Memória
 - Causalidade
 - Invariância no Tempo
 - Linearidade

Memória vs. Sem Memória

- Um sistema **possui memória** se a saída $y[n]$ depende de *valores passados ou futuros* da entrada $x[n]$.
- Sem memória (*memoryless*): saída no instante n depende apenas de $x[n]$ (valor presente).
- Exemplo:

Com memória:
$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1] + x[n-2]}{3}.$$

- Exemplo:

Sem memória:
$$y[n] = x^2[n].$$

- Como vimos em aulas anteriores, **memória** $\Rightarrow$ elementos atrasadores na realização.

- 1 Bibliografia
- 2 Sistemas de tempo discreto
- 3 Classificação de Sistemas
 - Memória
 - Causalidade
 - Invariância no Tempo
 - Linearidade

Causal vs Não Causal

- **Causal**: saída no instante atual n depende apenas de $x[n]$ e/ou amostras passadas $x[n - k]$ ($k > 0$).
- Caso contrário, é dito **não causal**.
- Exemplo:

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n - 1] + x[n - 2]) \quad (\text{causal}),$$

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n + 1] + x[n - 1]) \quad (\text{não causal}).$$

- Todo sistema prático que opera **em tempo real** precisa ser causal.

- 1 Bibliografia
- 2 Sistemas de tempo discreto
- 3 Classificação de Sistemas
 - Memória
 - Causalidade
 - Invariância no Tempo
 - Linearidade

Invariância no Tempo

- Um sistema $H\{\cdot\}$ é **invariante no tempo** se deslocar a entrada em k amostras implica deslocar a saída na mesma quantidade k .
- Simbolicamente:

$$x[n] \xrightarrow{H} y[n], \quad x[n - n_0] \xrightarrow{H} y[n - n_0].$$

- Um sistema invariante no tempo reage de maneira idêntica, não importa quando o sinal de entrada seja aplicado.
- **Exemplo:** $y[n] = x[n - 1]$ é invariante (um simples atraso).
- **Exemplo:** $y[n] = r^n x[n]$ (para $r \neq 1$) é variante, pois o ganho depende de n .

- 1 Bibliografia
- 2 Sistemas de tempo discreto
- 3 Classificação de Sistemas
 - Memória
 - Causalidade
 - Invariância no Tempo
 - Linearidade

Definição

Um sistema é **linear** se satisfaz os princípios de **superposição** e **homogeneidade**:

- **Superposição:** Se $x_1[n] \rightarrow y_1[n]$ e $x_2[n] \rightarrow y_2[n]$, então

$$x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow y_1[n] + y_2[n].$$

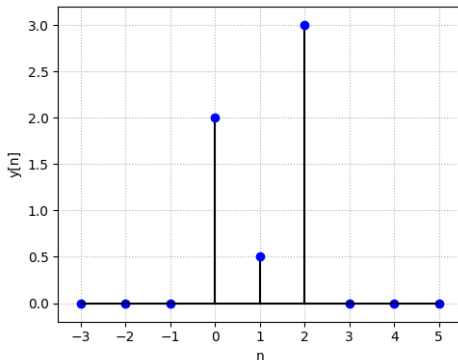
- **Homogeneidade:** Se $x[n] \rightarrow y[n]$, então para qualquer escalar a ,

$$a x[n] \longrightarrow a y[n].$$

- Os sistemas que são ao mesmo tempo lineares e invariantes no tempo formam uma classe essencial de sistemas de tempo discreto: são os **sistemas LIT** (ou LTI, em inglês).
- Boa parte das técnicas de PDS: filtros, transformadas, etc. são essencialmente ferramentas para tratar com sistemas LIT!

Exemplo de Linearidade / Exercícios

- Um sistema LIT tem a seguinte resposta à entrada $x[n] = \delta[n]$.



Esboce a saída $y[n]$ quando a entrada for

- 1 $x[n] = 3\delta[n]$
- 2 $x[n] = \delta[n - 2]$
- 3 $x[n] = 2\delta[n] + 0.5\delta[n - 1]$

Exemplo de Classificação

Um sistema de tempo discreto é definido pela equação de diferenças

$$y[n] = x[n](1 - x[n - 1]).$$

Este sistema:

- (a) É causal?
- (b) Tem memória?
- (c) É linear?
- (d) É invariante no tempo?
- (e) Determine iterativamente a resposta ao degrau deste sistema para $0 \leq n \leq 5$.
- (f) Repita para $x[n] = u[n - 2]$.
- (g) Repita para $x[n] = 3u[n]$.