



Controle e Aplicações

Introdução ao Controle Moderno

Forma de espaço de estados

Controlabilidade e Observabilidade

Renato Maia Matarazzo Orsino

reorsino@usp.br



Conteúdo

1 Forma de espaço de estados

- Equações de movimento de um sistema dinâmico
- Estado de um sistema dinâmico
- Forma de espaço de estados

2 Sistemas dinâmicos lineares

- Estados de equilíbrio de um modelo não-linear
- Linearização em torno de um estado de equilíbrio
- Resposta de sistemas lineares

3 Controlabilidade e Observabilidade

- Controlabilidade
- Teste algébrico de controlabilidade para um SLIT
- Observabilidade
- Teste algébrico de observabilidade para um SLIT

Forma de espaço de estados

Equações de movimento de um sistema dinâmico

As equações de movimento de um sistema dinâmico são usualmente escritas na forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{q}, \mathbf{v}; \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{M}(t, \mathbf{q}; \boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}; \boldsymbol{\theta}) \end{cases}$$

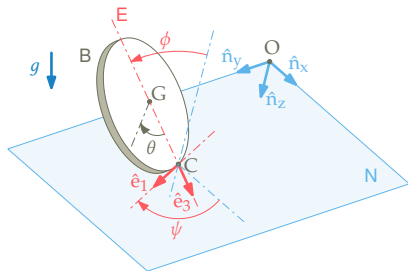
onde identificamos:

- t : variável de tempo;
- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{\mu}$: vetor de **coordenadas generalizadas**;
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\nu}$: vetor de **quasi-velocidades** (caso $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$, dizemos que $\mathbf{v}$ é um vetor de velocidades generalizadas);
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$: vetor de **entradas de controle**;
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^l$: vetor de **entradas de distúrbio**;
- $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$: vetor de **parâmetros** do modelo;
- $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{\mu}$: relação cinemática (*transformação de variáveis*) entre $\dot{\mathbf{q}}$ e $\mathbf{v}$;
- $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$: matriz de **inércia generalizada**;
- $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{\nu}$: vetor de **forças generalizadas**.

Modelo de roda de bicicleta: disco de bordo esbelto

Equações de movimento:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -r(\omega_2 - \omega_3 \tan \phi) \cos \psi \\ -r(\omega_2 - \omega_3 \tan \phi) \sin \psi \\ \omega_3 \sec \phi \\ \omega_1 \\ \omega_2 - \omega_3 \tan \phi \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{v}; \boldsymbol{\theta})}$$



Fonte: Orsino (2020)

$$\underbrace{mr^2 \begin{bmatrix} i+1 & 0 & 0 \\ 0 & j+1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(:, \boldsymbol{\theta})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{v}}} = mr^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{g}{r} \sin \phi + (j+1)\omega_2\omega_3 - i\omega_3^2 \tan \phi \\ -\omega_1\omega_3 \\ i\omega_1\omega_3 \tan \phi - j\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}; \boldsymbol{\theta})}$$

com $\mathbf{q} = (x, y, \psi, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^5$, $\mathbf{v} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{\theta} = (r, g, i, j, m) \in \mathbb{R}^5$.

Modelo de bicicleta de Whipple

Modelo **linearizado** em torno de uma solução em **regime permanente** na qual a **bicicleta translada em linha reta com velocidade v constante** (Meijaard *et al.*, 2007):

$$M\ddot{\mathbf{q}} = -v\mathbf{C}_1\dot{\mathbf{q}} - (g\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2)\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}$$

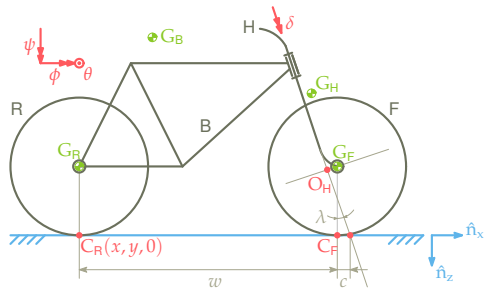
com $\mathbf{q} = (\phi, \delta) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = \tau_\delta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{w} = \tau_\phi \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta} = v \in \mathbb{R}$,
 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_\phi, \tau_\delta)$ e:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 80.82 & 2.319 \\ 2.319 & 0.2978 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} -80.95 & -2.600 \\ -2.600 & -0.8033 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 76.60 \\ 0 & 2.654 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 33.87 \\ -0.8504 & 1.685 \end{bmatrix}$$



Fonte: adaptado de Meijaard *et al.* (2007)

Estado de um sistema dinâmico

Menor conjunto de variáveis cujo conhecimento em um dado instante de tempo t_0 , juntamente ao conhecimento da entrada $\mathbf{u}(t)$ para $t \geq t_0$, determina completamente a resposta do sistema para $t \geq t_0$.

Certas coordenadas generalizadas podem não estar presentes nas equações dinâmicas. Assim, particiona-se o vetor $\mathbf{q}$ na forma:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^* \\ \mathbf{q}^\circ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{coordenadas generalizadas presentes nas equações dinâmicas} \\ \text{coordenadas generalizadas ausentes nas equações dinâmicas} \end{array}$$

A definição canônica para o vetor de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, obtida diretamente a partir das equações de movimento do modelo é dada por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^* \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

Dada qualquer transformação invertível $\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{z} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ também é uma definição válida para o vetor de estados.

Modelos na forma de espaço de estados

Dizemos que um modelo está na **forma de espaço de estados** quando suas equações encontram-se expressas como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}; \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}; \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v} \end{cases}$$

onde identificamos:

- t : variável de tempo;
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: vetor de **estados**;
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$: vetor de **entradas de controle**;
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^l$: vetor de **entradas de distúrbio**;
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$: vetor de **saídas/observações/medições**;
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$: vetor de **ruídos de medição**;
- $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$: vetor de **parâmetros**.

A definição do vetor de observações $\mathbf{y}$ decorre do fato de **nem sempre ser possível, tampouco necessário**, medir todas as variáveis que definem o estado de um sistema.

Modelos lineares na forma de espaço de estados

O modelo será **linear** se for possível definir um vetor de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ em que a forma de espaço de estados seja expressa como:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t; \boldsymbol{\theta})\mathbf{x} + \mathbf{B}(t; \boldsymbol{\theta})\mathbf{u} + \mathbf{E}(t; \boldsymbol{\theta})\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t; \boldsymbol{\theta})\mathbf{x} + \mathbf{D}(t; \boldsymbol{\theta})\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

onde identificamos:

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matriz de **estados**;
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$: matriz de **entradas de controle**;
- $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times l}$: matriz de **entradas de distúrbio**;
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: matriz de **observações**;
- $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$.

Caso nenhuma das matrizes dependa explicitamente do tempo, dizemos que se trata de um **sistema linear invariante no tempo (SLIT)**.

Modelo de bicicleta de Whipple

Para o modelo de Whipple, adotando $\mathbf{x} = (\phi, \delta, \dot{\phi}, \dot{\delta}) \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{u} = \tau_\delta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{w} = \tau_\phi \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{y} = \phi \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

com:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.489 & -0.8912v^2 - 0.5715 & -0.1055v & -0.3305v \\ 11.72 & 30.91 - 1.972v^2 & 3.677v & -3.085v \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1241 \\ 4.324 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0159 \\ -0.1241 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{D} = 0$$

Sistemas dinâmicos lineares

Estados de equilíbrio de um modelo não-linear

Considere um modelo matemático não-linear e invariante no tempo expresso na forma de espaço de estados:

$$\begin{cases} \frac{dx_n}{dt} = f(x_n, u_n, w_n; \theta) \\ y_n = h(x_n, u_n; \theta) + v \end{cases}$$

Um estado de equilíbrio dinâmico (também conhecido como solução em regime permanente) associado às entrada $u_n = \bar{u}$ e $w_n = \bar{w}$ constantes, é um estado $x_n = \bar{x}(\bar{u}, \bar{w}; \theta)$ também constante tal que:

$$f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{w}; \theta) = 0$$

O modelo linearizado será descrito em termos de variáveis incrementais (denotadas sem índice: x, u, w, y), definidas como:

$$x = x_n - \bar{x}, \quad u = u_n - \bar{u}, \quad w = w_n - \bar{w}, \quad y = y_n - \bar{y}$$

Linearização em torno de um estado de equilíbrio

As equações de movimento linearizadas do sistema descrevem a dinâmica de soluções que ocorrem no entorno de $\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{w}}$:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

em que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são matrizes jacobianas definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\substack{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{w}}}} & \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}_n} \right|_{\substack{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{w}}}} & \quad \mathbf{E} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}_n} \right|_{\substack{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{w}}}} \\ \mathbf{C} &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\substack{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{w}}}} & \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}_n} \right|_{\substack{\mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_n = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{w}}}} \end{aligned}$$

FTs e resposta dinâmica de um SLIT

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Ew \\ y = Cx + Du + v \end{cases}$$

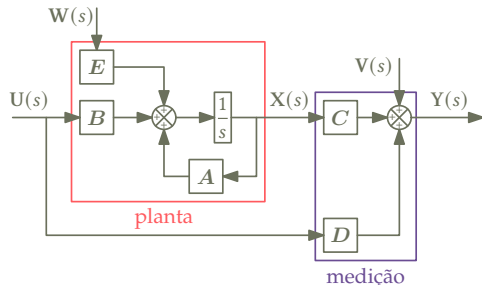
$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) + EW(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) + V(s) \end{cases}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} [BU(s) + EW(s) + x(0)]$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) + C(sI - A)^{-1} [EW(s) + x(0)] + V(s)$$

Utilizando a [transformada inversa de Laplace](#) e definindo a [matriz de transição de estados](#) $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}](t) = e^{At}$:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \underbrace{\int_0^t \Phi(t - \tau) [Bu(\tau) + Ew(\tau)] d\tau}_{\text{integral de convolução}}$$



Resposta dinâmica de modelos lineares gerais

Para **qualquer** modelo matemático **linear**:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + E(t)w(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) + v(t) \end{cases}$$

existe uma **matriz de transição de estados** $\Phi(t, \tau)$ tal que:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) [B(\tau)u(\tau) + E(\tau)w(\tau)] d\tau$$

Em particular, se **A** for **invariante no tempo**, então: $\Phi(t, \tau) = \Phi(t - \tau) = e^{A(t-\tau)}$

A origem $x = 0$ será um ponto de equilíbrio:

- **instável** se $\text{Re}(\lambda) > 0$ para **algum autovalor** λ de **A**;
- **estável** se $\text{Re}(\lambda) < 0$ para **toda autovalor** λ de **A**.

Mudança de variáveis

Considere uma mudança de variáveis de estados definida por uma transformação linear baseada na matriz invertível T constante:

$$\mathbf{z} = T\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{z}$$

Sustituindo a transformação nas equações do modelo:

$$\begin{cases} T^{-1} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = AT^{-1}\mathbf{z} + B\mathbf{u} + E\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = CT^{-1}\mathbf{z} + D\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \bar{A}\mathbf{z} + \bar{B}\mathbf{u} + \bar{E}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \bar{C}\mathbf{z} + D\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

com:

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{E} = TE \quad \text{e} \quad \bar{C} = CT^{-1}$$

Note ainda que, para um SLIT:

$$\bar{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - \bar{A})^{-1}](t) = T\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}](t)T^{-1} = T\Phi(t)T^{-1}$$

de onde se verifica que [as funções de transferência do sistema são invariantes a uma mudança de variáveis de estado.](#)

Controlabilidade e Observabilidade

Estrutura admitida para o modelo linear

Admita a seguinte estrutura simplificada para a representação de um **modelo linear na forma de espaço de estados**:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Por ora, será desprezado o efeito de perturbações e ruído de medição e não haverá um canal direto da entrada $\mathbf{u}(t)$ para as medidas $\mathbf{y}(t)$.

Vimos que existe uma **matriz de transição de estados** $\Phi(t, \tau)$ tal que:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Em particular, *se $\mathbf{A}$ for invariante no tempo*, então:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tau) &= \Phi(t - \tau) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \\ e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \dots \end{aligned}$$

Controlabilidade

Um sistema dinâmico é **controlável** se, e somente se, partindo de **qualquer condição inicial** $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ for possível **atingir qualquer outro estado** $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ em um **intervalo de tempo finito** $[t_0, t_1]$, por meio da especificação, neste intervalo, do **vetor de entradas de controle** $\mathbf{u}(t)$.

Sabendo que $\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) dt = \mathbf{x}(t_1) - \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0)$, pode-se buscar para $\mathbf{u}(t)$ uma solução da forma:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^\top(t) \Phi^\top(t_1, t) \mathbf{P}^{-1}(t_1, t_0) [\mathbf{x}(t_1) - \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0)], \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Substituindo na equação anterior:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^\top(t) \Phi^\top(t_1, t) dt \right\} \mathbf{P}^{-1}(t_1, t_0) [\mathbf{x}(t_1) - \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0)] \\ = \mathbf{x}(t_1) - \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0) \end{aligned}$$

Controlabilidade

Teorema: um sistema linear será **controlável** se, e somente se, para algum instante de tempo $t_1 > t_0$ o **gramiano de controlabilidade**:

$$\mathbf{P}(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}(t_1, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^\top(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t) dt$$

for uma **matriz invertível** (não-singular).

Supondo que $\mathbf{P}(t_1, t_0)$ seja singular, existe um vetor $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{P}(t_1, t_0) \boldsymbol{\xi} = 0 &\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\Phi}(t_1, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^\top(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t) \boldsymbol{\xi} dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left[\mathbf{B}^\top(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t) \boldsymbol{\xi} \right]^\top \left[\mathbf{B}^\top(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t) \boldsymbol{\xi} \right] dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{z}(t) = \mathbf{B}^\top(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t) \boldsymbol{\xi} \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

uma vez que $\mathbf{z}^\top \mathbf{z} = \|\mathbf{z}\|^2$ e $\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{z}\|^2 dt = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z}(t) \equiv 0, \forall t \in [t_0, t_1]$.

Controlabilidade

Assim, supondo que se deseje sair de $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ e chegar a um estado $\mathbf{x}(t_1) = c\boldsymbol{\xi}$ para algum $c \neq 0$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}(t_1, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) dt = c\boldsymbol{\xi}$$

Pré-multiplicando a equação por $\boldsymbol{\xi}^\top$:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\Phi}(t_1, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) dt &= c\boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{\xi} \\ \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{z}^\top(t) \mathbf{u}(t) dt &= c\|\boldsymbol{\xi}\|^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = c\|\boldsymbol{\xi}\|^2 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \end{aligned}$$

Neste caso (se $\mathbf{P}(t_1, t_0)$ for singular), partindo da origem é impossível atingir, em um intervalo de tempo finito, usando as entradas de controle disponíveis, qualquer estado da forma $c\boldsymbol{\xi}$, $c \neq 0$; ou seja, o sistema é não-controlável.

Teste algébrico de controlabilidade para um SLIT

Um sistema linear invariante no tempo com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade $Q \in \mathbb{R}^{n \times nr}$:

$$Q = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

tiver posto n (completo). Em outras palavras, as colunas de Q devem ser um conjunto gerador do $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $\xi^\top Q = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$.

O posto de uma matriz é a dimensão do espaço vetorial gerado por suas colunas. O posto de uma matriz é o mesmo posto de sua transposta.

Voltando ao teorema da controlabilidade, se $P(t_1, t_0)$ é não-singular, então $\xi^\top P(t_1, t_0) \xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$. Vimos que:

$$\xi^\top P(t_1, t_0) \xi = \int_{t_0}^{t_1} z^\top(t) z(t) dt \quad \text{com} \quad z^\top(t) = \xi^\top \Phi(t_1, t) B$$

Em outras palavras, para que o sistema seja controlável basta provar que $z(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \xi = 0$.

Teste algébrico de controlabilidade para um SLIT

Notando que, para um SLIT, $\Phi(t_1, t) = \Phi(t_1 - t) = e^{A(t_1 - t)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^\top(t) &= \boldsymbol{\xi}^\top e^{A(t_1 - t)} \mathbf{B} \\ &= \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{B} + \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{A} \mathbf{B} (t_1 - t) + \dots + \frac{1}{k!} \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} (t_1 - t)^{k-1} + \dots \end{aligned}$$

Toda matriz quadrada $\mathbf{A}$ satisfaz ao próprio polinômio característico ([teorema de Cayley-Hamilton](#)):

$$p(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n s^0 = 0$$

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_n \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Decorre assim que $\mathbf{A}^k$, $k \geq n$, é gerada por $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\}$.

Assim, cada uma das colunas de uma matriz da forma $\mathbf{A}^k \mathbf{B}$, $k \geq 0$, pode ser construída como combinação linear das colunas de $\mathbf{Q}$.

Portanto, se $\mathbf{Q}$ tem [posto completo](#), o sistema é [controlável](#), uma vez que:

$$\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\xi}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$$

Observabilidade

Um sistema dinâmico **não-forçado** é **observável** se, e somente se, for possível determinar **qualquer condição inicial** $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ a partir do registro em um **intervalo de tempo finito** $[t_0, t_1]$ do **vetor de saídas** $\mathbf{y}(t)$.

Notando que:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

propõe-se o cálculo da integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0) \mathbf{C}^\top(t) \mathbf{y}(t) dt = \underbrace{\left\{ \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0) \mathbf{C}^\top(t) \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) dt \right\}}_{\mathbf{M}(t_1, t_0)} \mathbf{x}(t_0)$$

e, caso exista $t_1 > t_0$ tal que $\mathbf{M}(t_1, t_0)$ seja invertível:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{M}^{-1}(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0) \mathbf{C}^\top(t) \mathbf{y}(t) dt$$

Observabilidade

Teorema: um sistema linear será **observável** se, e somente se, para algum instante de tempo $t_1 > t_0$ o *gramiano de observabilidade*:

$$\mathbf{M}(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0) \mathbf{C}^\top(t) \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) dt$$

for uma **matriz invertível** (não-singular).

Se $\mathbf{M}(t_1, t_0)$ é singular, então $\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{M}(t_1, t_0) \boldsymbol{\eta} = 0$ para algum $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0) \mathbf{C}^\top(t) \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) \boldsymbol{\eta} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^\top(t) \mathbf{y}(t) dt = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) \boldsymbol{\eta} &\equiv \mathbf{0}, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

Neste caso, estados iniciais da forma $\mathbf{x}(t_0) = c\boldsymbol{\eta}$, $c \neq 0$, produzem saídas $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, sendo indistinguíveis de uma condição inicial na origem $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$. O sistema é, portanto, não-observável.

Teste algébrico de observabilidade para um SLIT

Um sistema linear invariante no tempo com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é observável se, e somente se, a matriz de observabilidade $N \in \mathbb{R}^{n \times nm}$:

$$N = [C^T \mid A^T C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T]$$

tiver posto n (completo). Em outras palavras, as colunas de N devem ser um conjunto gerador do $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $\eta^T N = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$.

Voltando ao teorema da observabilidade, se $M(t_1, t_0)$ é não-singular, então $\eta^T M(t_1, t_0) \eta = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$. Vimos que:

$$\eta^T M(t_1, t_0) \eta = \int_{t_0}^{t_1} y^T(t) y(t) dt \quad \text{com} \quad y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) \eta$$

Em outras palavras, para que o sistema seja observável basta provar que $y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \eta = 0$.

Teste algébrico de observabilidade para um SLIT

Notando que, para um SLIT, $\Phi^\top(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^\top(t) &= \boldsymbol{\eta}^\top e^{A^\top(t-t_0)} \mathbf{C}^\top \\ &= \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{C}^\top + \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{C}^\top (t - t_0) + \dots + \frac{1}{k!} \boldsymbol{\eta}^\top (\mathbf{A}^\top)^{k-1} \mathbf{C}^\top (t - t_0)^{k-1} + \dots \end{aligned}$$

Do [teorema de Cayley-Hamilton](#) decorre que $\mathbf{A}^k$, $k \geq n$, é gerada por $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\}$. Note ainda que $(\mathbf{A}^\top)^k = (\mathbf{A}^k)^\top$, $k \geq 0$.

Assim, cada uma das colunas de uma matriz da forma $(\mathbf{A}^\top)^k \mathbf{C}^\top$, $k \geq 0$, pode ser construída como combinação linear das colunas de $\mathbf{N}$.

Portanto, se $\mathbf{N}$ tem [posto completo](#), o sistema é [observável](#), uma vez que:

$$\mathbf{y}(t) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$$