



Controle e Aplicações

Introdução ao Controle Clássico

Ações básicas de controle

Sintonia de controladores

Renato Maia Matarazzo Orsino

reorsino@usp.br



Conteúdo

1 Sensibilidade e acompanhamento de referências em malha fechada

- Função de Sensibilidade
- Erro de acompanhamento em regime permanente – caso SISO

2 Ações básicas de controle

- Controle liga-desliga (*on/off*)
- Ações de controle proporcional (P), integral (I) e derivativa (D)
- Controladores PI, PD e PID

3 Sintonia de controladores

- Métodos de Ziegler-Nichols (ZN)
- Critérios baseados em índices de desempenho global

**Sensibilidade e acompanhamento
de referências em malha fechada**

Função de Sensibilidade

Para avaliar o erro no acompanhamento do sinal de referência é necessário obter a **sensibilidade $S(s)$** , que é a função de transferência que relaciona $E(s)$ a $R(s)$. Assim, *supondo a ausência de outras entradas*, temos:

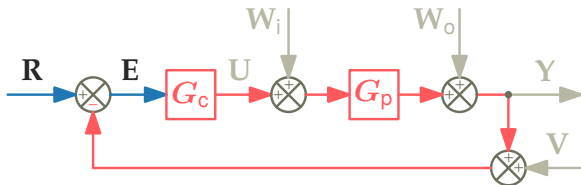
$$E(s) = S(s)R(s)$$

Em particular, analisando o diagrama de blocos, identificamos:

Canal direto: $G_{er}(s) = I$

Realimentação: $H_{er}(s) = G_p(s)G_c(s)$

Malha aberta: $L(s) = G_p(s)G_c(s)$



$$S(s) = [I + G_p(s)G_c(s)]^{-1} = [I + L(s)]^{-1}$$

Função de Sensibilidade

A **função de sensibilidade** $S(s)$ também permite **avaliar quantitativamente** como o **mecanismo de realimentação (feedback)** atua para mitigar o efeito de **pequenas variações na planta ou no controlador** sobre a resposta do **sistema em malha fechada**.

Supondo a ausência de outras entradas, temos $Y(s) = T(s)R(s)$ com:

Canal direto: $G(s) = G_p(s)G_c(s)$

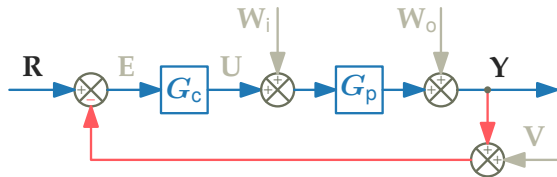
Realimentação: $H(s) = I$

Malha aberta: $L(s) = G(s)$

Malha fechada: $T(s) = G(s) [I + G(s)]^{-1}$

Dessa forma, conclui-se que:

$$\frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} = [I + G]^{-1} - G [I + G]^{-2} = \{[I + G] - G\} [I + G]^{-2} = S(s)^2$$



Função de Sensibilidade

Em particular, para um **sistema SISO** (*single input, single output*):

$$T(s) = G(s)S(s) \Rightarrow S(s) = \frac{T(s)}{G(s)} = \frac{T(s)}{G_c(s)G_p(s)}$$

de onde se conclui que:

$$\frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} = S(s) \frac{T(s)}{G(s)}, \quad \frac{\partial T(s)}{\partial G_c(s)} = S(s) \frac{T(s)}{G_c(s)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial T(s)}{\partial G_p(s)} = S(s) \frac{T(s)}{G_p(s)}$$

Em particular, se desejarmos avaliar o efeito que uma pequena variação na dinâmica da planta $\Delta G_p(s)$ causa na dinâmica do sistema em malha fechada, $\Delta T(s)$, podemos considerar a aproximação:

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta G_p(s)} \approx \frac{\partial T(s)}{\partial G_p(s)} \Rightarrow \frac{\Delta T(s)}{T(s)} \approx S(s) \frac{\Delta G_p(s)}{G_p(s)}$$

Assim, quanto **menor a sensibilidade**, menor o efeito relativo de uma variação da **planta** sobre a dinâmica do sistema em **malha fechada**.

Erro de acompanhamento em regime permanente

O erro de acompanhamento de referências do sistema em MF em regime permanente pode ser obtido pela aplicação do **teorema do valor final**:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[I + L(s)]^{-1} R(s)$$

Para continuar a análise, consideremos um **sistema SISO** (*single input, single output*) cuja **função de transferência de malha aberta** $L(s) = G_c(s)G_p(s)$ tenha m polos em $s = 0$ (dizemos, por brevidade, que é um **sistema do tipo m**):

$$L(s) = \frac{K_m(1 + b_1s + \dots + b_qs^q)}{s^m(1 + a_1s + \dots + a_rs^r)} = \frac{K_m \prod_a^{N_a} (1 + t_as) \prod_b^{N_b} \left[1 + 2\xi_b \left(\frac{s}{w_b} \right) + \left(\frac{s}{w_b} \right)^2 \right]}{s^m \prod_\alpha^{N_\alpha} (1 + \tau_\alpha s) \prod_\beta^{N_\beta} \left[1 + 2\zeta_\beta \left(\frac{s}{\omega_\beta} \right) + \left(\frac{s}{\omega_\beta} \right)^2 \right]}$$

Note que a **ordem do sistema** é $n = m + r$. Ainda, $r = N_\alpha + 2N_\beta$ e $q = N_a + 2N_b$.

Erro de acompanhamento em regime – caso SISO

A respectiva **função de sensibilidade** para o **sistema SISO** considerado será:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{s^m(1 + a_1s + \dots + a_rs^r)}{K_m(1 + b_1s + \dots + b_qs^q) + s^m(1 + a_1s + \dots + a_rs^r)}$$

Ainda, pelo **teorema do valor final**:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 + a_1s + \dots + a_rs^r)s^{m+1}R(s)}{s^m(1 + a_1s + \dots + a_rs^r) + K_m(1 + b_1s + \dots + b_qs^q)}$$

Assim, *quando o limite existir*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + K_0} \left[\lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \right] & \text{se } m = 0 \\ \frac{1}{K_m} \left[\lim_{s \rightarrow 0} s^{m+1}R(s) \right] & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

Erro de acompanhamento em regime – caso SISO

Para um sinal de referência polinomial de grau k :

$$r(t) = R_0 + R_1 t + R_2 \frac{t^2}{2} + \dots + R_k \frac{t^k}{k!}$$

sabemos que:

$$R(s) = R_0 \frac{1}{s} + R_1 \frac{1}{s^2} + R_2 \frac{1}{s^3} + \dots + R_k \frac{1}{s^{k+1}}$$

Para um sistema do **tipo zero**:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \begin{cases} \frac{R_0}{1 + K_0} & \text{se } k = 0 \\ \infty & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

Um sistema do **tipo zero** é capaz de seguir, em malha fechada, um **sinal de referência constante** (*degrau*) com **erro de acompanhamento finito em regime permanente**.

Erro de acompanhamento em regime – caso SISO

Para um sistema do tipo $m \geq 1$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < m \\ \frac{R_m}{K_m} & \text{se } k = m \\ \infty & \text{se } k > m \end{cases}$$

Um sistema do tipo $m \geq 1$ é capaz de seguir, em malha fechada, um sinal de referência polinomial:

- de grau *igual ou inferior a $(m - 1)$ com erro de acompanhamento nulo em regime permanente.*
- de grau *igual a m com erro de acompanhamento finito em regime permanente.*

Cabe notar que, para um sistema do tipo m , temos $K_m = \lim_{s \rightarrow 0} s^m L(s)$.

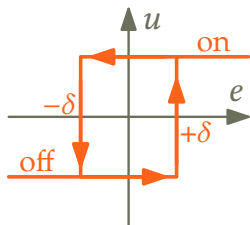
Ações básicas de controle

Controle liga-desliga (on/off)

O **controlador liga-desliga** (on/off) ou **controlador de duas posições** representa o tipo de ação mais simples e, tipicamente, de mais baixo custo de implementação.

Neste tipo de ação, a entrada de controle fica restrita a assumir apenas dois valores pré-estabelecidos e constantes:

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{on}}, & e(t) > 0 \\ u_{\text{off}}, & e(t) < 0 \end{cases}$$



Na prática, para evitar chaveamento excessivo entre as posições *on/off*, em particular quando $e(t)$ se aproxima de zero, define-se um **intervalo diferencial** (*gap*):

- O chaveamento de *off* para *on* ocorre quando $e(t) = +\delta > 0$;
- O chaveamento de *on* para *off* ocorre quando $e(t) = -\delta < 0$.

Apesar da fácil implementação, a ação de controle liga-desliga é **não-linear** sendo assim uma solução “simples” apenas quando a planta em si já tem uma dinâmica “simples”.

Controle liga-desliga aplicado a um reservatório

Para o reservatório mostrado na figura ao lado, modelando a válvula na saída com uma resistência hidráulica linear R equivalente, verifica-se que a variação de volume é:

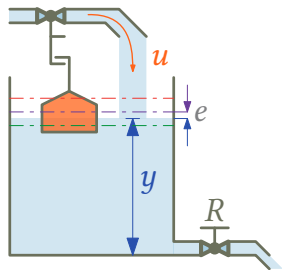
$$\frac{dV}{dt} = A \frac{dy}{dt} = Q = u - \frac{y - 0}{R} \Rightarrow \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau} y = \frac{1}{A} u$$

com $\tau = RA$. Isto corresponde à função de transferência:

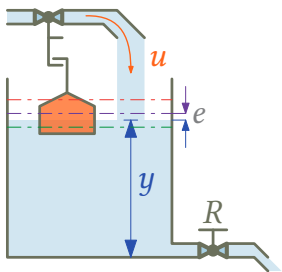
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\tau/A}{\tau s + 1}$$

Sendo H o nível desejado para o tanque, o problema se torna adimensional definindo:

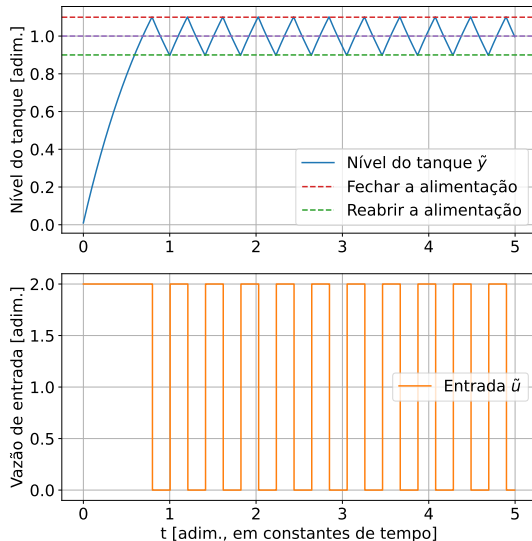
$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{s} = \tau s, \quad \tilde{y} = \frac{y}{H} \quad \text{e} \quad \tilde{u} = \frac{\tau u}{AH} \\ \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} + \tilde{y} &= \tilde{u} \quad \text{e} \quad \frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{1}{\tilde{s} + 1} \end{aligned}$$



Controle liga-desliga aplicado a um reservatório



Os gráficos ao lado ilustram a resposta adimensional do sistema, partindo da condição de tanque vazio, com $\tilde{u}_{on} = 2$, $\tilde{u}_{off} = 0$ e considerando um intervalo diferencial para chaveamento com $\tilde{\delta} = 10\%$.



Ação proporcional (P)

Outro tipo de estratégia simples para a implementação de um controlador é a **ação proporcional (P)** em que o valor de $u(t)$ é diretamente proporcional ao erro $e(t)$ por meio de uma constante K_p , denominada **ganho**:

$$u(t) = K_p e(t) \quad \text{e} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

- A implementação desta ação de controle pode ser feita por meio de qualquer dispositivo que tenha a função equivalente a uma **“alavanca”**.
- A ação proporcional não introduz novos polos ou zeros à dinâmica do sistema em malha fechada, **não alterando a ordem nem o tipo do sistema**.
- **Ganhos elevados**, por um lado **favorecem o acompanhamento de sinais de referência e a rejeição de perturbações** aplicadas à planta; por outro **amplificam o efeito de ruídos de medição e podem instabilizar a planta**.

Ação proporcional usando um *amp op*

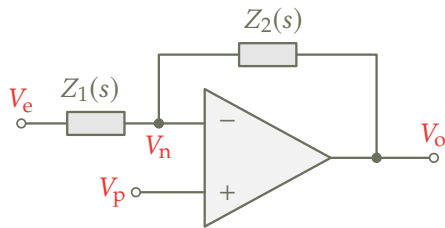
Um **amplificador operacional** (*amp op*) é um amplificador eletrônico de tensão cuja tensão de saída é dada por:

$$V_o = A(V_p - V_n) \quad \text{com } A \gg 1$$

As impedâncias nos respectivos terminais do *amp op* são tão elevadas que as correntes que fluem por eles se tornam desprezíveis. Para o nó V_n :

$$\frac{V_e - V_n}{Z_1(s)} = \frac{V_n - V_o}{Z_2(s)} \Rightarrow V_o = \frac{(V_p - V_e) + \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} V_p}{\frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} + \frac{1}{A} \left(1 + \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} \right)} \approx \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} (V_p - V_e) + V_p$$

Em particular, se aterrarmos o terminal não-inversor, ou seja, $V_p = 0$ e tomarmos ambas as impedâncias como resistores com $\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = \frac{R_2}{R_1} = K_p$, teremos $\frac{V_o(s)}{V_e(s)} = -K_p$.



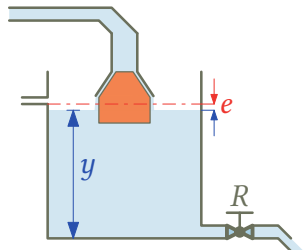
Controle proporcional aplicado a um reservatório

A aplicação de ação de controle proporcional para regular o nível de um reservatório remonta à antiguidade.

Ctesíbio (285 a.C. – 222 a.C.) desenvolveu um tipo de relógio de água (*clepsidra*) que funcionava ao longo dos 365 dias do ano, tendo sido superado apenas pela invenção relógio mecânico, no século XIV d.C.

O modelo da figura ao lado representa o primeiro tanque do dispositivo desenvolvido por Ctesíbio. Este reservatório tinha como função garantir uma vazão de saída praticamente constante, de tal forma que houvesse uma proporção direta entre o volume de água que sai e o tempo decorrido.

Para tal, Ctesíbio observou que seria necessário manter o nível do reservatório praticamente constante e desenvolveu o sistema indicado com uma bóia cuja geometria servia como válvula de regulação de fluxo na alimentação e um sistema de escape, caso o nível máximo admissível fosse superado.

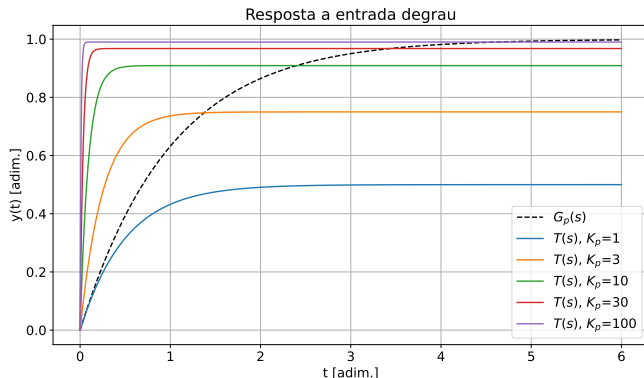


Controle P em um sistema de primeira ordem

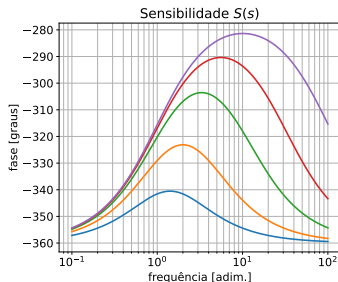
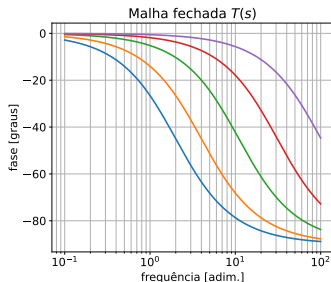
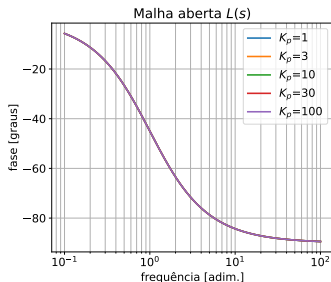
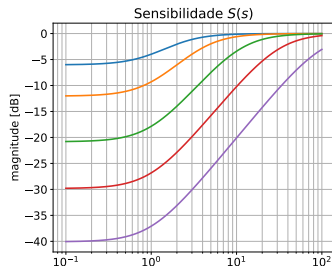
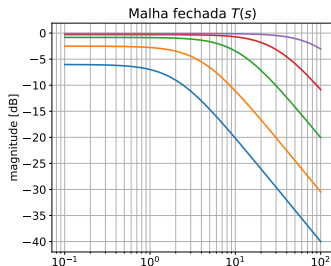
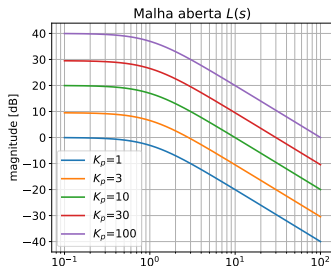
Considere um sistema de primeira ordem munido de um controlador proporcional:

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{e} \quad G_c(s) = K_p$$

Avaliamos a resposta a degrau e a resposta em frequência do sistema em função de K_p .



Controle P em um sistema de primeira ordem

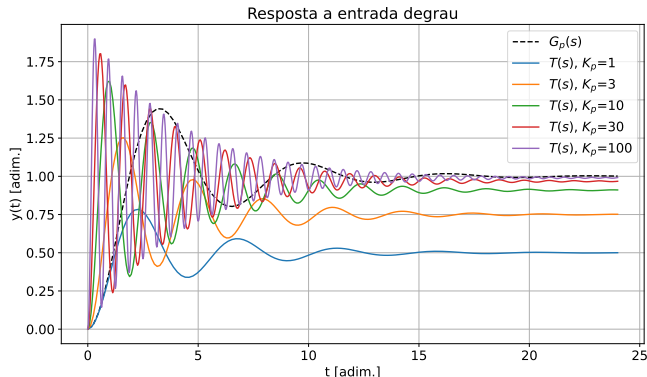


Controle P em um sistema de segunda ordem

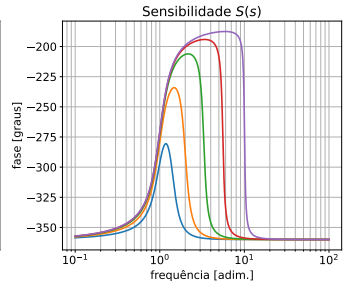
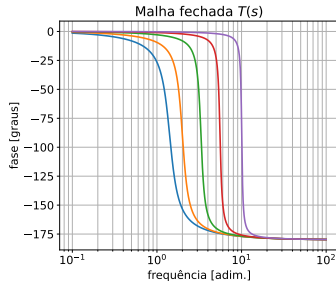
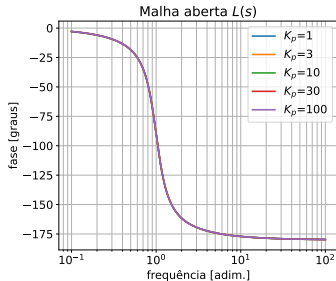
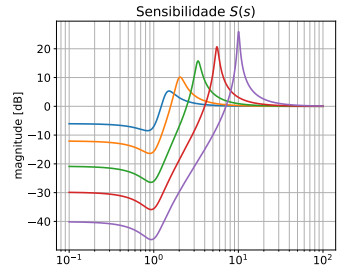
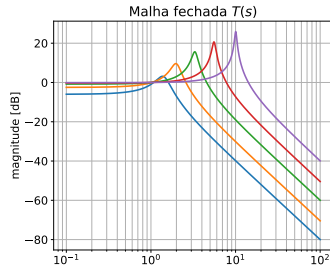
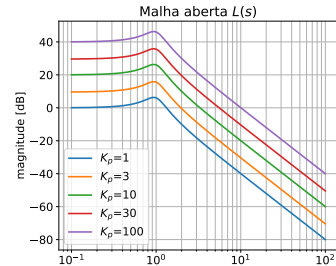
Considere um sistema de segunda ordem munido de um controlador proporcional:

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \quad \text{com} \quad \zeta = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad G_c(s) = K_p$$

Avaliamos a resposta a degrau e a resposta em frequência do sistema em função de K_p .



Controle P em um sistema de segunda ordem



Ação integral (I)

Sabe-se que o um sistema do tipo m , ou seja, com m polos de malha aberta em $s = 0$ é capaz de acompanhar:

- com erro nulo em regime permanente, sinais polinomiais de grau inferior a m ;
- com erro finito em regime permanente, sinais de grau igual a m .

A introdução, por meio do controlador, de um novo polo de malha aberta em $s = 0$ aumenta o tipo e a ordem do sistema:

- reduzindo o erro de acompanhamento de referências em regime permanente;
- reduzindo a sensibilidade do sistema em baixas frequências.

A ação integral (I) adiciona à entrada de controle $u(t)$ uma parcela $u_i(t)$ diretamente proporcional à integral do erro $e(t)$:

$$u_i(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau = \frac{K_c}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad \frac{U_i(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} = \frac{K_c}{T_i s}$$

Os efeitos negativos da ação integral são uma possível piora de desempenho no regime transitório e a redução da estabilidade em MF para K_i elevado (T_i baixo).

Ação integral utilizando um *amp op*

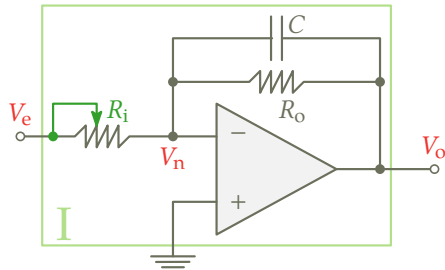
Uma ação integral de controle também pode ser produzida por meio de um dispositivo eletrônico baseado em um *amp op* como o mostrado na figura ao lado. Uma vez que, no terminal não-inversor $V_p = 0$, e:

$$Z_1(s) = R_i \quad \text{e} \quad Z_2(s) = \left[\frac{1}{R_o} + Cs \right]^{-1}$$

a expressão aproximada ($A \gg 1$) para a relação entre V_o e V_e se torna:

$$V_o(s) \approx -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} V_e(s) = -\frac{1}{\frac{1}{N_i} + T_i s} V_e(s)$$

com $T_i = R_i C$ e $N_i = \frac{R_o}{R_i} \gg 1$. Para $|s| \gg \frac{1}{T_i N_i} = \frac{1}{R_o C}$, tem-se: $\frac{V_o(s)}{V_e(s)} \approx -\frac{1}{T_i s}$.



Ação integral usando um servomotor hidráulico

O dispositivo mostrado na figura ao lado representa um servomotor hidráulico:

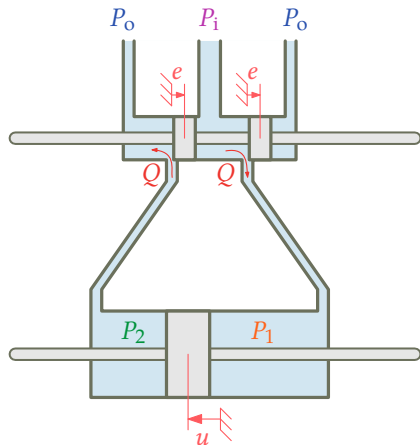
- O deslocamento e controla a abertura das válvulas que, por sua vez é diretamente proporcional à vazão volumétrica Q .
- Admitindo os escoamentos incompressíveis, as vazões Q devem ser idênticas nas válvulas da esquerda e da direita:

$$Q = C_v e \sqrt{P_i - P_1} = C_v e \sqrt{P_2 - P_o}$$

$$\Rightarrow P_1 + P_2 = P_i + P_o = 2\bar{P}$$

- Definindo $p = P_1 - P_2$, temos:

$$P_1 = \bar{P} + \frac{1}{2}p \quad P_2 = \bar{P} - \frac{1}{2}p$$



Adaptado de [2]

Ação integral usando um servomotor hidráulico

Linearizando a expressão para a vazão $Q = C_v e \sqrt{P_i - P_1} = C_v e \sqrt{P_2 - P_o}$ em torno do estado de equilíbrio $(e, p) = (0, 0)$, ou seja, com $Q = \bar{Q} = 0$ e $P_1 = P_2 = \bar{P}$:

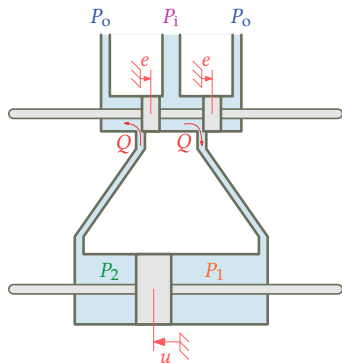
$$Q \approx Q \Big|_{(e,p)=(0,0)} + \frac{\partial Q}{\partial e} \Big|_{(e,p)=(0,0)} e + \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_{(e,p)=(0,0)} p = C_e e \quad \text{com} \quad C_e = C_v \sqrt{\bar{P} - P_o}$$

Assim, a variação de volume na câmara da direita (volume V_1) será:

$$Q = \frac{dV_1}{dt} = A \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{C_e}{A} e$$

Definindo $K_i = \frac{C_e}{A}$ e admitindo $u = 0$ em $t = 0$ temos:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$



Adaptado de [2]

Ação derivativa (D)

A **ação derivativa (D)** adiciona à entrada de controle $u(t)$ uma parcela $u_d(t)$ diretamente proporcional à derivada temporal do erro $e(t)$:

$$u_d(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} = K_c T_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = K_d s = K_c T_d s$$

O objetivo da ação derivativa é atuar **exclusivamente no regime transitório**, reduzindo os tempos de resposta quando se altera a referência a ser acompanhada, mitigando eventuais sobressinais (por meio da introdução de um efeito amortecedor).

Em geral, a ação derivativa se caracteriza por:

- “antecipar-se” à ação do controle proporcional puro, promovendo correção acentuada para grandes variações de $e(t)$ (há risco de ocorrer saturação na atuação, no entanto).
- amplificar o efeito de ruídos de medição na resposta do sistema em MF, o que torna difícil, na prática, a sintonia do ganho derivativo.

Ação derivativa utilizando um *amp op*

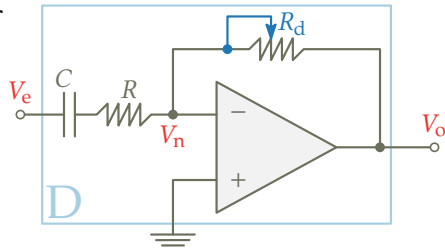
Uma ação derivativa de controle também pode ser produzida por meio de um dispositivo eletrônico baseado em um *amp op* como o mostrado na figura ao lado. Uma vez que, no terminal não-inversor $V_p = 0$, e:

$$Z_1(s) = R + \frac{1}{Cs} \quad \text{e} \quad Z_2(s) = R_d$$

a expressão aproximada ($A \gg 1$) para a relação entre V_o e V_e se torna:

$$V_o(s) \approx -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} V_e(s) = -\frac{T_d s}{\frac{T_d s}{N_d} + 1} V_e(s)$$

com $T_d = R_d C$ e $N_d = \frac{R_d}{R} \gg 1$. Para $|s| \ll \frac{N_d}{T_d} = \frac{1}{RC}$, tem-se: $\frac{V_o(s)}{V_e(s)} \approx -T_d s$.

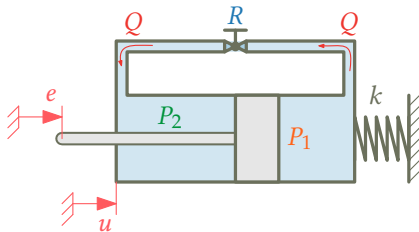


Ação derivativa usando um amortecedor hidráulico

O dispositivo ao lado representa um amortecedor hidráulico, que pode ser usado para produzir uma ação de controle derivativa:

- Admitindo efeitos inerciais desprezíveis, do balanço de forças sobre o cilindro, temos:

$$P_1 A - P_2 A - k u = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{k}{A} u$$



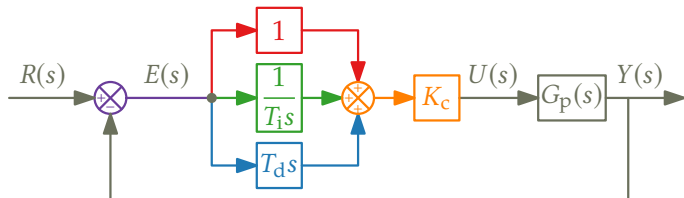
Adaptado de [2]

- Admitindo uma resistência linear para a válvula, da variação de volume na câmara esquerda, temos:

$$\frac{P_1 - P_2}{R} = Q = \frac{dV_2}{dt} = A \frac{d(e - u)}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{1}{T_d} u = \frac{de}{dt} \quad \text{com} \quad T_d = \frac{R A^2}{k}$$

Este sistema corresponde à FT: $\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{T_d s}{T_d s + 1} \approx T_d s$ para $|s| \ll \frac{1}{T_d}$.

Controlador PID



Um controlador PID reúne, em um único dispositivo, as ações **proporcional**, **integral** e **derivativa**, sendo sintonizado pelo ajuste de três parâmetros:

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad \text{com} \quad K_p = K_c, \quad K_i = \frac{K_c}{T_i} \quad \text{e} \quad K_d = K_c T_d$$

- Quando $K_d = 0$ ($T_d = 0$), temos um controlador **PI** (**proporcional-integral**).
- Quando $K_i = 0$ ($T_i \rightarrow \infty$), temos um controlador **PD** (**proporcional-derivativo**).

Soma e diferença de sinais usando *amp op*

Na configuração da figura superior notamos que:

$$Z_1 = Z_2 = R \quad \text{e} \quad \frac{V_2 - V_p}{R} = \frac{V_p}{R} \Rightarrow V_p = \frac{V_2}{2}$$

Assim, a tensão de saída do *amp op* ($A \gg 1$) é:

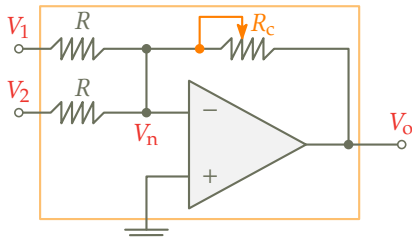
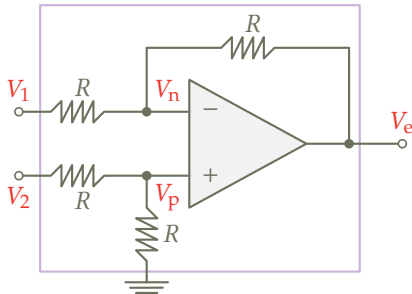
$$V_e \approx V_2 - V_1$$

Já na configuração da figura inferior:

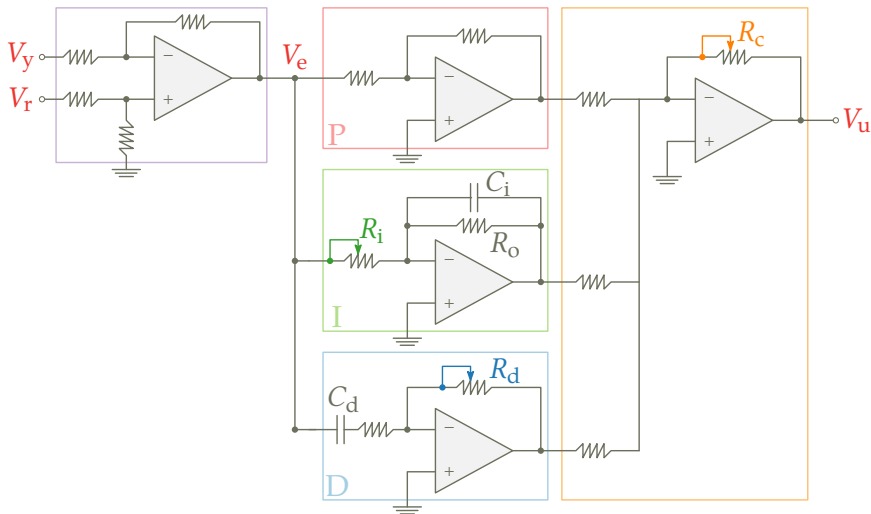
$$V_p = 0 \quad \text{e} \quad V_o = -AV_n \Rightarrow V_n = -\frac{V_o}{A} \approx 0$$

Assim, para o nó V_n :

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - V_n}{R} + \frac{V_2 - V_n}{R} &= \frac{V_n - V_o}{R_c} \\ \Rightarrow V_o &\approx -\frac{R_c}{R}(V_1 + V_2) \end{aligned}$$



Controlador eletrônico PID

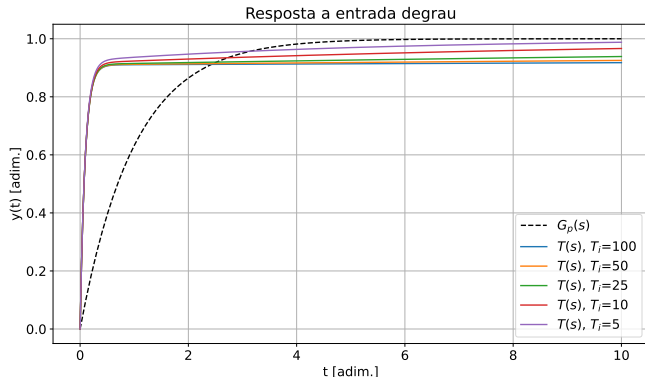


Controle PI em um sistema de primeira ordem

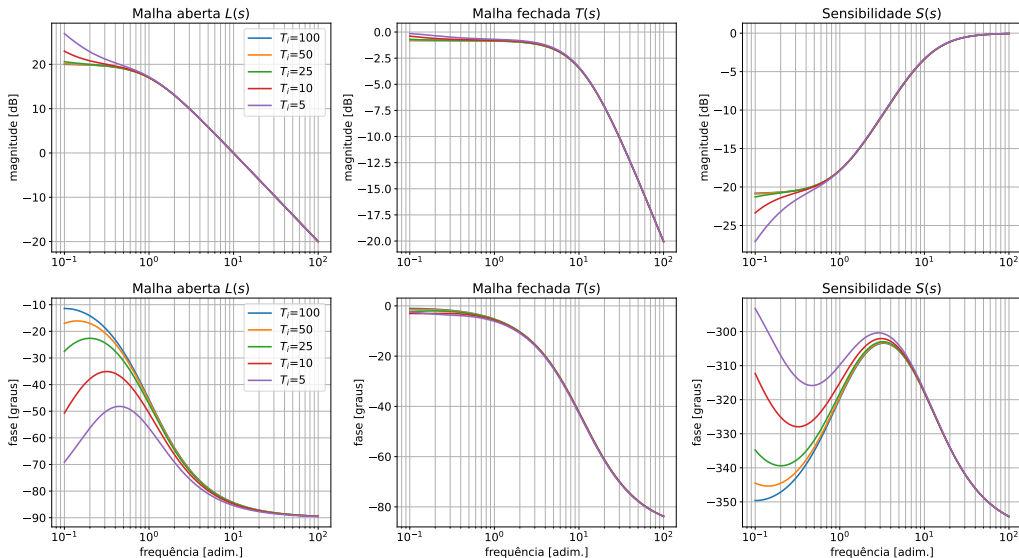
Considere um sistema de primeira ordem munido de um controlador PI:

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{e} \quad G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad \text{com} \quad K_c = 10$$

Avaliamos a resposta a degrau e a resposta em frequência do sistema em função de T_i .



Controle PI em um sistema de primeira ordem

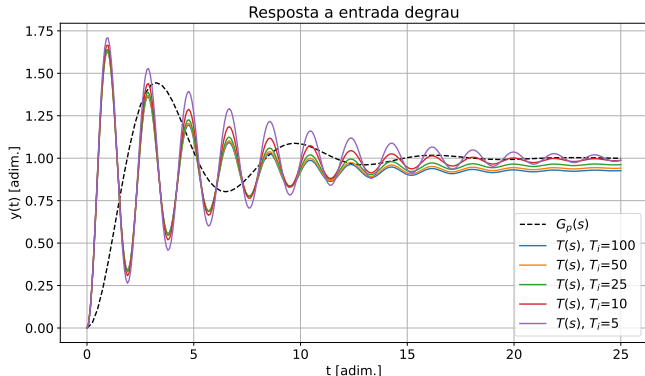


Controle PI em um sistema de segunda ordem

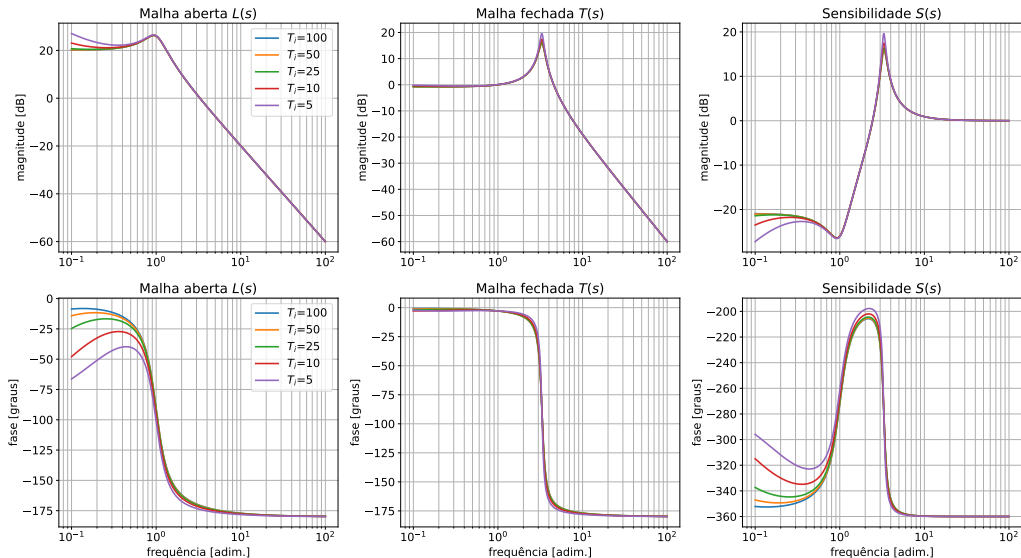
Considere um sistema de segunda ordem munido de um controlador PI:

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \quad \text{com} \quad \zeta = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad \text{com} \quad K_c = 10$$

Avaliamos a resposta a degrau e a resposta em frequência do sistema em função de T_i .



Controle PI em um sistema de segunda ordem

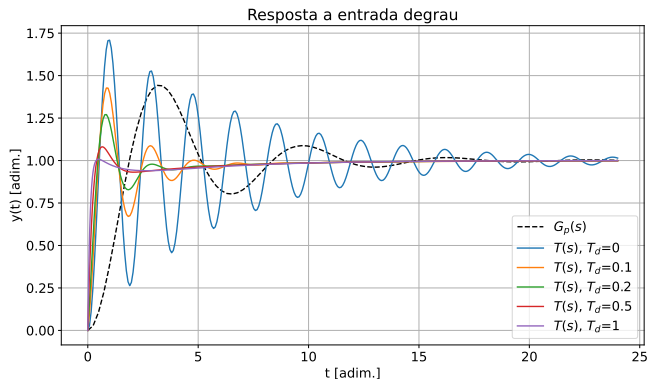


Controle PID em um sistema de segunda ordem

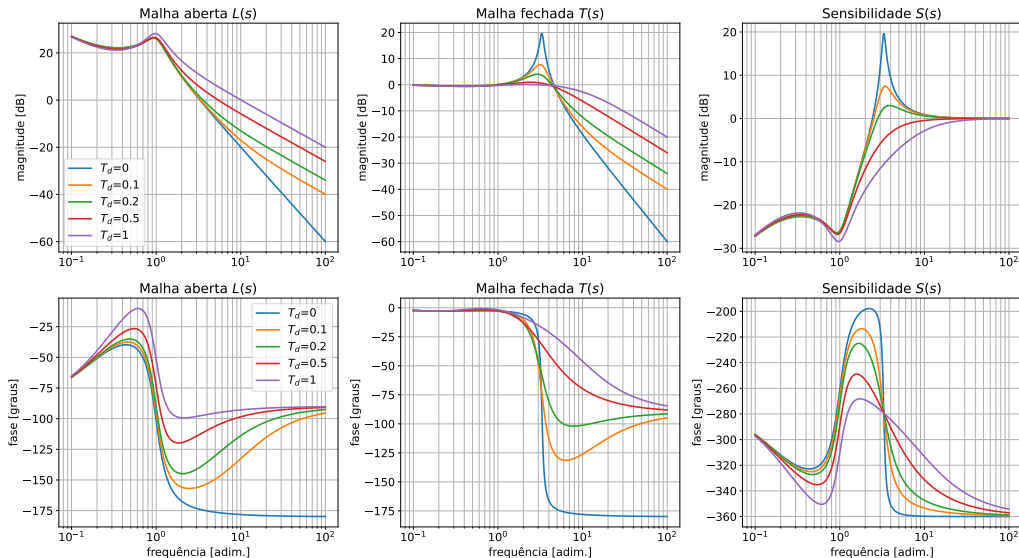
Considere um sistema de segunda ordem munido de um controlador PID:

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \text{ com } \zeta = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \text{ com } \begin{cases} K_c = 10 \\ T_i = 5 \end{cases}$$

Avaliamos a resposta a degrau e a resposta em frequência do sistema em função de T_d .



Controle PID em um sistema de segunda ordem



Sintonia de controladores

Métodos de Ziegler-Nichols

Dois métodos empíricos para a sintonia de controladores PID foram desenvolvidos pelos pesquisadores por [John G. Ziegler](#) e [Nathaniel B. Nichols](#) em 1942 [3], quando ambos eram engenheiros da *Taylor Instrument Company*.

Esta contribuição deve ser entendida dentro do contexto da época:

- A teoria de controle era uma novidade à época e boa parte dos engenheiros não tinha formação específica na área.
- Os controladores PID seriam usados predominantemente na automação de processos e plantas industriais já existentes, de comportamentos já conhecidos e, por vezes, desenvolvidos com tecnologias anteriores de sensoriamento e atuação.

Em ambos os métodos, experimentos são feitos para levantar dois parâmetros característicos da planta. Disponibilizam-se tabelas para calcular, por meio de operações elementares com os parâmetros levantados, os valores recomendáveis de K_c , T_i e T_d para a sintonia de controladores P, PI e PID.

Método da curva em “S” (ou curva de reação)

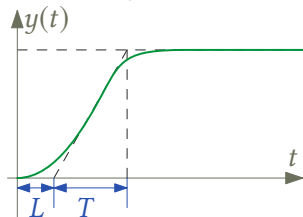
Para este método de sintonia é necessário que:

- o sistema seja estável em malha aberta;
- seja seguro excitá-lo em **malha aberta** com uma entrada do tipo degrau;
- a **resposta em MA** a uma entrada degrau tenha formato “S” como indicado na figura ao lado.

Traçando uma reta tangente ao ponto de inflexão da curva (ponto de máxima derivada temporal de $y(t)$), identificamos os valores de T e L indicados. Por meio de tais valores, aproximamos a FTMA do sistema como:

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

e podemos projetar controladores dos tipos P, PI ou PID ajustando os valores de K_c , T_i e T_d conforme a tabela.



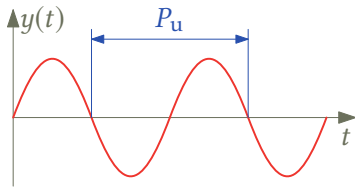
$G_c(s)$	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	—	—
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	—
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$\frac{L}{2}$

Método do ganho limite

Para este método de sintonia é necessário que seja possível operar o sistema de forma estável e segura em **malha fechada**, utilizando controle exclusivamente proporcional, com $0 < K_c < K_u$.

Neste método, a planta inicia sua operação em **malha fechada** mantendo $K_i = 0$ ($T_i \rightarrow \infty$) e $K_d = 0$ ($T_d = 0$). Varia-se de forma crescente o valor de K_c , gradualmente a partir de 0, até identificar o valor crítico $K_c = K_u$ (*ultimate gain*) para o qual a resposta a condições iniciais (ou a um impulso) deixa de decair no tempo, mantendo uma oscilação de amplitude praticamente constante e período P_u em **regime permanente**.

Projetamos então controladores dos tipos P, PI ou PID ajustando os valores de K_c , T_i e T_d conforme a tabela.



$G_c(s)$	K_c	T_i	T_d
P	$0.5 K_u$	—	—
PI	$0.45 K_u$	$\frac{P_u}{1.2}$	—
PID	$0.6 K_u$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{8}$

Método do ganho limite

Caso um modelo matemático esteja disponível para a planta, podemos adotar a notação abaixo em que $N_p(s)$ e $D_p(s)$ são *polinômios* em s representando o **numerador** e o **denominador** de $G_p(s)$:

$$G_c(s) = K_c, \quad G_p(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad L(s) = K_c \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad \text{e} \quad T(s) = \frac{K_c N_p(s)}{D_p(s) + K_c N_p(s)}$$

Assim, o intervalo de valores de K_c para os quais o sistema em **malha fechada** é estável pode ser obtido a partir da **tabela de Routh** do polinômio $D_p(s) + K_c N_p(s)$.

Por exemplo, para uma planta de terceira ordem com:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2\zeta s + 1)}$$

Construindo a tabela de ao lado para o polinômio característico da respectiva FTMF com controle P, verificamos que, para a estabilidade do sistema em MF:

$$0 < K_c < 2\zeta \quad \Rightarrow \quad K_u = 2\zeta$$

$$D_p(s) + K_c N_p(s) = s^3 + 2\zeta s^2 + s + K_c$$

s^3	1	1
s^2	2ζ	K_c
s^1	$\frac{2\zeta - K_c}{2\zeta}$	
s^0	K_c	

Método do ganho limite

A frequência natural associada ao ganho crítico K_u corresponde às raízes imaginárias do **polinômio auxiliar** (obtido na primeira linha acima da linha de zeros da tabela de Routh):

$$2\zeta(s^2 + 1) = 0 \Rightarrow s = \pm j \Rightarrow \omega_u = 1 \Rightarrow P_u = \frac{2\pi}{\omega_u} = 2\pi$$

Assim, obtemos o controlador PID, a FTMA e a FTMF:

$$G_c(s) = \frac{3\zeta}{5} \left(1 + \frac{1}{\pi s} + \frac{\pi}{4}s \right) = \frac{3\zeta}{20\pi} \frac{(\pi s + 2)^2}{s}$$

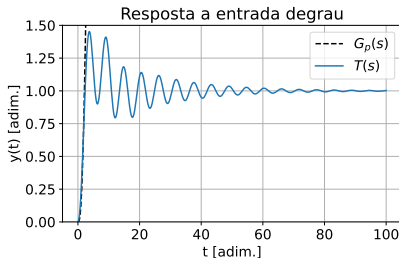
$$L(s) = \frac{3\zeta}{20\pi} \frac{(\pi s + 2)^2}{s^2(s^2 + 2\zeta s + 1)}$$

$$T(s) = \frac{3\zeta(\pi s + 2)^2}{20\pi s^2(s^2 + 2\zeta s + 1) + 3\zeta(\pi s + 2)^2}$$

O gráfico ao lado compara as respostas a uma entrada degrau do sistema em malha aberta e do sistema em malha fechada com o controlador PID projetado.

$$D_p(s) + K_c N_p(s) = s^3 + 2\zeta s^2 + s + 2\zeta$$

s^3	1	1
s^2	2ζ	2ζ
s^1	0	
s^0	2ζ	



Índices de desempenho global

Ainda que soluções empíricas para a sintonia de controladores sejam métodos simples e de grande utilidade prática, sua aplicação naturalmente se limita às classes de sistemas utilizados para o ajuste experimental dos parâmetros.

Um critério mais genérico para a comparação entre controladores com sintonias distintas consiste em definir **índices (quantitativos) de desempenho global** que permitam ao projetista selecionar as sintonias de “melhor desempenho”.

A forma típica para definir um índice de desempenho I consiste em definir uma integral temporal de uma **função convexa** a valores reais f , que pode ter como argumentos o erro de acompanhamento de referência $\mathbf{e}(t)$, a entrada de controle $\mathbf{u}(t)$ e o tempo t :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{e}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

Tal índice penaliza desempenhos insatisfatórios tanto em termos de erro de acompanhamento quanto de excessos nas entradas de controle. O **desempenho ótimo** segundo este critério seria obtido com uma sintonia de controlador que **minimize I** .

Índices de desempenho global

Alguns dos índices de desempenho mais utilizados na literatura do controle clássico para sistemas SISO são baseados apenas no erro de acompanhamento $e(t)$ de uma referência padrão, computado desde o instante inicial até o tempo de acomodação t_a :

- ISE (*Integral of Squared Error*) = $\int_0^{t_a} e^2(t) dt$

- ITSE (*Integral of Time-weighted Squared Error*) = $\int_0^{t_a} te^2(t) dt$

- IAE (*Integral of Absolute Error*) = $\int_0^{t_a} |e(t)| dt$

- ITAE (*Integral of Time-weighted Absolute Error*) = $\int_0^{t_a} t|e(t)| dt$

A presença do tempo como peso ponderador visa melhorar a **seletividade** do critério, reduzindo a importância relativa dos instantes iniciais do regime transitório, em que os erros serão sempre elevados independentemente do controlador adotado.

Índices de desempenho e sintonia de controladores

Utilizando índices de desempenho, pode-se estabelecer algumas estratégias para a sintonia de controladores:

- 1 Selecionar, dentre um conjunto de controladores com diferentes sintonias, o que tem o melhor desempenho segundo um dado índice.
- 2 Propor um algoritmo de otimização que, partindo de uma sintonia inicial, ajuste iterativamente os parâmetros do controlador de forma a encontrar uma sintonia ótima segundo o índice escolhido.
- 3 Expressar os coeficientes do denominador da FTMF em função dos parâmetros do controlador e verificar qual ajuste iguala (ou aproxima) esses coeficientes aos do denominador de uma FTMF de mesma ordem que esteja tabelada como solução ótima segundo um dado índice.

*FTMFs ITAE-ótimas para resposta a degrau

Uma função de transferência de malha fechada (FTMF) de ordem n que tem resposta ótima, [segundo o índice ITAE](#), a um sinal degrau tem sua expressão dada por [4]:

$$T(s) = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

Os denominadores para as ordens $n = 1$ a 6 são dados por:

$$\begin{aligned} & s + \omega_n \\ & s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2 \\ & s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\ & s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\ & s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5 \\ & s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6 \end{aligned}$$

*FTMFs ITAE-ótimas para resposta a rampa

Uma função de transferência de malha fechada (FTMF) de ordem n que tem resposta ótima, [segundo o índice ITAE](#), a um sinal degrau tem sua expressão dada por [4]:

$$T(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

Os denominadores para as ordens $n = 2$ a 5 são dados por:

$$\begin{aligned} & s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2 \\ & s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3 \\ & s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4 \\ & s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5 \end{aligned}$$

Referências

- [1] Mayr, O. (1975). *The Origins of Feedback Control*. MIT Press.
- [2] Ogata, K. (2004). *System dynamics*. 4^a edição. Pearson/Prentice Hall.
- [3] Ziegler, J. G.; Nichols, N. B. (1942). *Optimum Settings for Automatic Controllers*. Transactions of the ASME. 64: 759–768
- [4] Dorf, R.; Bishop, R. (2017). *Modern Control Systems*. 13^a edição. Pearson International.