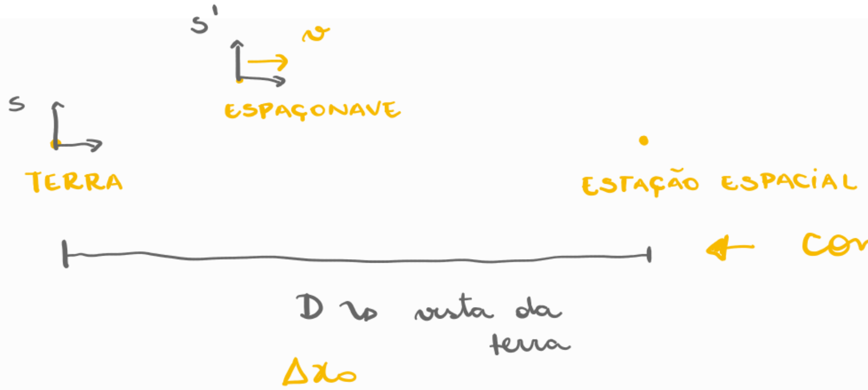
Uma espaçonave parte da Terra no instante $t = 0$ e mantém sua jornada em linha reta com velocidade escalar v em direção a uma estação espacial que se localiza a uma distância D da Terra segundo observadores na Terra. Considere v próxima à velocidade da luz e despreze efeitos de aceleração da espaçonave.

(a) (1,0 ponto) Calcule o tempo necessário para a espaçonave atingir a estação segundo seu comandante.

(b) (1,5 ponto) No instante em que atinge a estação, a espaçonave emite um sinal luminoso na direção da Terra e continua sua viagem em linha reta. Segundo o comandante, qual é o intervalo de tempo entre a emissão e a chegada deste sinal à Terra e quanto a espaçonave se afastou da estação espacial neste mesmo intervalo de tempo?



← comprimento próprio no referencial S

a) No referencial da Terra

Distância D percorrida com velocidade v.

$$D = v\,\Delta t \qquad \Delta t = \frac{D}{v}$$

Para o comandante, o intervalo de tempo entre passar pela Terra e passar pela estação espacial é um tempo próprio Δt_0.

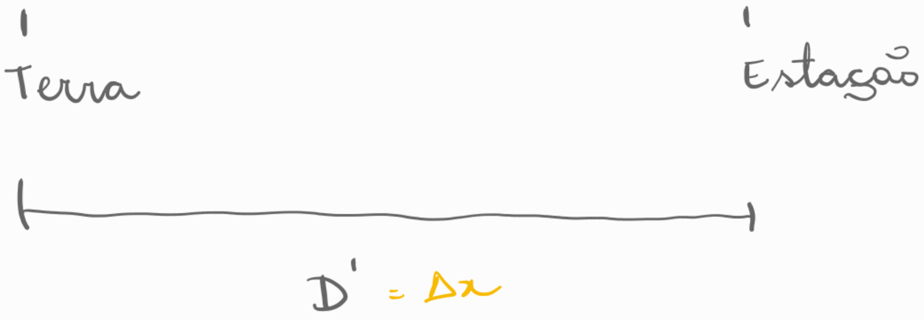
$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0$$

$$\Delta t_0 = \frac{1}{\gamma}\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\frac{D}{v}$$

$$\Delta t_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\frac{D}{v}$$

Alternativamente: começamos no referencial S' e usamos o comprimento modificado D'.

b) Parte 1: Intervalo de tempo entre a emissão do sinal luminoso na estação espacial e a chegada do sinal na Terra no referencial S'.



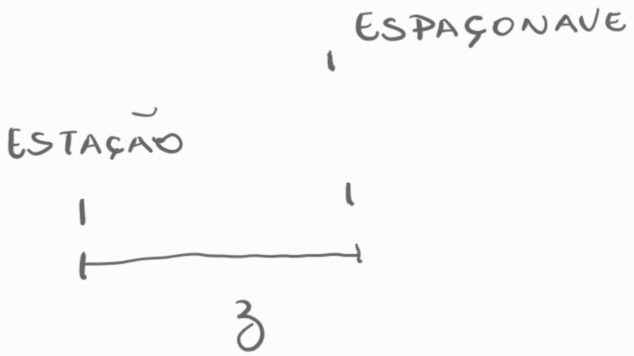
Temos a distância D' percorrida com velocidade c.

$$D' = c\,\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{D'}{c}$$

$$D' = \frac{D}{\gamma} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; D$$

$$\boxed{\Delta t = \sqrt{1 - v^2/c^2}\;\frac{D}{c}}$$

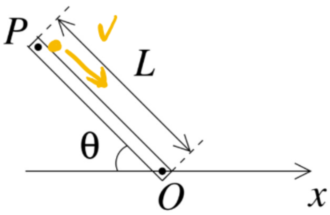
Parte 2: O quanto a espaçonave se afastou da estação espacial? Medido em S'.

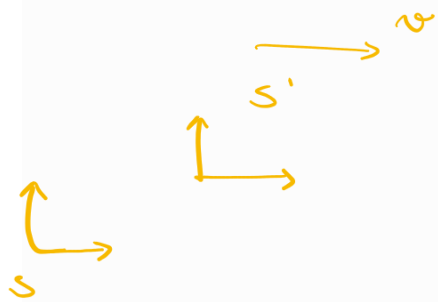


$$z = v\,\Delta t$$

$$\boxed{z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\;\frac{vD}{c}}$$

Uma barra de comprimento próprio L, orientada segundo um ângulo θ em relação ao eixo x está em repouso em um sistema inercial S, conforme a figura. Considere um sistema S' que se move com velocidade constante $\vec{v} = u\,\hat{\imath}$ em relação a S. Nos itens abaixo expresse suas respostas em termos de L, u, V, θ e da velocidade da luz c.



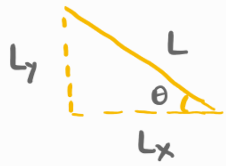


(a) (1,0 ponto) Qual é o comprimento L' da barra no sistema S'?

(b) (1,0 ponto) Qual é o ângulo de orientação θ' da barra no sistema S'?

(c) (0,5 ponto) Suponha agora que uma partícula relativística se move ao longo da barra com velocidade V, medida em S, no sentido de P para O. Quais são as componentes do vetor velocidade desta partícula para um observador em S'?

a)



$$L_x = L\cos(\theta)$$
$$L_y = L\,\mathrm{sen}(\theta)$$

L', L_x', L_y' os mesmos comprimentos medidos no referencial S'.

Como S' se move na direção x:

$$L_x' = \frac{L_x}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,L\cos(\theta)$$

$$L_y' = L_y = L\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$L' = \sqrt{L_x'^2 + L_y'^2} = \left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)L^2\cos^2(\theta) + L^2\mathrm{sen}^2(\theta)\right]^{1/2}$$

$$= \left[\underbrace{L^2\cos^2(\theta) + L^2\mathrm{sen}^2(\theta)}_{L^2} - \frac{v^2L^2}{c^2}\cos^2(\theta)\right]^{1/2}$$

$$L' = \left[L^2 - \frac{v^2L^2}{c^2}\cos^2(\theta)\right]^{1/2}$$

b) Ângulo θ' medido em S':

$$tg(\theta') = \frac{L'_y}{L'_x} = \frac{\cancel{L}\,sen(\theta)}{\cancel{L}\cos(\theta)/\gamma}$$

$$= \gamma\, tg(\theta)$$

$$\boxed{\theta' = arctg\left(\gamma\, tg(\theta)\right)}$$

c) Velocidade da partícula em S:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V\cos(\theta) \\ V sen(\theta) \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} V_x &= V\cos(\theta) \\ V_y &= V sen(\theta) \end{aligned}$$

Vamos usar as transformações de Lorentz pra velocidade para encontrar as componentes de V':

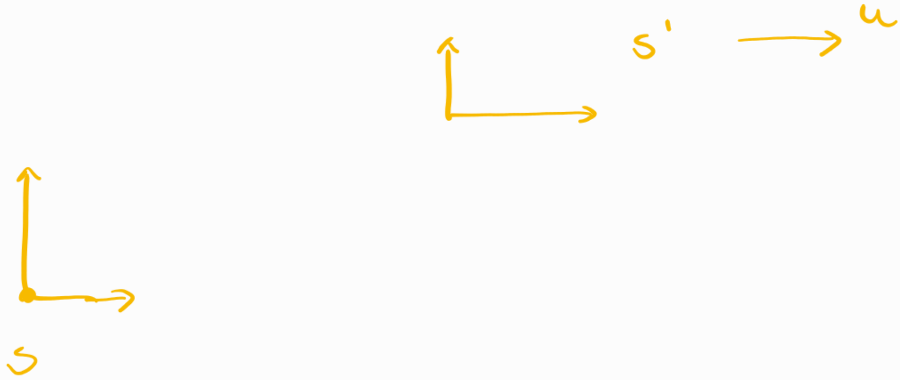
$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \\[2ex] v'_y = \dfrac{v_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}, \\[2ex] v'_z = \dfrac{v_z\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}. \end{cases}$$

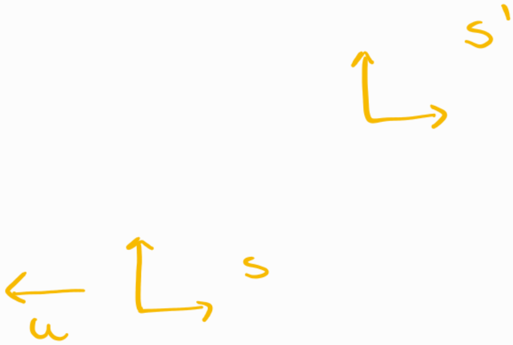
$$V'_x = \frac{V_x - u}{1 - uV_x/c^2}$$

$$\boxed{V'_x = \frac{V\cos(\theta) - u}{1 - uV\cos(\theta)/c^2}}$$

$$V'_y = \frac{V_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uV_x/c^2}$$

$$\boxed{V'_y = \frac{V sen(\theta)\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uV\cos(\theta)/c^2}}$$





$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \\[2ex] v'_y = \dfrac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}, \\[2ex] v'_z = \dfrac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}. \end{cases}$$

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2}$$

(I) (1,5 ponto) Um observador em repouso na plataforma de uma estação quer medir a velocidade com que um trem se afasta da mesma. Para isto ele emite uma onda eletromagnética de frequência f_0. Um viajante de dentro do trem recebe o sinal eletromagnético e retransmite-o de volta ao observador na plataforma. Este por sua vez mede a frequência da onda chegando do trem e constata que seu valor é f. Obtenha a velocidade do trem em função de ~~de~~ f, f_0 e c.

Calcular a velocidade do trem em função de f, f_0 e c.

Parte 1: onda saindo da plataforma e chegando no trem. Fonte se afastando do observador. f' a frequência observada pelo observador no trem.

$$f' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\, f_0$$

Parte 2: onda saindo do trem e chegando na plataforma. Fonte se afastando do observador. f a frequência observada pelo observador na plataforma.

$$f = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\, f'$$

$$= \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \times \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\, f_0$$

$$f = \left(\frac{c - v}{c + v}\right) f_0$$

$$(c + v) f = (c - v) f_0$$

$$cf + vf = cf_0 - vf_0$$

$$vf + vf_0 = cf_0 - cf$$

$$v(f + f_0) = cf_0 - cf$$

$$v = \left(\frac{f_0 - f}{f_0 + f}\right) c$$