



Controle e Aplicações

Controle por realimentação – fundamentos

Renato Maia Matarazzo Orsino
reorsino@usp.br



Conteúdo

1 O mecanismo de realimentação (*feedback*)

- Objetivos gerais de projeto de um sistema de controle
- Álgebra de diagramas de blocos (revisão)
- Resposta em malha fechada a sinais de referência, distúrbio e ruído
- Efeito do controlador na resposta em malha fechada
- Efeito do ganho do controlador para sistemas SISO

2 Sistemas de controle

- Elementos de um sistema controlado
- Mapa da teoria de controle

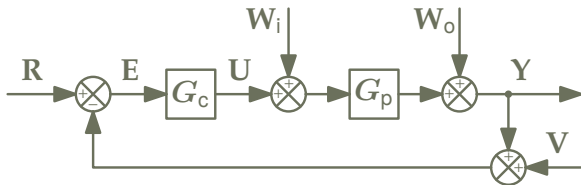
O mecanismo de realimentação (*feedback*)

Controle por realimentação

Considere um sistema ou processo representado por meio de um modelo matemático linear, em princípio considerado como uma função de transferência G_p que expressa as relações entre:

- entradas de controle
- saídas medidas

Propõe-se um sistema de controle representado ao lado, munido de um controlador G_c que deve ser projetado para que a dinâmica do sistema em malha fechada atenda a certos requisitos.



Entradas do sistema:

- 1 R – sinal de referência
- 2 W_i – perturbação na entrada da planta
- 3 W_o – perturbação na saída da planta
- 4 V – ruído na medição da saída

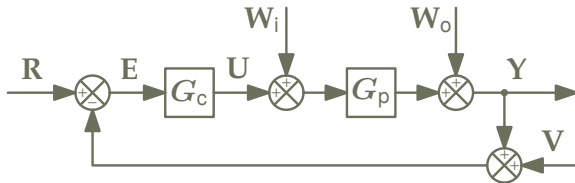
Objetivos de projeto de um sistema de controle

Deseja-se que a dinâmica de um **sistema em malha fechada** tenha as seguintes características, *não necessariamente presentes na planta original*:

- 1 **Resposta estável** – o sistema em malha fechada deve ser estável, ainda que a planta seja originalmente instável.
- 2 **Acompanhamento de referências** – o sistema em malha fechada deve ser capaz de acompanhar sinais de referência, reduzindo os tempos de resposta transitória.
- 3 **Rejeição de perturbações** – entradas indesejáveis, tipicamente *não-modeladas*, devem ter seu efeito minimizado na resposta do sistema em malha fechada.
- 4 **Robustez** – o sistema em malha fechada deve ter baixa sensibilidade a erros de medição e a variações de comportamento dinâmico da planta.

Limitações das mais diversas naturezas podem levar o projetista a ter que buscar **soluções de compromisso**, priorizando certos objetivos. Independentemente das dificuldades encontradas, é sempre fundamental garantir, *com certa robustez*, a **estabilidade do sistema em malha fechada**.

Resposta do sistema em malha fechada



Considerando que o modelo matemático é linear, pode-se adotar o **princípio de superposição** para obter a resposta do **sistema em malha fechada**¹:

$$Y(s) = T_r(s)R(s) + T_i(s)W_i(s) + T_o(s)W_o(s) + T_v(s)V(s) \quad (1)$$

Os objetivos de controle seriam “idealmente” cumpridos se fosse possível projetar o controlador $G_c(s)$ de tal forma que a **função de transferência** $T_r(s)$ fosse uma **função identidade** e as **funções de transferência** $T_i(s)$, $T_o(s)$ e $T_v(s)$ fossem **nulas**.

¹A **resposta transitória** a eventuais **condições iniciais** do sistema é desprezada nesta expressão. Tal simplificação somente é possível porque, em malha fechada, o sistema é estável.

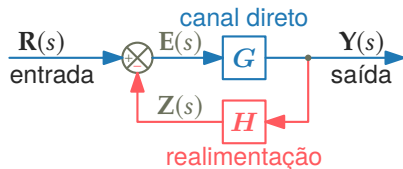
Álgebra de diagramas de blocos (revisão)

Na simplificação de um diagrama de blocos de um sistema em malha fechada, identificamos as seguintes funções de transferência (FTs):

- 1 O canal direto $G(s)$.
- 2 O canal de realimentação $H(s)$.
- 3 A malha aberta $L(s)$, dada pela associação em série das FTs dos canais $G(s)$ e $H(s)$:

$$L(s) = H(s)G(s)$$

- 4 A sensibilidade $S(s)$ que fornece a relação direta entre o sinal de entrada e o sinal $E(s)$.
- 5 A malha fechada $T(s)$, que fornece a relação direta entre os sinais de entrada e saída.



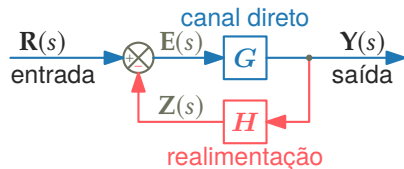
Álgebra de diagramas de blocos (revisão)

Para a obtenção de uma expressão explícita para a FT de sensibilidade $S(s)$, note que:

$$E(s) = R(s) - Z(s)$$

$$Z(s) = H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E(s)$$



Assim:

$$E(s) = R(s) - H(s)G(s)E(s)$$

$$[I + H(s)G(s)] E(s) = R(s)$$

de onde decorre que $E(s) = S(s)R(s)$ com:



$$S(s) = [I + H(s)G(s)]^{-1} = [I + L(s)]^{-1} \quad (2)$$

Álgebra de diagramas de blocos (revisão)

Finalmente, uma vez que:

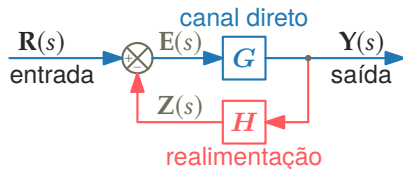
$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)S(s)R(s) = T(s)R(s)$$

identificamos a expressão para a **função de transferência em malha fechada (FTMF)**:

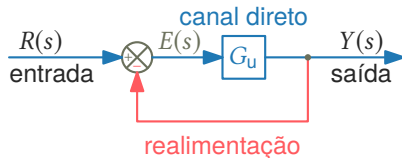
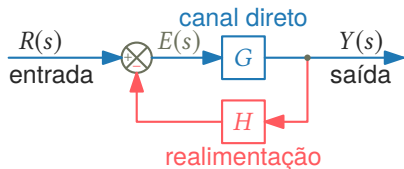
$$T(s) = G(s)S(s) = G(s) [I + L(s)]^{-1} \quad (3)$$

Em particular, para um sistema de **realimentação unitária** $H(s) = I$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} S(s) = [I + G(s)]^{-1} \\ T(s) = G(s) [I + G(s)]^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow T(s) + S(s) = I$$



Realimentação unitária equivalente – sistemas SISO



Em particular, para um **sistema SISO** (*single input, single output*), tanto os sinais quanto as FTs são escalares e, portanto:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad \text{e} \quad T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

No caso de um sistema SISO é sempre possível obter um sistema equivalente com **realimentação unitária** e **canal direto** $G_u(s)$ satisfazendo à relação:

$$T(s) = \frac{N_T(s)}{D_T(s)} = \frac{G_u(s)}{1 + G_u(s)} \quad \Leftrightarrow \quad G_u(s) = \frac{N_T(s)}{D_T(s) - N_T(s)}$$

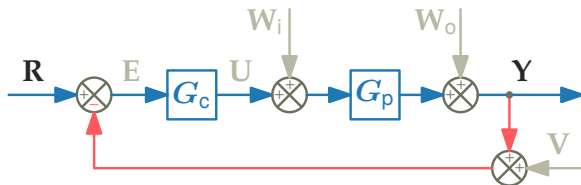
Resposta do sistema em malha fechada

Sinais de referência

Canal direto: $G_r(s) = G_p(s)G_c(s)$

Realimentação: $H_r(s) = I$

$$T_r(s) = G_p G_c [I + G_p G_c]^{-1}$$

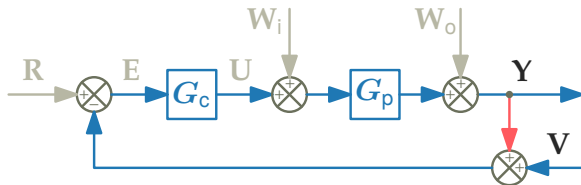


Sinais de ruído de medição

Canal direto: $G_v(s) = -G_p(s)G_c(s)$

Realimentação: $H_v(s) = -I$

$$T_v(s) = -G_p G_c [I + G_p G_c]^{-1}$$



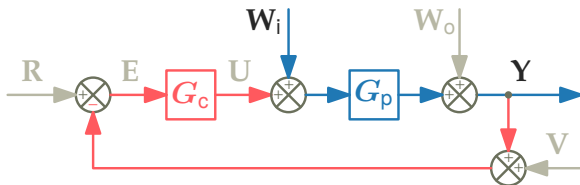
Resposta do sistema em malha fechada

Perturbações na entrada da planta

Canal direto: $G_i(s) = G_p(s)$

Realimentação: $H_i(s) = G_c(s)$

$$T_i(s) = G_p [I + G_p G_c]^{-1}$$

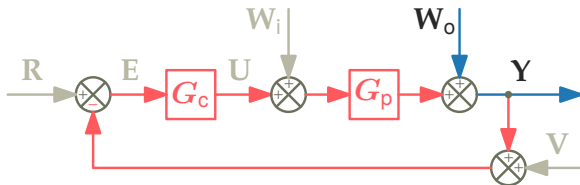


Perturbações na saída da planta

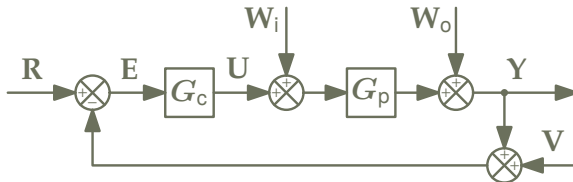
Canal direto: $G_o(s) = I$

Realimentação: $H_o(s) = G_p(s)G_c(s)$

$$T_o(s) = [I + G_p G_c]^{-1} = S(s)$$



Resposta do sistema em malha fechada



Assim, de acordo com a Eq. (1):

$$Y = T_r R + T_i W_i + T_o W_o + T_v V = G_p G_c S R + G_p S W_i + S W_o - G_p G_c S V \quad (4)$$

com $S(s) = [I + G_p G_c]^{-1}$ representando a **sensibilidade do sistema em malha fechada**.

A Eq. (4) permite identificar uma primeira limitação de projeto: as capacidades de **acompanhamento de sinais de referência** e **rejeição de ruídos de medição** são **objetivos conflitantes**, uma vez que $T_r = -T_v$, sendo impossível aproximar simultaneamente a primeira FT de uma função identidade e a segunda de uma função nula.

Efeito do controlador projetado

Apenas como exercício, observemos o que ocorreria em situações limite, nas quais a função de transferência do controlador $G_c(s)$ tenda, em norma, a infinito ou a zero.

- 1 $\|G_c(s)\| \rightarrow \infty$: o sistema teria **boa capacidade de seguir referências e rejeitar perturbações aplicadas à planta**, mas não seria capaz de rejeitar o efeito de ruídos de medição.

$$S(s) = [I + G_p(s)G_c(s)]^{-1} \approx [G_p(s)G_c(s)]^{-1} \rightarrow 0$$

$$T_r(s) = -T_v(s) = G_p(s)G_c(s)S(s) \rightarrow I$$

$$T_i(s) = G_p(s)S(s) \rightarrow 0 \quad T_o(s) = S(s) \rightarrow 0$$

- 2 $\|G_c(s)\| \rightarrow 0$: o sistema seria **capaz de rejeitar o efeito de ruídos de medição**, mas não de seguir referências ou de rejeitar perturbações aplicadas à planta.

$$S(s) = [I + G_p(s)G_c(s)]^{-1} \rightarrow I$$

$$T_r(s) = -T_v(s) = G_p(s)G_c(s)S(s) \rightarrow 0$$

$$T_i(s) = G_p(s)S(s) \rightarrow G_p(s) \quad T_o(s) = S(s) \rightarrow I$$

Efeito do ganho do controlador – sistemas SISO

Para um **sistema SISO** (*single input, single output*), considere um controlador da forma:

$$G_c(s) = K_c \bar{G}_c(s)$$

com $\bar{G}_c(s)$ denotando uma função de transferência de estrutura e parâmetros já conhecidos e K um **ganho escalar** a ser ajustado. Note que, neste cenário:

$$Y(s) = \frac{K_c \bar{G}_c(s) G_p(s) (R(s) - V(s)) + G_p(s) W_i(s) + W_o(s)}{1 + K_c \bar{G}_c(s) G_p(s)}$$

Para a **estabilidade do sistema em malha fechada** é fundamental garantir que:

$$L(s) = K_c \bar{G}_c(s) G_p(s) \neq -1 \quad \text{sempre que} \quad \text{Re}(s) > 0$$

Note ainda que:

- aumentar o ganho K_c favorece as capacidades de seguir referências e de rejeitar perturbações aplicadas à planta;
- reduzir o ganho K_c favorece a capacidade de rejeitar o efeito de ruídos de medição.

Efeito do ganho do controlador – sistemas SISO

Observamos assim que, para um **sistema SISO** (*single input, single output*), a **função de transferência de malha aberta** $L(s)$ contém em sua estrutura toda a informação necessária para **determinar a resposta do sistema em malha fechada** e, portanto, para **projetar o controlador** em si.

Exercício

Adotando a notação “*numerador/denominador*”:

$$G_c(s) = K_c \frac{N_c(s)}{D_c(s)}, \quad G_p(s) = K_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad \text{e} \quad L(s) = K_c K_p \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \frac{N_p(s)}{D_p(s)} = K \frac{N(s)}{D(s)}$$

mostre que:

$$T_r(s) = -T_v(s) = \frac{KN(s)}{D(s) + KN(s)}, \quad T_i(s) = \frac{K_p N_p(s) D_c(s)}{D(s) + KN(s)} \quad \text{e} \quad S(s) = \frac{D(s)}{D(s) + KN(s)}$$

Polos em malha fechada – sistemas SISO

Seja $L(s) = K \frac{N(s)}{D(s)}$, $K > 0$, a **função de transferência em malha aberta (FTMA)**.

O número complexo s é um **polo em malha fechada** se, e somente se:

$$D(s) + KN(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{K}D(s) + N(s) = 0$$

Se $K \rightarrow 0$, os **polos em malha aberta** se tornam **polos em malha fechada**.

Se $K \rightarrow \infty$, os **zeros em malha aberta** se tornam **polos em malha fechada**.

Assim, um número complexo s só poderá ser um **polo em malha fechada** se existir um número real $0 < K < \infty$ tal que:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{N(s)}{D(s)} \right| = \frac{1}{K} \quad \text{e} \quad \angle N(s) - \angle D(s) \equiv 180^\circ$$

As condições necessárias para que s seja um **polo em malha fechada** podem ser verificadas a partir da **função de transferência em malha aberta**.

Lugar das raízes – sistemas SISO

O **lugar das raízes** é o conjunto das possíveis posições de **pólos em malha fechada** obtidos a partir da seleção de um valor para o ganho $K > 0$, ou seja, o lugar geométrico dos $s \in \mathbb{C}$ tais que:

$$\angle L(s) = \angle N(s) - \angle D(s) \equiv 180^\circ$$

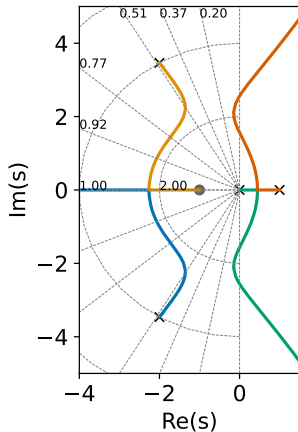
$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 360^\circ h$ para algum $h \in \mathbb{Z}$.

O exemplo ao lado ilustra o lugar das raízes da função de transferência do tipo $m = 1$:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = \frac{K(s+1)}{s^4+3s^3+12s^2-16s}$$

× polos de MA

• zeros de MA



Barreiras de projeto – sistemas SISO

Uma vez assegurada a **estabilidade do sistema em malha fechada** é possível buscar **conciliar os demais objetivos** do sistema de controle.

Sabemos que, em **malha fechada**, as capacidades de acompanhar sinais de referência e de rejeitar perturbações sobre a planta são **conflitantes** com a capacidade de rejeitar o efeito de ruídos de medição. No entanto, notamos que:

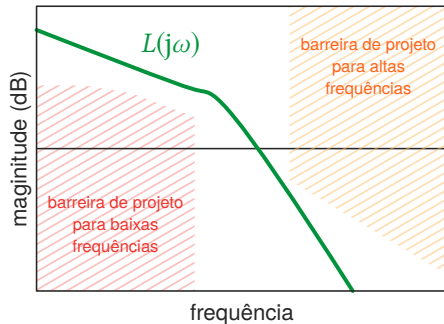
- Via de regra, os sinais de perturbação que afetam a planta têm suas componentes principais predominantemente concentradas em um intervalo do tipo $0 < \omega < \underline{\omega}$.
- O ruído de medição, por sua vez, tem suas principais componentes concentradas em altas frequências, ou seja, para $\omega > \overline{\omega}$. Tipicamente, $\overline{\omega} \gg \underline{\omega}$.
- Não é adequado sinais de referência com componentes em alta frequência:
 - pela possibilidade de contaminação com o ruído de medição;
 - por incertezas quanto ao comportamento do sistema (certos fenômenos nesta faixa de frequências podem não ser bem representados pelo modelo);
 - pelo elevado consumo de energia de atuação para acompanhar estes sinais.

Barreiras de projeto – sistemas SISO

Dessa forma, uma vez assegurada a estabilidade em malha fechada:

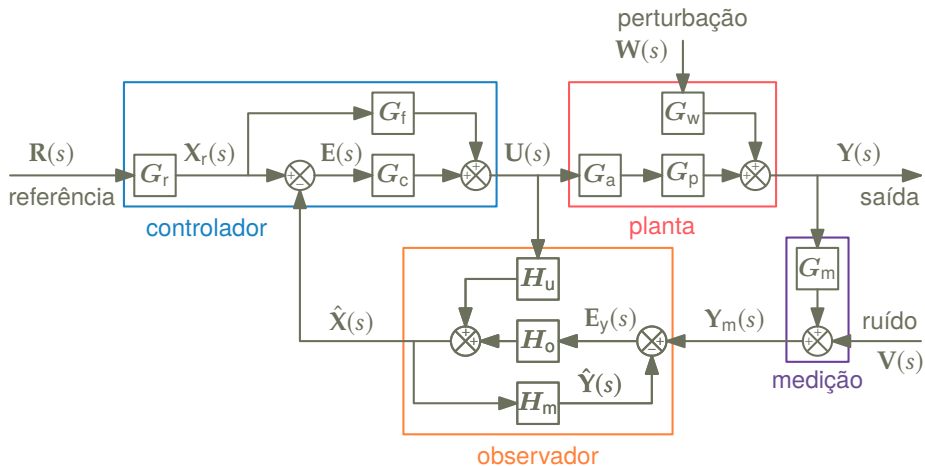
- Em “baixas frequências”, a principal preocupação do projetista deve ser com o acompanhamento de referências e a capacidade de rejeição de perturbações impostas à planta. Assim, deve haver uma **barreira de projeto que imponha $|L(j\omega)|$ “grande” no intervalo $0 < \omega < \underline{\omega}$.**
- Em “altas frequências”, a principal preocupação do projetista deve ser com a capacidade de rejeitar efeitos dos ruídos de medição. Deve-se definir assim uma **barreira de projeto que imponha $|L(j\omega)|$ “pequeno” no intervalo $\omega > \bar{\omega}$.**

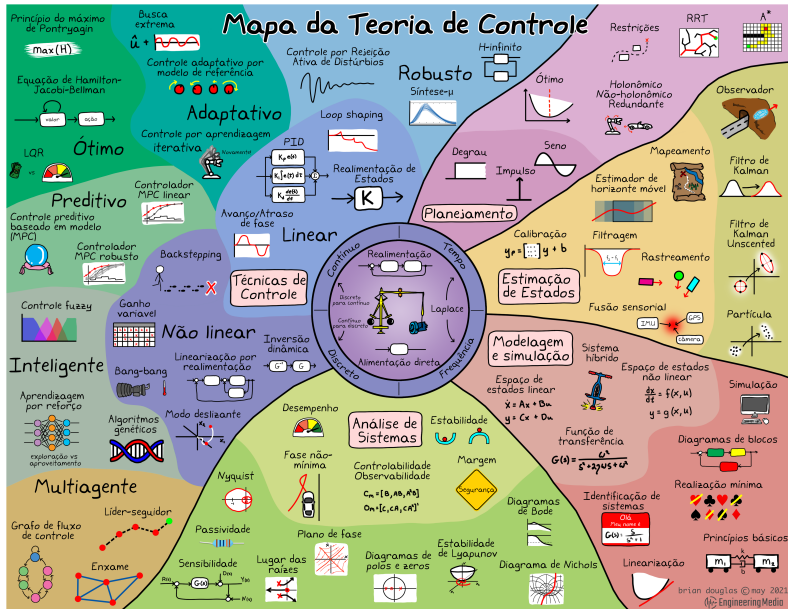
Ao não exigir do controlador que mantenha $|L(s)|$ “grande” em altas frequências, o critério de projeto também ajuda a evitar o superdimensionamento dos atuadores.



Sistemas de controle

Elementos de um sistema controlado





Autor: Brian Douglas
(Engineering Media)