



Controle e Aplicações

Pré-alimentação

Acompanhamento de referências

Renato Maia Matarazzo Orsino

reorsino@usp.br



Conteúdo

- 1 Seguidor via controle linear-quadrático
- 2 Modelos assumidos para variáveis exógenas
- 3 *Ação integral em realimentação

Seguidor via controle linear-quadrático

Seguidor via controle linear-quadrático

Um controlador que faça o estado $\mathbf{x}$ do sistema acompanhar um sinal de referência prescrito $\mathbf{x}_r(t)$, $t \in [0, t_1]$, pode ser obtido via minimização de um índice de desempenho quadrático J para um horizonte de tempo finito:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{t_1} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^\top \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \right] dt + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^\top \mathbf{Q}_1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \Big|_{t=t_1}$$

com $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}_1$ sendo matrizes simétricas e semi-definidas positivas e $\mathbf{R}$ sendo uma matriz simétrica e definida positiva.

Uma vez que o sistema deve satisfazer à equação dinâmica:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

tal condição deve ser tratada como uma restrição do problema de otimização.

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, pode-se transformar o problema de otimização restrita da função $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ em um problema de otimização irrestrita de uma função $\bar{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$.

Uso do método dos multiplicadores de Lagrange

Defina-se a função objetivo estendida $\bar{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$\begin{aligned}\bar{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = & \int_0^{t_1} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^\top \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) + \mathbf{u}^\top \mathbf{R}\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\lambda}^\top \left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \right] dt \\ & + (\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_r(t_1))^\top \mathbf{Q}_1(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_r(t_1))\end{aligned}$$

Para a minimização de $\bar{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$, verifica-se primeiramente sob quais condições $\delta \bar{J} = 0$.

$$\begin{aligned}\delta \bar{J} = & 2 \int_0^{t_1} \left[\delta \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) + \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R}\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^\top \left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \right. \\ & \left. + \boldsymbol{\lambda}^\top \left(\mathbf{A}\delta \mathbf{x} + \mathbf{B}\delta \mathbf{u} - \frac{d\delta \mathbf{x}}{dt} \right) \right] dt + 2\delta \mathbf{x}(t_1)^\top \mathbf{Q}_1(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_r(t_1))\end{aligned}$$

Integrando por partes, verifica-se que:

$$\int_0^{t_1} \boldsymbol{\lambda}^\top \frac{d\delta \mathbf{x}}{dt} dt = \boldsymbol{\lambda}^\top \delta \mathbf{x} \Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \frac{d\boldsymbol{\lambda}^\top}{dt} \delta \mathbf{x} dt$$

Uso do método dos multiplicadores de Lagrange

Notando ainda que o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ deve ser tratado como um dado do problema e, assim, $\delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, a condição $\delta \bar{J} = 0$ se torna:

$$0 = \int_0^{t_1} \left\{ \delta \mathbf{x}^\top \left[\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \right] + \delta \mathbf{u}^\top [\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda}] \right. \\ \left. + \delta \boldsymbol{\lambda}^\top \left[\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right] \right\} dt + \delta \mathbf{x}(t_1)^\top [\mathbf{Q}_1(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_r(t_1)) - \boldsymbol{\lambda}(t_1)]$$

Sendo as variações $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\lambda}$ e $\delta \mathbf{x}(t_1)$ independentes, decorre que:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}\mathbf{x}_r \quad \textcircled{1}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda} \quad \textcircled{2}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda} \quad \textcircled{3}$$

$$\mathbf{Q}_1(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_r(t_1)) - \boldsymbol{\lambda}(t_1) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda}(t_1) = \mathbf{Q}_1\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{Q}_1\mathbf{x}_r(t_1) \quad \textcircled{4}$$

Uso do método dos multiplicadores de Lagrange

Buscando para λ uma solução afim em termos do estado x do sistema:

$$\lambda(t) = P(t)x(t) - \eta(t) \quad (5)$$

Da equação ②, $u(t) = -R^{-1}(t)B(t)^T \lambda(t)$ e, portanto, a lei de controle proposta adquire a forma:

$$u(t) = -K(t)x(t) + \tilde{u}(t) \quad \text{com} \quad K = R^{-1}B^T P \quad \text{e} \quad \tilde{u} = R^{-1}B^T \eta$$

Tomando a derivada temporal de ⑤ e utilizando ③, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{dP}{dt}x + P\frac{dx}{dt} - \frac{d\eta}{dt} \\ &= \left[\frac{dP}{dt} + PA - PBR^{-1}B^TP \right] x - \frac{d\eta}{dt} + PBR^{-1}B^T\eta \end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo ⑤ em ①, obtém-se:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left[-Q - A^TP \right] x + A^T\eta + Qx_r$$

Uso do método dos multiplicadores de Lagrange

As duas expressões para $\frac{d\lambda}{dt}$ serão equivalentes se, e somente se, $\forall \mathbf{x}$:

$$\left[\frac{dP}{dt} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q \right] \mathbf{x} - \left[\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} + (A^T - PBR^{-1}B^T) \boldsymbol{\eta} + Q\mathbf{x}_r \right] = 0$$

Além disso, da equação ④ também deve ser verdadeiro, qualquer seja o valor de $\mathbf{x}(t_1)$:

$$\lambda(t_1) = P(t_1)\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\eta}(t_1) = Q_1\mathbf{x}(t_1) - Q_1\mathbf{x}_r(t_1)$$

Assim, é suficiente que $P(t)$ e $\boldsymbol{\eta}(t)$ satisfaçam às seguintes EDOs:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \quad \text{com} \quad P(t_1) = Q_1 \\ \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} &= -(A^T - PBR^{-1}B^T) \boldsymbol{\eta} - Q\mathbf{x}_r \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\eta}(t_1) = Q_1\mathbf{x}_r(t_1) \end{aligned}$$

Seguidor via controle linear-quadrático

Conclui-se que, no projeto de um seguidor via controle linear-quadrático, a matriz $P(t)$ deve satisfazer à mesma equação diferencial de Riccati obtida na síntese de um regulador linear-quadrático (LQR). Consequentemente:

A matriz de ganho $K = R^{-1}B^T P$ do projeto de um seguidor deve ser a mesma adotada no projeto do respectivo regulador.

A dinâmica do seguidor em malha fechada é descrita pela equação ③:

$$\frac{dx}{dt} = (A - BR^{-1}B^T P)x + BR^{-1}B^T \eta \quad \text{com} \quad x(0) = x_0$$

Em particular, definindo a matriz de estados em malha fechada:

$$\bar{A} = (A - BK) = (A - BR^{-1}B^T P)$$

a equação ③ simplifica-se para a forma:

$$\frac{dx}{dt} = \bar{A}x + BR^{-1}B^T \eta \quad \text{com} \quad x(0) = x_0$$

Seguidor via controle linear-quadrático

A equação diferencial para a determinação de $\boldsymbol{\eta}(t)$ também pode ser simplificada a partir da definição de $\bar{\mathbf{A}}$:

$$(\mathbf{A}^\top - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P})^\top = \bar{\mathbf{A}}^\top$$

Assim:

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = -\bar{\mathbf{A}}^\top \boldsymbol{\eta} - \mathbf{Q}\mathbf{x}_r \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\eta}(t_1) = \mathbf{Q}_1\mathbf{x}_r(t_1)$$

*Nota – a solução do problema poderia alternativamente ser formulada colocando as equações ① e ③ na seguinte forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix}}_{\text{matriz Hamiltoniana } \mathbf{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{x}_r$$

com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ e condição final $\lambda(t_1) = \mathbf{Q}_1(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_r(t_1))$, eq. ④.

* Solução explícita em malha fechada – seguidor LQ

Pode-se obter uma solução explícita para $\eta(t)$ por meio da equação:

$$\eta(t) = \bar{\Psi}(t, 0)\eta(0) - \int_0^t \bar{\Psi}(t, \tau)Qx_r(\tau) d\tau$$

com $\bar{\Psi}(t, \tau)$ satisfazendo à equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}(t, \tau) = -\bar{A}^\top(t)\bar{\Psi}(t, \tau) \quad \text{com} \quad \bar{\Psi}(\tau, \tau) = I, \quad \forall \tau \in [0, t_1]$$

O valor de $\eta(0)$ consistente com a condição final $\eta(t_1) = Q_1x_r(t_1)$ é:

$$\begin{aligned}\eta(0) &= \bar{\Psi}(0, t_1) \left[\eta(t_1) + \int_0^{t_1} \bar{\Psi}(t_1, \tau)Qx_r(\tau) d\tau \right] \\ &= \bar{\Psi}(0, t_1)Q_1x_r(t_1) + \int_0^{t_1} \bar{\Psi}(0, \tau)Qx_r(\tau) d\tau\end{aligned}$$

Note que foi utilizada a seguinte propriedade da matriz de transição:

$$\bar{\Psi}(t_2, t_1)\bar{\Psi}(t_1, t_0) = \bar{\Psi}(t_2, t_0) \quad \Rightarrow \quad \bar{\Psi}(t_0, t_1) = \bar{\Psi}^{-1}(t_1, t_0)$$

* Solução explícita em malha fechada – seguidor LQ

Substituindo a expressão para $\eta(0)$ na expressão para $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \bar{\Psi}(t, t_1) Q_1 x_r(t_1) + \int_0^{t_1} \bar{\Psi}(t, \tau) Q x_r(\tau) d\tau - \int_0^t \bar{\Psi}(t, \tau) Q x_r(\tau) d\tau$$
$$\eta(t) = \bar{\Psi}(t, t_1) Q_1 x_r(t_1) + \int_t^{t_1} \bar{\Psi}(t, \tau) Q x_r(\tau) d\tau$$

A última etapa da dedução de uma expressão explícita para $\eta(t)$ consiste em expressar a matriz de transição $\bar{\Psi}(t, \tau)$, associada a $-\bar{A}^\top(t)$, com a **matriz de transição $\bar{\Phi}(t, \tau)$ do sistema em malha fechada**, associada à matriz $\bar{A}(t)$ e que, por sua vez, satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}(t, \tau) = \bar{A}(t) \bar{\Phi}(t, \tau) \quad \text{com} \quad \bar{\Phi}(\tau, \tau) = I, \quad \forall \tau \in [0, t_1]$$

Tomando a derivada parcial em t da identidade $\bar{\Phi}(t, \tau) \bar{\Phi}(\tau, t) = I$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}(t, \tau) \bar{\Phi}(\tau, t) + \bar{\Phi}(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}(\tau, t) = 0$$

* Solução explícita em malha fechada – seguidor LQ

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}(\tau, t) &= -\bar{\Phi}(\tau, t) \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}(t, \tau) \bar{\Phi}(\tau, t) = -\bar{\Phi}(\tau, t) \bar{A}(t) \bar{\Phi}(t, \tau) \bar{\Phi}(\tau, t) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}(\tau, t) &= -\bar{\Phi}(\tau, t) \bar{A}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}^\top(\tau, t) = -\bar{A}^\top(t) \bar{\Phi}^\top(\tau, t)\end{aligned}$$

Ainda, como $\bar{\Phi}^\top(\tau, \tau) = I$, $\forall \tau \in [0, t_1]$, conclui-se que:

$$\bar{\Psi}(t, \tau) = \bar{\Phi}^\top(\tau, t)$$

Finalmente, para a **dinâmica do seguidor em malha fechada** (supondo **realimentação de estados**), obtém-se:

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \bar{\Phi}^\top(t_1, t) Q_1 \mathbf{x}_r(t_1) + \int_t^{t_1} \bar{\Phi}^\top(\lambda, t) Q \mathbf{x}_r(\lambda) d\lambda \\ \mathbf{x}(t) &= \bar{\Phi}(t, 0) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \bar{\Phi}(t, \tau) B(\tau) R^{-1} B^\top(\tau) \eta(\tau) d\tau\end{aligned}$$

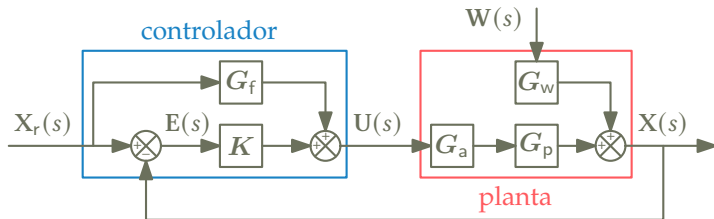
Lei de controle e diagrama de blocos – seguidor LQ

Pode-se definir o erro do seguidor como:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_r(t) - \mathbf{x}(t)$$

Uma vez que $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}$, a lei de controle do seguidor pode ser escrita como:

$$\mathbf{u}(t) = \underbrace{\mathbf{K}(t)\mathbf{e}(t)}_{\text{realimentação}} + \underbrace{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}(t)^\top (\boldsymbol{\eta}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{x}_r(t))}_{\text{pré-alimentação}}$$



Modelos assumidos para variáveis exógenas

Modelos assumidos para variáveis exógenas

Considere um sistema linear invariante no tempo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t)$$

Assuma que tanto o sinal de referência $x_r(t)$ quanto a perturbação $w(t)$ sejam modelados como soluções de equações diferenciais conhecidas:

$$\frac{dx_r(t)}{dt} = A_r x_r(t) \quad \text{e} \quad \frac{dw(t)}{dt} = A_w w(t)$$

Definindo o **erro de acompanhamento** (erro do seguidor) como:

$$e(t) = x_r(t) - x(t)$$

verifica-se que $e(t)$ satisfaz à seguinte EDO:

$$\frac{de(t)}{dt} = Ae(t) - (A - A_r)x_r(t) - Bu(t) - Ew(t)$$

Modelos assumidos para variáveis exógenas

Para simplificar a equação diferencial, defina-se a matriz F e o **vetor de variáveis exógenas** $\mathbf{x}_o(t)$:

$$F = [A - A_r \mid E] \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_o(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = A\mathbf{e}(t) - B\mathbf{u}(t) - F\mathbf{x}_o(t)$$

Proponha-se uma lei de controle da forma:

$$\mathbf{u}(t) = K\mathbf{e}(t) - G\mathbf{x}_o(t)$$

o que faz com que a **dinâmica do erro de acompanhamento em malha fechada** seja:

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = (A - BK)\mathbf{e}(t) - (F - BG)\mathbf{x}_o(t) = \bar{A}\mathbf{e}(t) - (F - BG)\mathbf{x}_o(t)$$

Modelos assumidos para variáveis exógenas

Note que, em **regime permanente**, ou seja, com $\frac{de(t)}{dt} = 0$, o valor do erro de acompanhamento é:

$$\bar{A}\mathbf{e} = (\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} = \bar{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{x}_0$$

Seria ideal se fosse possível tornar nulo o valor do erro em regime permanente *qualquer seja* o valor em regime permanente das variáveis exógenas, ou seja, escolher $\mathbf{G}$ tal que $\bar{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{G}) = \mathbf{0}$. No entanto, em geral, isto não é possível. Busquemos então uma matriz $\mathbf{M}$ que torne, em **regime permanente**:

$$\mathbf{M}\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Isto será verdadeiro para todo $\mathbf{x}_0$ se:

$$\mathbf{M}\bar{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{G}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}\bar{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{M}\bar{A}^{-1}\mathbf{F}$$

Modelos assumidos para variáveis exógenas

Para obter uma solução fechada para G é necessário que a matriz $M\bar{A}^{-1}B$ seja invertível. Isto requer, em primeiro lugar, que ela seja quadrada, ou seja, $M \in \mathbb{R}^{r \times n}$. Em outras palavras, **dispondo de r atuadores é possível seguir com erro nulo em regime permanente somente r sinais de referência**. Conclui-se, portanto, que:

$$G = NF \quad \text{com} \quad N = \left[M\bar{A}^{-1}B \right]^{-1} M\bar{A}^{-1}$$

Assim, a lei de controle do seguidor se torna:

$$u(t) = Ke(t) - NFx_o(t) = Ke(t) - N(A - A_r)x_r(t) - NEw(t)$$

e a **dinâmica do erro de acompanhamento** se torna:

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= \bar{A}e(t) - (I - BN)Fx_o(t) \\ \frac{de(t)}{dt} &= \bar{A}e(t) - (I - BN) \left[(A - A_r)x_r(t) + Ew(t) \right] \end{aligned}$$

*Ação integral em realimentação

*Ação integral em realimentação

Admita que se queira propor uma lei de controle com ganho integral em realimentação da forma:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{e}(t) + \mathbf{K}_i\mathbf{e}_i(t) - \mathbf{G}\mathbf{x}_o(t)$$

com $\mathbf{e}_i(t)$ sendo definida como a integral de uma combinação linear de componentes de $\mathbf{e}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{e}_i(t)}{dt} = \mathbf{C}_i\mathbf{e}(t) = \mathbf{C}_i(\mathbf{x}_r(t) - \mathbf{x}(t))$$

Neste caso, as variáveis $\mathbf{e}_i(t)$ assim definidas constituem, juntamente a $\mathbf{x}(t)$ um vetor de estados aumentado $\mathbf{x}_a(t)$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}_i(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_a} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}_i(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_a(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_a} \mathbf{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_a} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{C}_i\mathbf{x}_r(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_a(t)}$$

*Ação integral em realimentação

Assim, pode-se escrever a equação diferencial do sistema na forma:

$$\frac{dx_a(t)}{dt} = A_a x_a(t) + B_a u(t) + E_a w_a(t)$$

Pode-se então formular o [problema de acompanhamento de referências](#) para esta planta aumentada tomando $x_r(t)$ como referência para $x(t)$ e zero como referência para $e_i(t)$. Para que o problema tenha solução, no entanto, é necessário que o par (A_a, B_a) seja [controlável](#), o que limita as possibilidades de escolha para a matriz C_i . A dinâmica da planta aumentada em malha fechada é dada pela matriz de estados $\bar{A}_a = A_a - B_a K_a$ em que a matriz de ganhos K_a é:

$$K_a = [K \mid -K_i]$$

ou seja, a lei de controle pode ser reescrita como:

$$u(t) = -K_a x_a(t) + K x_r(t) - G x_o(t)$$

Neste caso, $x_o(t)$ deve incluir tanto $x_r(t)$ quanto $w_a(t)$ (em vez de $w(t)$).