



Controle e Aplicações

Métodos gráficos em controle clássico

Resposta em frequência via diagramas de Bode

Margens de estabilidade

Renato Maia Matarazzo Orsino

reorsino@usp.br



Conteúdo

1 Resposta em frequência em malha fechada

2 Margens de estabilidade

- FTMA e a resposta do sistema em malha fechada
- Critério de Nyquist
- Margem de ganho e margem de fase
- Diagramas de Bode, Nyquist e Nichols
- Frequências de ganho crítico e de fase crítica

3 Projeto de compensadores via diagramas de Bode

- Compensadores de avanço de fase
- Compensadores de atraso de fase

Resposta em frequência em malha
fechada

Resposta em frequência em malha fechada

Admitindo que o projeto de controle tenha sido feito de forma correta, o **sistema em malha fechada será necessariamente estável** e, portanto, todos os polos de malha fechada $\bar{p}_i$ terão $\text{Re}(\bar{p}_i) < 0$. Ainda, *supondo a ausência de outras entradas*, temos:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{T}(s)\mathbf{R}(s) = \frac{\bar{\mathbf{N}}(s)}{(s - \bar{p}_1) \dots (s - \bar{p}_n)} \mathbf{R}(s)$$

Em particular, se considerarmos um sinal de referência harmônico, temos:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} \cos(\omega t) + \mathbf{B} \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(s) = \frac{\mathbf{A}s + \mathbf{B}\omega}{s^2 + \omega^2}$$

e, assim:

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{\bar{\mathbf{N}}(s)(\mathbf{A}s + \mathbf{B}\omega)}{(s - \bar{p}_1) \dots (s - \bar{p}_n)(s^2 + \omega^2)} = \frac{\mathbf{a}s + \mathbf{b}\omega}{s^2 + \omega^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_i}{s - \bar{p}_i}$$

Resposta em frequência em malha fechada

Multiplicando a expressão por $(s^2 + \omega^2)$, temos:

$$T(s)(\mathbf{A}s + \mathbf{B}\omega) = \mathbf{a}s + \mathbf{b}\omega + \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_i(s^2 + \omega^2)}{s - \bar{p}_i}$$

Em particular, para o valor $s = j\omega$:

$$T(j\omega)(\mathbf{B} + j\mathbf{A})\omega = (\mathbf{b} + j\mathbf{a})\omega$$

Se $T(j\omega) = \mathbf{P} + j\mathbf{Q}$, então:

$$(\mathbf{P} + j\mathbf{Q})(\mathbf{B} + j\mathbf{A}) = (\mathbf{b} + j\mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{P}\mathbf{B} - \mathbf{Q}\mathbf{A}) + j(\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q}\mathbf{B}) = (\mathbf{b} + j\mathbf{a})$$

e, finalmente:

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q}\mathbf{B}) \cos(\omega t) + (\mathbf{P}\mathbf{B} - \mathbf{Q}\mathbf{A}) \sin(\omega t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \exp(\bar{p}_i t)$$

Resposta em frequência em malha fechada

Uma vez que $\text{Re}(\bar{p}_i) < 0, \forall \bar{p}_i$, temos $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\bar{p}_i t) = 0$ e, assim, a **resposta em regime permanente de um sistema dinâmico linear estável** a uma entrada harmônica $r(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ é uma saída **harmônica de mesma frequência**:

$$y_{ss}(t) = (PA + QB) \cos(\omega t) + (PB - QA) \sin(\omega t) \quad \text{com} \quad P + jQ = T(j\omega)$$

Em particular, para um **sistema SISO (single input, single output)**, podemos simplificar as expressões usando a notação polar:

$$B + jA = F(\cos \beta + j \sin \beta) \quad \text{com} \quad F = |B + jA| \quad \text{e} \quad \beta = \angle B + jA$$

$$T(j\omega) = P + jQ = M(\cos \phi + j \sin \phi) \quad \text{com} \quad M = |T(j\omega)| \quad \text{e} \quad \phi = \angle T(j\omega)$$

$$b + ja = (P + jQ)(B + jA) = MF [\cos(\beta + \phi) + j \sin(\beta + \phi)]$$

e, assim:

$$r(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = F \sin \beta \cos(\omega t) + F \cos \beta \sin(\omega t) = F \sin(\omega t + \beta)$$

$$y_{ss}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = MF \sin(\omega t + \beta + \phi)$$

Resposta em frequência em malha fechada

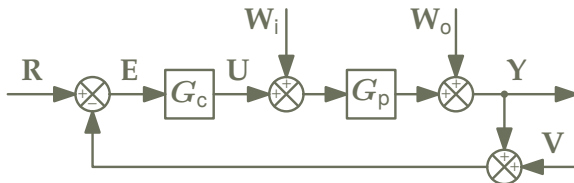
Assim, uma vez que o sistema é **estável em malha fechada**, a análise os valores de $T(j\omega)$ permite prever a resposta em frequência do sistema.

Uma dada componente harmônica de frequência ω na entrada $r(t)$ corresponderá a uma componente de saída em regime permanente $y_{ss}(t)$:

- harmônica e de mesma frequência ω ;
- com um ganho de amplitude $M = |T(j\omega)|$;
- com um avanço de fase $\phi = \angle T(j\omega)$.

O mesmo raciocínio pode ser estendido para um **sistema MIMO (multiple inputs, multiple outputs)**, bastando usar $T_{ik}(j\omega)$ para avaliar o efeito na saída $y_i(t)$ de uma componente harmônica de frequência ω na entrada $r_k(t)$.

Resposta do sistema em malha fechada



$$Y(s) = T(s) R(s) + G_p(s) S(s) W_i(s) + S(s) W_o(s) - T(s) V(s)$$
$$S(s) = [I + G_p(s) G_c(s)]^{-1}, \quad T(s) = G_p(s) G_c(s) S(s) \quad \text{e} \quad S(s) + T(s) = I$$

Assim, é desejável que:

- $T(s) \rightarrow I$ nas faixas de frequência típicas de $R(s)$, para melhorar a capacidade de acompanhamento de referências;
- $T(s) \rightarrow 0$ nas faixas de frequência típicas de $V(s)$, para melhorar a capacidade de rejeição de ruídos de medição;
- $S(s) \rightarrow 0$, para melhorar a capacidade de rejeição de perturbações.

Resposta do sistema em malha fechada

Voltando ao exemplo, tratado no Módulo 3, da função de transferência **adimensional** do tipo $m = 1$ e ordem $n = 4$, originalmente instável em malha aberta:

$$G_p(s) = \frac{(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = \frac{(s+1)}{s^4+3s^3+12s^2-16s}$$

Para este sistema foram projetados:

- um compensador **PID**:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad \text{com} \quad K_p = 15, \quad T_i = 12 \quad \text{e} \quad T_d = \frac{11}{3}$$

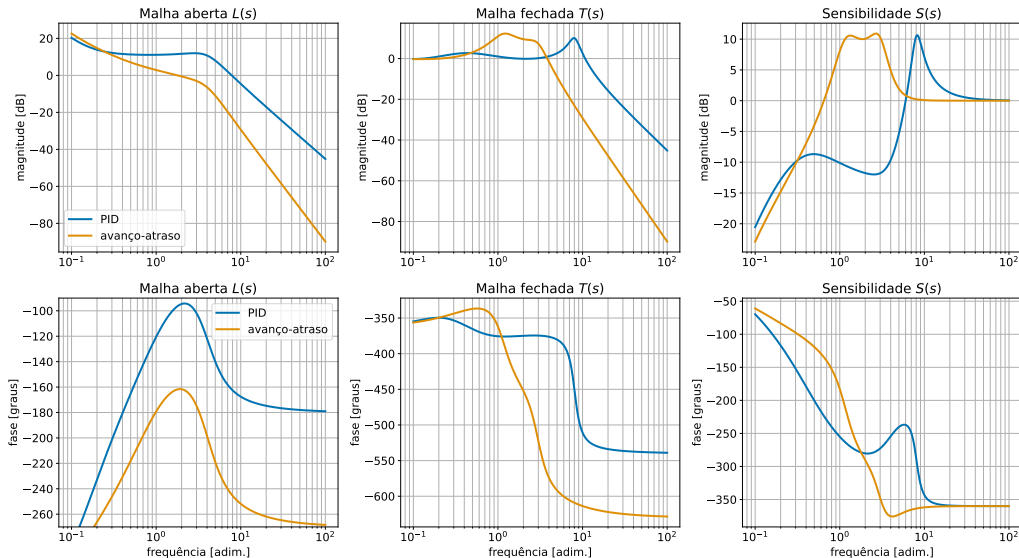
- um compensador de **avanço-atraso** de fase:

$$G_c(s) = K_c \frac{(1 + \alpha \tau_c s)}{\alpha(1 + \tau_c s)} \frac{\beta(1 + \tau_a s)}{(1 + \beta \tau_a s)} \quad \text{com} \quad K_c = 32.16, \quad \begin{cases} \alpha = 2.11 \\ \tau_c = 0.639 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \beta = 10 \\ \tau_a = 10 \end{cases}$$

No próximo slide, para cada um destes compensadores ilustram-se os diagramas de Bode de:

$$L(s) = G(s) = G_c(s)G_p(s), \quad T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad \text{e} \quad S(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = 1 - T(s)$$

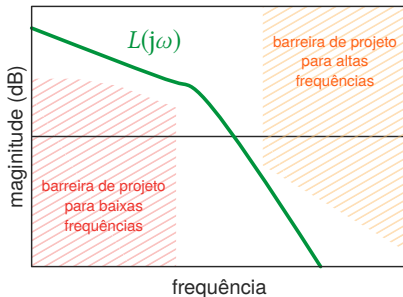
Resposta do sistema em malha fechada



Barreiras de projeto para sistemas SISO

Uma vez assegurado o objetivo principal de **estabilidade do sistema em malha fechada**:

- Em “baixas frequências”, a principal preocupação deve ser com o acompanhamento de referências e a capacidade de rejeição de perturbações impostas à planta. Assim, deve haver uma **barreira de projeto que imponha $|L(j\omega)|$ “grande” em um intervalo $0 < \omega < \underline{\omega}$** .
- Em “altas frequências”, a principal preocupação deve ser com a capacidade de rejeitar efeitos dos ruídos de medição. Deve-se definir assim uma **barreira de projeto que imponha $|L(j\omega)|$ “pequeno” em um intervalo $\omega > \overline{\omega}$** .



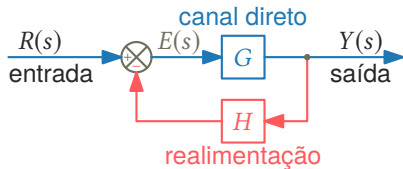
A seguir, definiremos as **margens de estabilidade** para um sistema SISO, que consistem em avaliar, **a partir da função de transferência em malha aberta $L(s)$** , quanto pode haver em termos de **variações de ganho** ou **atrasos em fase** sem que a **estabilidade nominal do sistema em malha fechada** seja comprometida.

Margens de estabilidade

Resposta de um sistema SISO em malha fechada

Em um **sistema SISO** (*single input, single output*), tanto os sinais quanto as FTs são escalares, sendo possível descrever a resposta em **malha fechada**, $T(s)$ e $S(s)$, a partir da **FTMA** $L(s) = G(s)H(s)$:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)} \quad \text{e} \quad S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$



Assim, um valor $s \in \mathbb{C}$ será um **polo do sistema em malha fechada** se, e somente se:

$$1 + L(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L(s) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad |L(s)| = 1 \quad \text{e} \quad \angle L(s) \equiv 180^\circ$$

- Uma vez projetado o compensador, é fundamental que $L(s) \neq -1$ sempre que $\text{Re}(s) \geq 0$, para garantir a **estabilidade em malha fechada**.
- Por continuidade, $L(s_0) \approx -1$ indica a existência de um polo próximo a $s = s_0$.
- A análise de estabilidade se baseia na **FTMA** $L(s)$ obtida com base no **modelo do sistema** sendo necessário assegurar que, sempre que $\text{Re}(s) > 0$, $|1 + L(s)| \geq M$ para algum $M > 0$, garantindo alguma **robustez** ao sistema de controle projetado.

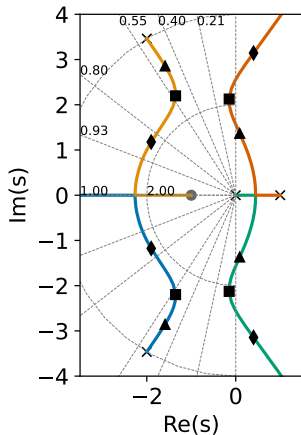
Lugar geométrico das raízes (LGR)

Expressando a FTMA na forma $L(s) = K \frac{N(s)}{D(s)}$, $K > 0$, o conjunto dos $s \in \mathbb{C}$ para os quais $\angle L(s) \equiv 180^\circ$ corresponde ao **lugar geométrico das raízes**.

O exemplo ao lado ilustra o lugar geométrico das raízes da função de transferência **adimensional**:

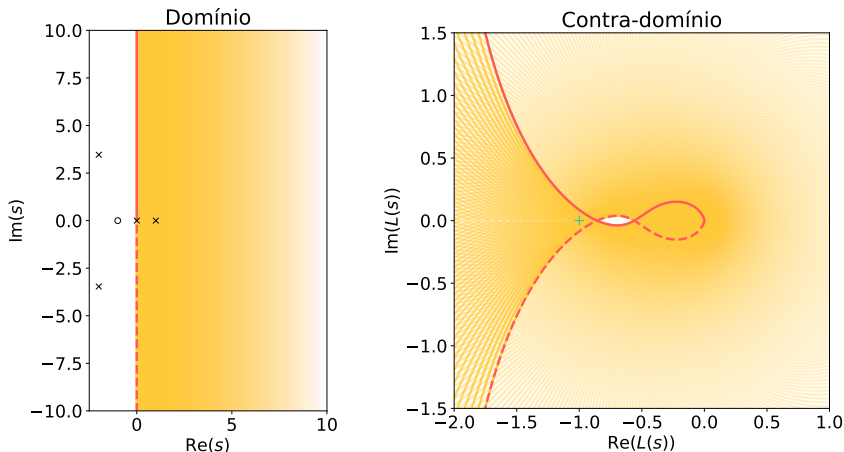
$$L(s) = G_c(s)G_p(s) \quad \text{com} \quad G_p(s) = \frac{(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

e $G_c(s) = K_c$ correspondendo a uma ação estritamente proporcional. Conforme ilustrado ao lado, dos três valores escolhidos para K_c (20, 30 ou 50), apenas para $K_c = 30$ não encontramos valores de s com parte real positiva para os quais $\angle L(s) \equiv 180^\circ$. Nos slides a seguir, observaremos o que se pode inferir dos gráficos de $L(s)$ quando se varia $G_c(s)$.



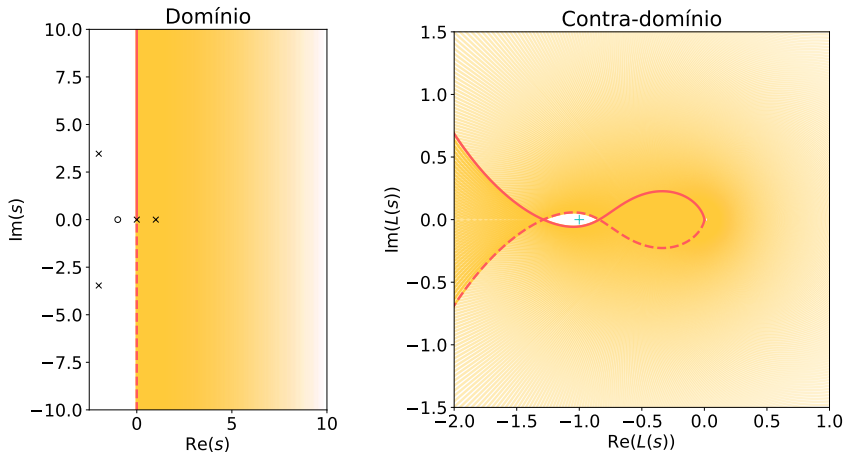
- × polos de MA • zeros de MA
▲ $K_c = 20$ ■ $K_c = 30$
◆ $K_c = 50$

Representação gráfica de $L(s)$



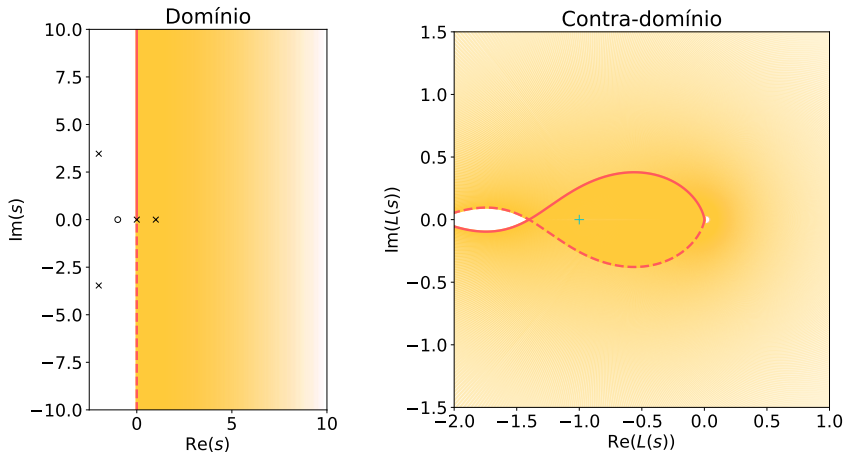
$$G_c(s) = K_c = 20$$

Representação gráfica de $L(s)$



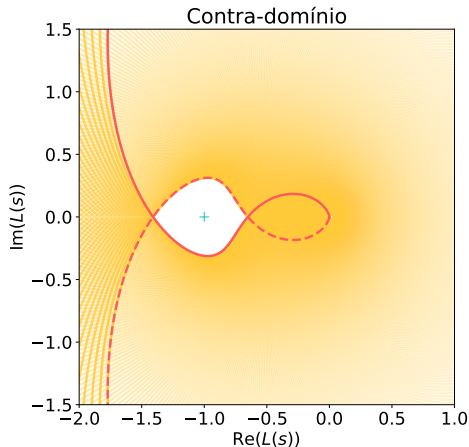
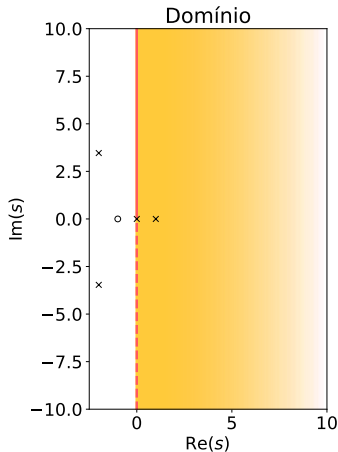
$$G_c(s) = K_c = 30$$

Representação gráfica de $L(s)$



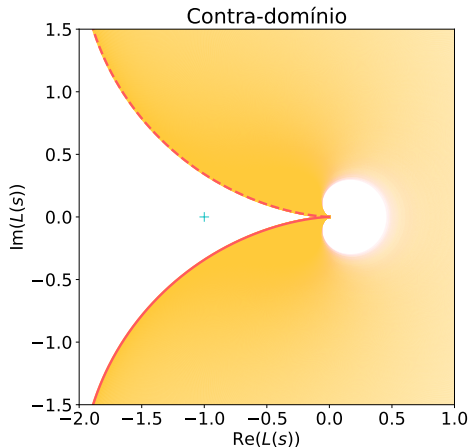
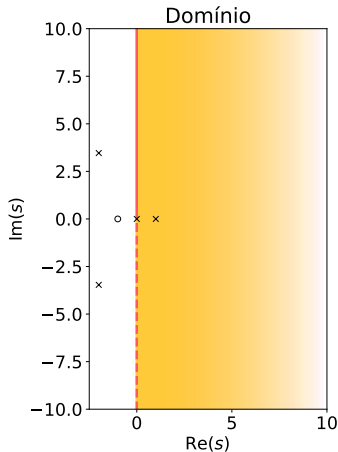
$$G_c(s) = K_c = 50$$

Representação gráfica de $L(s)$



$$G_c(s) = K_c \frac{(1 + \alpha\tau_c s)}{\alpha(1 + \tau_c s)} \frac{\beta(1 + \tau_a s)}{(1 + \beta\tau_a s)} \quad \text{com} \quad K_c = 32.16, \quad \begin{cases} \alpha = 2.11 \\ \tau_c = 0.639 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \beta = 10 \\ \tau_a = 10 \end{cases}$$

Representação gráfica de $L(s)$



$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad \text{com} \quad K_p = 15, \quad T_i = 12 \quad \text{e} \quad T_d = \frac{11}{3}$$

Cr terio de Nyquist

Conforme observamos no exemplo anterior, o gráfico de $L(j\omega)$, ou seja, a imagem por L do eixo imaginário, é suficiente para caracterizar a estabilidade do sistema em malha fechada. Considere:

- N : número líquido de voltas no sentido-horário que a imagem de $L(j\omega)$, $-\infty < \omega < +\infty$, d  ao redor do ponto $s = -1$;
- Z_R : número de zeros da função $F(s) = 1 + L(s)$ no semi-plano direito;
- P_R : número de polos da função $F(s)$ no semi-plano direito.

Como corolário do **Princípio do Argumento de Cauchy**, vale a seguinte relação:

$$N = Z_R - P_R$$

Note que:

- os polos de $F(s)$ coincidem com os polos de $L(s)$, ou seja, são polos em malha aberta, ou seja, P_R   o número de polos instáveis em malha aberta.
- os zeros de $F(s)$ são os valores de $s \in \mathbb{C}$ tais que $L(s) = -1$, ou seja, são polos em malha fechada, ou seja, Z_R   o número de polos instáveis em malha fechada.

Critério de Nyquist

Assim, a equação acima pode ser interpretada como:

O número líquido N de **voltas no sentido horário** que a imagem de $L(j\omega)$, $-\infty < \omega < +\infty$, dá ao redor do ponto $s = -1$ é igual à *diferença* entre o **número de polos do sistema em malha fechada** e o **número de polos do sistema em malha aberta**.

Para a **estabilidade em malha fechada**, é necessário que $Z_R = 0$, ou seja:

$$N = -P_R$$

Em outras palavras:

- para um sistema já estável em malha aberta, a malha fechada será estável se a imagem de $L(j\omega)$, $-\infty < \omega < +\infty$, não contornar o ponto $s = -1$;
- para um sistema instável em malha aberta, a malha fechada será estável se o número de contornos no **sentido anti-horário** em torno do ponto $s = -1$ pela imagem de $L(j\omega)$, $-\infty < \omega < +\infty$, for exatamente igual ao número de polos instáveis em malha aberta.

Margem de ganho e margem de fase

O **critério de Nyquist** fornece um método para determinar, a partir da **imagem de $L(j\omega)$** , $-\infty < \omega < +\infty$, se haverá **estabilidade em malha fechada**. O gráfico de $\text{Im}(L(j\omega))$ vs. $\text{Re}(L(j\omega))$, denominado **diagrama de Nyquist**, permite também determinar as **margens de ganho e de fase**.

No exemplo da figura ao lado, o diagrama de Nyquist irá interceptar o ponto $s = -1$ tanto se houver um **aumento** quanto uma **redução** no módulo do ganho.

Tais condições definem a **margem de ganho superior $\overline{GM}$** e a **margem de ganho inferior $\underline{GM}$** , respectivamente, que podem ser identificadas a partir dos pontos de cruzamento do diagrama de Nyquist com o eixo real, conforme indicado na figura.

Mantido o ganho constante, outra forma de o diagrama de Nyquist interceptar o ponto $s = -1$, seria um **atraso de fase** (em geral, devido a efeitos não-modelados). A partir da interseção da semi-circunferência de raio 1 centrada na origem $s = 0$ com o ramo $\omega > 0$ do diagrama de Nyquist, medimos a **margem de fase PM** como indicado na figura.

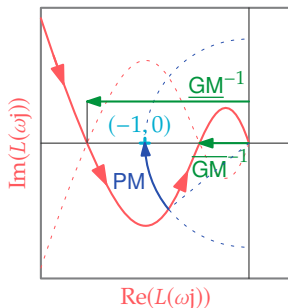
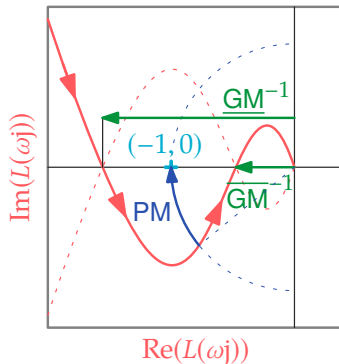
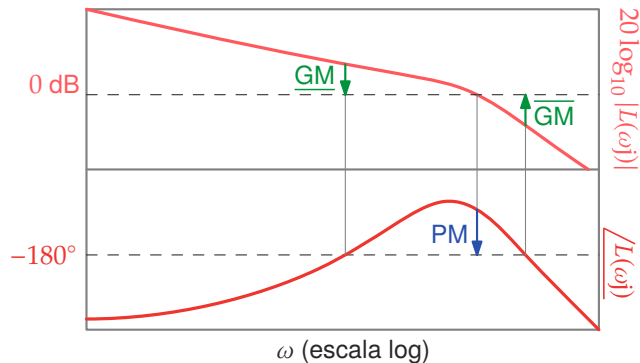


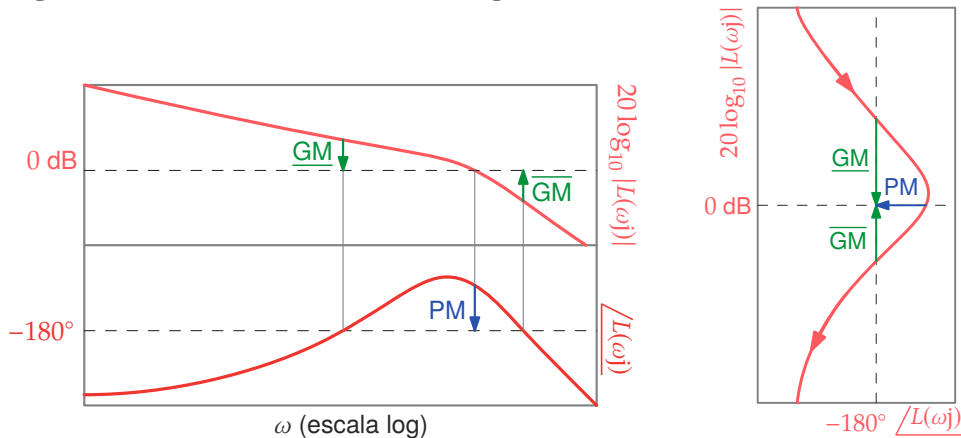
Diagrama de Bode vs. diagrama de Nyquist



As margens de **ganho superior** ($\overline{GM}$), de **ganho inferior** ($\underline{GM}$) e de **fase** ($\overline{PM}$) podem também ser obtidas visualizando $L(j\omega)$, $\omega > 0$, por meio dos **diagramas de Bode** que representam:

- $20 \log_{10} |L(j\omega)|$ (em escala dB) vs. ω (em escala logaritmica)
- $\angle L(j\omega)$ (em graus) vs. ω (em escala logaritmica)

Diagrama de Bode vs. diagrama de Nichols



O diagrama de Nichols representa $20 \log_{10} |L(j\omega)|$ (dB) vs. $\angle L(j\omega)$. Para um sistema estável em malha fechada, a curva do diagrama deverá passar à direita do ponto $(\pm 180^\circ, 0 \text{ dB})$ mais próximo, sendo possível identificar as margens $\overline{\text{GM}}$, $\underline{\text{GM}}$ e PM conforme indicado.

Frequências de ganho crítico e de fase crítica

Se estivessemos em uma situação de **ganho crítico**, o sistema teria polos sobre o eixo imaginário, ou seja, para algum $\omega > 0$:

$$L(j\omega) = -1 \quad \Rightarrow \quad 20 \log_{10} |L(j\omega)| = 0 \quad \text{e} \quad \angle L(j\omega) \equiv 180^\circ$$

Em outras palavras, para algum valor de ω deveríamos ter **simultaneamente** o gráfico de magnitude cruzando o limiar de 0 dB e o gráfico de fase cruzando o limiar de -180° .

Nos casos em que a **resposta em malha fechada é estável**, a análise da **imagem de $L(j\omega)$** , $\omega > 0$, com L sendo a FTMA, nos permite identificar:

- ω_ϕ : frequência de ganho crítico (*gain crossover*) para a qual $|L(j\omega_\phi)| = 1$ ou $20 \log_{10} |L(j\omega_\phi)| = 0$ dB;
- ω_c : frequência de fase crítica (*phase crossover*), para a qual $\angle L(j\omega_c) = -180^\circ$.

Estaremos em uma situação de crítica, portanto, se $\omega_\phi = \omega_c$. Caso contrário, dispomos de *margens* para **variação de ganho** ou **atrasos em fase** sem que a estabilidade nominal do sistema esteja comprometida.

Margens de estabilidade

Definem-se formalmente a **margem de ganho (GM)** e a **margem de fase (PM)** como:

$$GM = \frac{1}{|L(j\omega_c)|} \quad \text{ou} \quad GM(\text{dB}) = -20 \log_{10} |L(j\omega_c)|$$

$$PM = 180^\circ + \angle L(j\omega_\phi) \quad \text{com} \quad \angle L(j\omega_\phi) < 0$$

Outra forma de avaliar a estabilidade é avaliar $S(j\omega)$, $\omega > 0$, que corresponde à imagem do eixo imaginário pela **função de sensibilidade S**:

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)}$$

Em particular, o valor de $\omega = \omega_s$ para o qual $|S(j\omega)|$ é máximo, corresponde ao ponto do eixo imaginário cuja imagem por $L(s)$ está o mais próximo possível do **ponto crítico** $s = -1$, uma vez que o valor $M = |1 + L(j\omega_s)| = 1/|S(j\omega_s)|$ será mínimo.

Projeto de compensadores via diagramas de Bode

Compensadores de avanço de fase

$$G_c(s) = K_c \frac{(1 + \alpha \tau_c s)}{\alpha(1 + \tau_c s)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{\alpha \tau_c}\right)}{\left(s + \frac{1}{\tau_c}\right)} \quad \text{com } \alpha > 1$$

- 1 Determinar a margem de fase do sistema não-compensado.
- 2 Determine a fase ϕ_m a ser avançada, admitindo uma margem de segurança (tipicamente $+5^\circ$) e calcule o respectivo valor de α :

$$\phi_m = \arcsin \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right) \quad \text{em} \quad \omega_m = \frac{1}{\tau_c \sqrt{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m}$$

- 3 No diagrama do sistema não-compensado, identifique a frequência ω_m , em que se observa uma magnitude de $\frac{K_c}{\sqrt{\alpha}}$ ($= 20 \log_{10} \frac{K_c}{\sqrt{\alpha}}$, em dB). Calcule $\tau_c = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$.

Compensadores de atraso de fase

$$G_c(s) = K_c \frac{\beta(1 + \tau_a s)}{(1 + \beta \tau_a s)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{\tau_a}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta \tau_a}\right)} \quad \text{com } \beta > 1$$

O compensador de atraso neste caso, vai atuar reduzindo o valor de ω_ϕ , com o objetivo de colocá-lo nesta faixa de frequências em que se observa o maior valor de $180^\circ + \angle L(j\omega)$, o que maximiza o valor da margem de fase $PM = 180^\circ + \angle L(j\omega_\phi)$.

- 1 Avaliar o diagrama de Bode da malha aberta ainda sem compensador de atraso e, partir da margem de fase desejada, admitindo uma margem de segurança (tipicamente $+5^\circ$), encontre o valor da nova frequência de corte.
- 2 Obter τ_a considerando que o zero do compensador esteja, em módulo, uma década abaixo de ω_ϕ , ou seja, $\tau_a = 10/\omega_\phi$.
- 3 Obter β considerando que na frequência de corte ω_ϕ , $|L(j\omega_\phi)| = 1$.