



Controle e Aplicações

Síntese de reguladores por alocação de polos
Regulador Linear-Quadrático (LQR)

Renato Maia Matarazzo Orsino
reorsino@usp.br



Conteúdo

1 Síntese de reguladores por alocação de polos

- Alocação de polos por realimentação de estados
- Caso SISO/SIMO: solução de Bass-Gura

2 Estabilidade segundo Lyapunov

- Método direto de Lyapunov
- Estabilidade de um SLIT

3 Regulador Linear-Quadrático (LQR)

Síntese de reguladores por alocação de polos

Estrutura admitida para o modelo linear

Admita a seguinte estrutura simplificada para a representação de um **modelo linear na forma de espaço de estados**:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Por ora, será desprezado o efeito de perturbações e ruído de medição e não haverá um canal direto da entrada $\mathbf{u}(t)$ para as medidas $\mathbf{y}(t)$.

Existe uma **matriz de transição de estados** $\Phi(t, \tau)$ tal que:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Em particular, *se $\mathbf{A}$ for invariante no tempo*, então:

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t - \tau) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \dots$$

Controlabilidade

Um sistema dinâmico é **controlável** se, e somente se, partindo de **qualquer condição inicial** $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ for possível **atingir qualquer outro estado** $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ em um **intervalo de tempo finito** $[t_0, t_1]$, por meio da especificação, neste intervalo, do **vetor de entradas de controle** $\mathbf{u}(t)$.

Provou-se que existe uma solução $\mathbf{u}(t)$ da forma:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^\top(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t) \mathbf{P}^{-1}(t_1, t_0) [\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0)], \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

se, e somente se, o *gramiano de controlabilidade*:

$$\mathbf{P}(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}(t_1, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^\top(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t) dt$$

for uma **matriz invertível** (não-singular).

Teste algébrico de controlabilidade para um SLIT

Um sistema linear invariante no tempo com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade $Q \in \mathbb{R}^{n \times nr}$:

$$Q = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

tiver posto n (completo). Em outras palavras, as colunas de Q devem ser um conjunto gerador do $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $\xi^\top Q = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$.

O posto de uma matriz é a dimensão do espaço vetorial gerado por suas colunas. O posto de uma matriz é o mesmo posto de sua transposta.

Em particular para um sistema SISO/SIMO, a entrada u é um escalar e, portanto, $B = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$Q = [\mathbf{b} \mid A\mathbf{b} \mid \dots \mid A^{n-1}\mathbf{b}]$$

Assim, um sistema SISO/SIMO será controlável se, e somente se, Q for uma matriz invertível (não-singular).

Alocação de polos por realimentação de estados

Para um sistema linear controlável existirá uma matriz $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$ tal que, adotando uma lei de controle baseada em realimentação de estados da forma:

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$$

é possível escolher a localização de todos os n polos do sistema em malha fechada, que será regido pela equação:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} = (A - BK)\mathbf{x} = \bar{A}\mathbf{x}$$

Dados os n autovalores desejados para a matriz de estados $\bar{A}$ do sistema em malha fechada, haverá $r \times n$ elementos da matriz K a determinar.

Em outras palavras, há uma solução única para o caso SISO/SIMO ($r = 1$) e múltiplas soluções possíveis para os casos MISO/MIMO ($r > 1$).

Alocação de polos por realimentação de estados

Os polinômios característicos das matrizes de estado em malha aberta A e em malha fechada $\bar{A} = A - BK$ são, respectivamente:

$$p(s) = \det(sI - A) = \prod_{j=1}^n (s - p_j) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n s^0 = 0$$

$$\bar{p}(s) = \det(sI - \bar{A}) = \prod_{j=1}^n (s - \bar{p}_j) = s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{a}_n s^0 = 0$$

onde $p_j, j = 1, \dots, n$, são os polos em malha aberta e $\bar{p}_j, j = 1, \dots, n$, são os polos que o projetista escolheu para o sistema em malha fechada. Para a estabilidade do sistema em malha fechada é necessário que:

$$\operatorname{Re}(\bar{p}_i) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Via de regra, no entanto, quanto **mais distantes os polos em malha fechada estiverem dos polos em malha aberta**, maiores serão os módulos dos elementos da matriz de ganhos K e, consequentemente, **maiores serão os módulos dos esforços de controle** $u = -Kx$.

Caso SISO/SIMO: solução de Bass-Gura

Para um sistema SISO/SIMO, $B = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $K = \mathbf{k}^\top \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e:

$$\bar{A} = A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$$

Definindo os vetores $\mathbf{a}$ e $\bar{\mathbf{a}}$, formados pelos coeficientes dos polinômios característicos $p(s)$ (MA) e $\bar{p}(s)$ (MF), respectivamente, e a matrix Toeplitz triangular W , baseada nos coeficientes de $p(s)$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz $\mathbf{k}$ que resolve o problema de [alocação de polos](#) é dada por:

$$\mathbf{k} = \left[(QW)^{-1} \right]^\top (\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a})$$

onde $Q = [\mathbf{b} \mid A\mathbf{b} \mid \dots \mid A^{n-1}\mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a [matriz de controlabilidade](#).

Matrizes companheiras de um polinômio

Dado o polinômio característico $p(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_ns^0 = 0$, definem-se as matrizes companheiras $A_{\textcircled{1}}$ e $A_{\textcircled{2}}$:

$$A_{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Matrizes companheiras de um polinômio

As matrizes companheiras do polinômio característico $p(s)$ satisfazem às identidades envolvendo as matrizes A , Q e W :

$$WA_{\textcircled{1}} = A_{\textcircled{2}}W \quad \text{e} \quad QA_{\textcircled{2}} = AQ$$

A segunda identidade decorre do [teorema de Cayley-Hamilton](#) $p(A) = 0$:

$$\begin{aligned} QA_{\textcircled{2}} &= [\mathbf{b} \quad A\mathbf{b} \quad \dots \quad A^{n-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \\ &= [A\mathbf{b} \quad A^2\mathbf{b} \quad \dots \quad (-a_n I - a_{n-1}A - \dots - a_1 A^{n-1})\mathbf{b}] \\ &= [A\mathbf{b} \quad A^2\mathbf{b} \quad \dots \quad A^n\mathbf{b}] = AQ \end{aligned}$$

Assim, $A_{\textcircled{1}} = W^{-1}A_{\textcircled{2}}W$ e $A_{\textcircled{2}} = Q^{-1}AQ$, de onde se identifica a matriz de transformação $T = (QW)^{-1}$ tal que:

$$A_{\textcircled{1}} = W^{-1}A_{\textcircled{2}}W = W^{-1}Q^{-1}AQW = TAT^{-1}$$

Forma canônica controlável de sistemas SISO/SIMO

Definindo $\mathbf{b}_{\textcircled{1}} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^\top$ e notando que $\mathbf{b}_{\textcircled{1}} = T\mathbf{b} = (QW)^{-1}\mathbf{b}$:

$$T^{-1}\mathbf{b}_{\textcircled{1}} = [\mathbf{b} \ A\mathbf{b} \ \dots \ A^{n-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

pode-se adotar a mudança de variáveis $\mathbf{z} = T\mathbf{x} = (QW)^{-1}\mathbf{x}$ tal que:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A_{\textcircled{1}}\mathbf{z} + \mathbf{b}_{\textcircled{1}}u$$

A expressão das equações dinâmicas de um sistema linear SISO/SIMO em termos das variáveis de estado $\mathbf{z}$ que transforma a matriz de estados na primeira forma companheira do polinômio característico de malha aberta $p(s)$ é denominada **forma canônica controlável**.

Demonstração da solução de Bass-Gura

Adote-se a lei de controle $u = -\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{z}$ com $\boldsymbol{\delta}^\top = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n]$:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}_{\textcircled{1}}\mathbf{z} + \mathbf{b}_{\textcircled{1}}u = \left(\mathbf{A}_{\textcircled{1}} - \mathbf{b}_{\textcircled{1}}\boldsymbol{\delta}^\top\right)\mathbf{z} = \bar{\mathbf{A}}_{\textcircled{1}}\mathbf{z} \quad \text{com} \quad \bar{\mathbf{A}}_{\textcircled{1}} = \mathbf{A}_{\textcircled{1}} - \mathbf{b}_{\textcircled{1}}\boldsymbol{\delta}^\top$$
$$\bar{\mathbf{A}}_{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} -(a_1 + \delta_1) & -(a_2 + \delta_2) & \dots & -(a_{n-1} + \delta_{n-1}) & -(a_n + \delta_n) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notando que a matriz $\bar{\mathbf{A}}_{\textcircled{1}}$ é companheira do [polinômio característico de malha fechada](#) $\bar{p}(s)$ de tal forma que $a_i + \delta_i = \bar{a}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, então:

$$u = -\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{z} = -\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{T}\mathbf{x} = -(\mathbf{T}^\top \boldsymbol{\delta})^\top \mathbf{x} = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x}$$

com $\mathbf{k} = \mathbf{T}^\top \boldsymbol{\delta}$, $\mathbf{T} = (\mathbf{Q}\mathbf{W})^{-1}$ e $\boldsymbol{\delta} = \bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$, o que demonstra a solução:

$$\mathbf{k} = [(\mathbf{Q}\mathbf{W})^{-1}]^\top (\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a})$$

Estabilidade segundo Lyapunov

Estabilidade segundo Lyapunov

Seja um **modelo autônomo, linear ou não-linear**, expresso pela EDO:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

Admitindo que $\bar{x}$ seja um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$ então:

- $\bar{x}$ é um **ponto de equilíbrio estável** segundo Lyapunov se, para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que, se $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, então, para todo $t > t_0$, $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$.
- $\bar{x}$ é um **ponto de equilíbrio assintoticamente estável** se for estável segundo Lyapunov e existir um $\delta > 0$ tal que, se $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$.
- $\bar{x}$ é um **ponto de equilíbrio exponencialmente estável** se for assintoticamente estável e existirem constantes positivas α , β e δ tais que, se $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, para todo $t > t_0$, $\|x(t) - \bar{x}\| < \alpha \|x_0 - \bar{x}\| e^{-\beta t}$.

Método direto de Lyapunov

Para um sistema dinâmico autônomo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

que tenha um **ponto de equilíbrio em $x = 0$** , admita que existe uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (ou seja, a valores reais) tal que:

- $V(0) = 0$;
- $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$;
- $\frac{dV(x(t))}{dt} = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ para todo $x \neq 0$;

então $x = 0$ é um **ponto de equilíbrio estável segundo Lyapunov**.

Ainda, se for possível garantir que $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, então $x = 0$ é um **ponto de equilíbrio assintoticamente estável**.

Estabilidade de um SLIT

Considere um **sistema linear invariante no tempo** (SLIT) da forma:

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Para provar que a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é **um ponto de equilíbrio assintoticamente estável**, basta encontrar um par de matrizes $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ **definidas positivas** (ou seja, $\mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{x} > 0$ e $\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) que satisfaçam à **equação de Lyapunov**:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

Neste caso, basta adotar:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{x}$$

Por definição, $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Ainda:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{x}] = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = -\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} < 0$$

Regulador Linear-Quadrático (LQR)

Por que usar técnicas de otimização na síntese de um controlador?

Considere **sistema linear** munido de uma **lei de controle por realimentação de estados** da forma:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Se o sistema for **controlável**, é possível escolher uma matrix $\mathbf{K}$ que seja capaz de **alocar os polos em malha fechada** em qualquer posição definida pelo projetista.

Via de regra, quanto **mais distantes os polos em malha fechada estiverem dos polos em malha aberta**, maiores serão os módulos dos elementos da matriz de ganhos $\mathbf{K}$ e, consequentemente, **maiores serão os módulos dos esforços de controle**. Uma má alocação dos polos em MF pode levar a:

- um **consumo excessivo** de energia;
- um **superdimensionamento** dos atuadores necessários para controlar o sistema;
- ocorrência frequente de **saturação** dos atuadores durante a operação regular do sistema.

Por que usar técnicas de otimização na síntese de um controlador?

Ainda, na presença de **mais de uma entrada de controle**, há **múltiplas soluções** para os elementos de K que levam a uma **mesma alocação de polos**. Qual das soluções escolher visando evitar os problemas citados?

E se, em vez de obter K por meio da alocação dos polos para o sistema em malha fechada, **o regulador linear por realimentação de estados** $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ pudesse ser obtido por meio da solução de um problema de otimização que garantisse:

- que a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja um **ponto de equilíbrio assintoticamente estável** para o sistema em **malha fechada**;
- que **esforços elevados de controle** sejam **penalizados**;
- que um **desempenho ruim** (i.e., distância média para a origem elevada e/ou tempo elevado para que o estado do sistema em malha fechada convirja para a origem) seja **penalizado**.

Índice de desempenho quadrático

O **regulador linear quadrático** (LQR) é um **o regulador linear por realimentação de estados** $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ obtido por meio do problema de **minimização do índice de desempenho quadrático** J :

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^{\top} \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^{\top} \mathbf{R} \mathbf{u}] dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^{\top} (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^{\top} \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt$$

com $\mathbf{Q}$ sendo uma **matriz simétrica e semi-definida positiva** e $\mathbf{R}$ sendo uma **matriz simétrica e definida positiva**, ou seja:

$$\mathbf{x}^{\top} \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}^{\top} \mathbf{R} \mathbf{u} > 0, \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

Se a ocorrência simultânea de $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$, a matriz $(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^{\top} \mathbf{R} \mathbf{K})$ será **simétrica e definida positiva**, uma vez que:

$$\mathbf{x}^{\top} (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^{\top} \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^{\top} \mathbf{Q} \mathbf{x} + (-\mathbf{K}\mathbf{x})^{\top} \mathbf{R} (-\mathbf{K}\mathbf{x}) > 0$$

Note que:

- $\|\mathbf{Q}\| \gg \|\mathbf{R}\|$ prioriza **penalizar um desempenho ruim** do controlador;
- $\|\mathbf{R}\| \gg \|\mathbf{Q}\|$ prioriza **penalizar esforços elevados** de controle.

Síntese de um regulador linear quadrático (LQR)

Sendo a matriz $(Q + K^T RK)$ **simétrica e definida positiva**, para garantir que, **em malha fechada a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável**, basta encontrar uma matriz P definida positiva que satisfaça à **equação de Lyapunov**:

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} = - (Q + K^T RK) \quad \text{com} \quad \bar{A} = A - BK$$

Neste caso, para provar a **estabilidade assintótica, em malha fechada, da origem** pelo **método direto de Lyapunov**, basta tomar:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$$

Por definição, $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Ainda:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{x}^T P \mathbf{x}] = \mathbf{x}^T \bar{A}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \bar{A} \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T (Q + K^T RK) \mathbf{x} < 0$$

o que conclui a verificação do conjunto de condições necessárias para a estabilidade assintótica desejada.

Síntese de um regulador linear quadrático (LQR)

Nestas condições, o **índice de desempenho quadrático** se torna:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^{\top} \left(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^{\top} \mathbf{R} \mathbf{K} \right) \mathbf{x} \, dt = - \int_0^{\infty} \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \, dt = V(\mathbf{x}(0)) - \lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t))$$

O objetivo do regulador é que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ conforme $t \rightarrow \infty$. Assim, $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t)) = 0$ e:

$$J = V(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}_0^{\top} \mathbf{P} \mathbf{x}_0$$

Seja $\mathbf{P}$ a matriz **simétrica e definida positiva** que **minimiza** J .

Para que o valor de J seja estacionário, ou seja, $\delta J = 0$, o que é condição necessária neste ponto de mínimo:

$$\delta J = \mathbf{x}_0^{\top} (\mathbf{P} + \delta \mathbf{P}) \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^{\top} \mathbf{P} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^{\top} \delta \mathbf{P} \mathbf{x}_0 = 0, \forall \mathbf{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

Em outras palavras, a matriz $\mathbf{P}$ que **minimiza o índice de desempenho quadrático** J também deve ter seu valor estacionário.

Síntese de um regulador linear quadrático (LQR)

O **valor estacionário da matriz P** estará garantida se a **equação de Lyapunov** permanecer verdadeira mantido o valor de P e tomando uma variação infinitesimal δK para a matriz de ganho:

$$\begin{aligned}[A - B(K + \delta K)]^\top P + P[A - B(K + \delta K)] &= -Q - (K + \delta K)^\top R(K + \delta K) \\ \Rightarrow -\delta K^\top B^\top P - PB \delta K &= -\delta K^\top R K - K^\top R \delta K\end{aligned}$$

Esta última equação será verdadeira se for válida a identidade:

$$B^\top P = RK \quad \Leftrightarrow \quad K = R^{-1} B^\top P$$

Substituindo esta última identidade na **equação de Lyapunov**, e considerando a simetria das matrizes P e R , obtém-se:

$$[A - BR^{-1}B^\top P]^\top P + P[A - BR^{-1}B^\top P] = -Q - (R^{-1}B^\top P)^\top B^\top P$$

$$A^\top P + PA - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0$$

que é a **equação algébrica de Riccati** (ARE) para a determinação de P .

LQR para horizonte de tempo finito

Alternativamente, o **regulador linear quadrático** (LQR) pode ser obtido por meio do problema de **minimização de um índice de desempenho quadrático J para um horizonte de tempo finito**:

$$J = \int_0^{t_1} \left[\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right] dt + \mathbf{x}(t_1)^\top \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(t_1)$$

com $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}_1$ sendo **matrizes simétricas e semi-definidas positivas** e $\mathbf{R}$ sendo uma **matriz simétrica e definida positiva**.

Neste caso, o ganho $\mathbf{K}$ da **lei de controle linear por realimentação de estados** $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ é dado pela expressão:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}(t)$$

com $\mathbf{P}(t)$ correspondendo à solução da **equação diferencial de Riccati**:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \mathbf{Q} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \text{com} \quad \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{Q}_1$$