PME 3100 – Mecânica I

Aula de Exercícios – P3

Dinâmica do Corpo Rígido (TQM, TQMA, TEC)

Prof. Francisco J. Profito
fprofito@usp.br

❑ P3–Q3–2014

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): A barra homogênea AB, de comprimento L e massa M, parte do repouso em $\theta = \theta_0$; nessa posição inicial a mola linear de constante elástica k está indeformada, isto é, o seu comprimento natural é $L\text{sen}\theta_0$. Os roletes em A e B tem massa desprezível e atrito nulo. As extremidades da mola estão nos pontos D (fixo) e B. Pede-se:

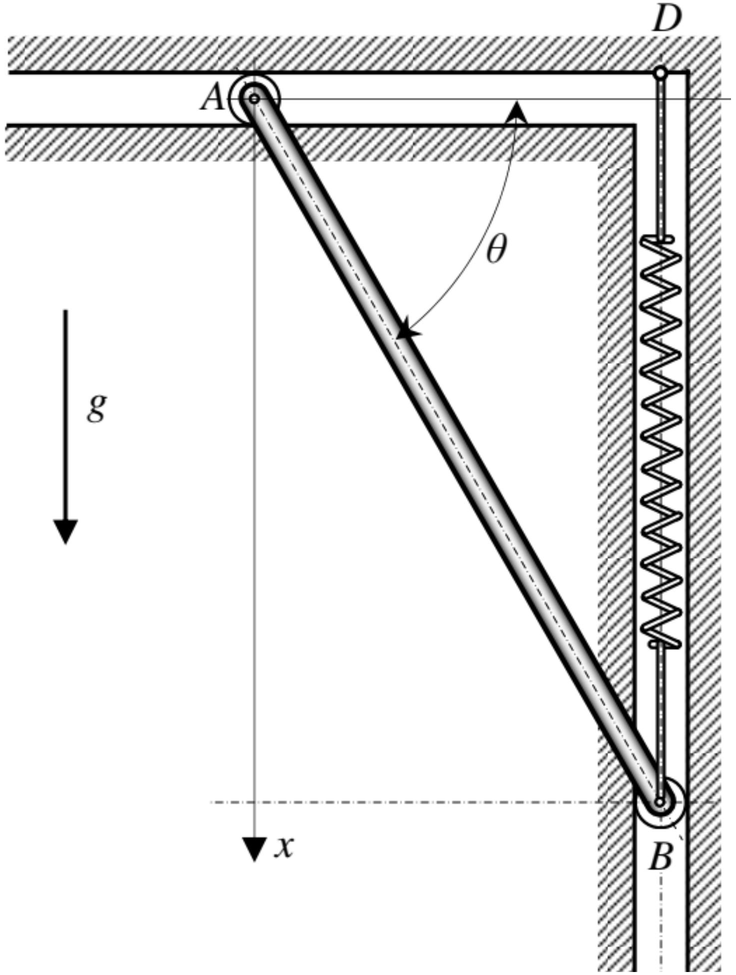
a) O diagrama de corpo livre da barra correspondente a $\theta_0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

b) A energia cinética da barra em função de seus parâmetros e $\dot{\theta}$.

c) A expressão de $\dot{\theta}$ em função de θ.

d) A relação entre os dados do problema para que o rolete em A não colida com a parede vertical.

$$J_{G\text{barra}} = \frac{M_{\text{barra}} L_{\text{barra}}^2}{12}$$

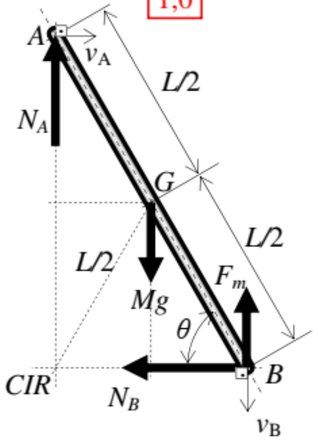


❑ P3–Q3–2014

QUESTÃO 2 (3,5 pontos)

a) DCL

1,0



b) $E = \left[\frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2\right]$ 0,5

Usando o CIR: $v_G = \frac{L}{2}\omega$ 0,5

E como $\omega = \dot{\theta}$:

$$E = \left[\frac{1}{2} M \left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2\right] = \left[\frac{1}{2}\frac{3}{3}\frac{ML^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2\right] \Rightarrow \boxed{E = \frac{ML^2}{6}\dot{\theta}^2}$$

c) Como não há atrito e as forças normais são perpendiculares ao deslocamento, apenas a força peso e a força da mola realizam trabalho. Usando o TEC, partindo do repouso: 0,5 0,5

$$E - E_0 = W^{ext} \Rightarrow \frac{ML^2}{6}\dot{\theta}^2 = Mg\frac{L}{2}(\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta_0) - \frac{k}{2}L^2(\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta_0)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3}{ML}(\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta_0)[Mg - kL(\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta_0)]}}$$

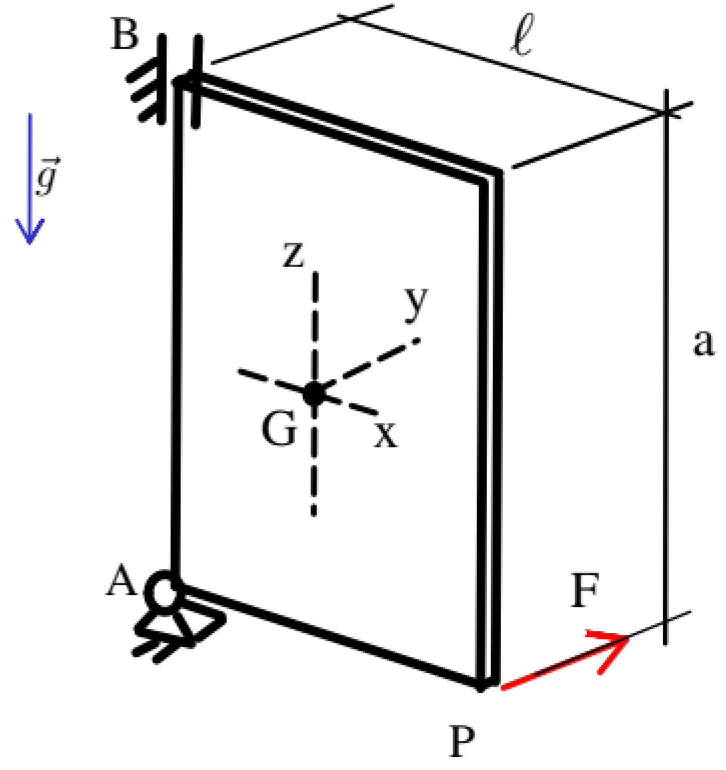
d) Para que a condição seja satisfeita, no limite para $\theta = \pi/2$, devemos ter $\dot{\theta} = 0$:

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow Mg - kL\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \text{sen}\,\theta_0\right) = 0$$

0,5

Portanto: $\boxed{\frac{Mg}{kL} \le (1 - \text{sen}\,\theta_0)}$

Exercício

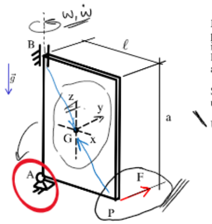


No instante mostrado, a porta de massa m, inicialmente em repouso, é atuada pelo pé de uma pessoa, que exerce a força de módulo F no ponto P na direção e sentido indicados.
Para esse instante, determine a aceleração angular da porta e as reações na articulação ideal A e no anel ideal B.

São conhecidas as dimensões e a matriz central de inércia da porta, considerada uma placa plana de espessura desprezível.

Utilize o sistema de referência Gxyz solidário à porta.

❑ Exercício



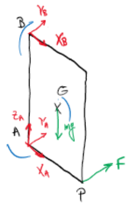
No instante mostrado, a porta de massa m, inicialmente em repouso, é atuada pelo pé de uma pessoa, que exerce a força de módulo F no ponto P na direção e sentido indicados.
Para esse instante, determine a aceleração angular da porta e as reações na articulação ideal A e no anel ideal B.

São conhecidas as dimensões e a matriz central de inércia da porta, considerada uma placa plana de espessura desprezível.

Utilize o sistema de referência Gxyz solidário à porta.

J_{Gx}, J_{Gy}, J_{Gz} : conhecidos!

• DCL:



TQMA (polo G)

$\vec{M}_G = m\,\cancel{(G-G)}\wedge\vec{a}_G + \underbrace{[I]_{Gxyz}\,\vec{\alpha}}_{\text{aceleração angular}} + \underbrace{\vec{\omega}\wedge\left([I]_{Gxyz}\{\vec{\omega}\}\right)}_{\text{momento giroscópico}}$

$= \vec{0}$ (no instante de aplicação da força)

$\vec{M}_G = [I]_{Gxyz}\,\vec{\alpha}$; $\vec{\alpha} = \dot{\omega}\hat{k}$

$$(A-G)\wedge(X_A\hat{i}+Y_A\hat{j}+Z_A\hat{k}) + (B-G)\wedge(X_B\hat{i}+Y_B\hat{j}) + (P-G)\wedge F\hat{j} = \begin{bmatrix} J_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Gz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} = (J_{G_z}\dot{\omega})\hat{k}$$

$$-\left(\frac{L}{2}\hat{i}+\frac{a}{2}\hat{k}\right)\wedge(X_A\hat{i}+Y_A\hat{j}+Z_A\hat{k}) - \left(\frac{L}{2}\hat{i}-\frac{a}{2}\hat{k}\right)\wedge(X_B\hat{i}+Y_B\hat{j}) - \left(-\frac{L}{2}\hat{i}+\frac{a}{2}\hat{k}\right)\wedge F\hat{j} = (J_{G_z}\dot{\omega})\hat{k}$$

$$-\left\{\frac{L}{2}Y_A\hat{k}-\frac{L}{2}Z_A\hat{j}+\frac{a}{2}X_A\hat{j}-\frac{a}{2}Y_A\hat{i}\right\} - \left\{\frac{L}{2}Y_B\hat{k}-\frac{a}{2}X_B\hat{j}+\frac{a}{2}Y_B\hat{i}\right\} - \left\{-\frac{L}{2}F\hat{k}-\frac{a}{2}F\hat{i}\right\} = (J_{G_z}\dot{\omega})\hat{k}$$

$$-\underbrace{\left(-\frac{aY_A}{2}+\frac{aY_B}{2}-\frac{aF}{2}\right)}_{0}\hat{i} - \underbrace{\left(-\frac{LZ_A}{2}+\frac{aX_A}{2}-\frac{aX_B}{2}\right)}_{0}\hat{j} - \left(\frac{LY_A}{2}+\frac{LY_B}{2}-\frac{LF}{2}\right)\hat{k} = (J_{G_z}\dot{\omega})\hat{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &-Y_B+Y_A+F=0 \\ &-a(X_A-X_B)+LZ_A=0 \\ &-Y_A-Y_B+F=\frac{2J_{G_z}\dot{\omega}}{L} \end{aligned}}$$

Incógnitas: $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, \dot{\omega}$

• TQM

$\vec{R} = m\vec{a}_G$; $\vec{a}_G = \cancel{\vec{a}_A} + \vec{\alpha}\wedge(G-A) + \cancel{\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-A)]} = \dot{\omega}\hat{k}\wedge\left(\frac{L}{2}\hat{i}+\cancel{\frac{a}{2}\hat{k}}\right) = \frac{\dot{\omega}L}{2}\hat{j}$

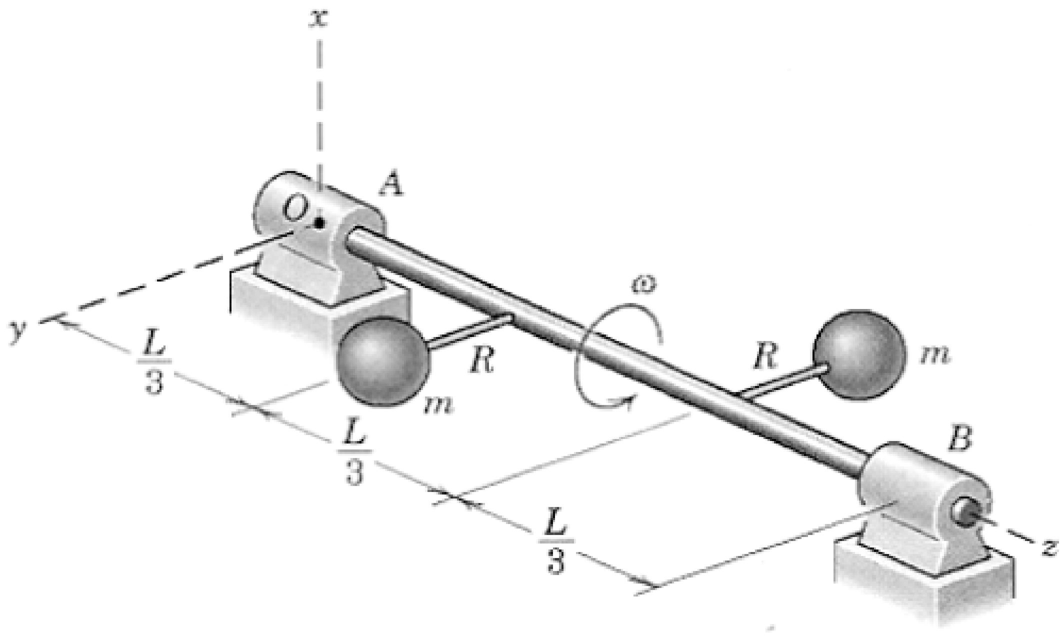
$\vec{0}$, $\vec{\omega}=0$ (inst. após aplicação F)

$\underbrace{(X_A+X_B)}_{=0}\hat{i} + (Y_A+Y_B+F)\hat{j} + \underbrace{(Z_A-mg)}_{=0}\hat{k} = \frac{m\dot{\omega}L}{2}\hat{j}$

$$\boxed{\begin{aligned} &X_A+X_B=0 \\ &Y_A+Y_B+F=\frac{mL\dot{\omega}}{2} \\ &Z_A=mg \end{aligned}}$$

6 incógnitas
6 equações

❑ P1–Q2–2002 (PME3200)



Duas partículas de massa m estão fixas por meio de hastes a um eixo esbelto, conforme a figura. As massas das hastes e do eixo podem ser desprezadas. O sistema $Oxyz$ é solidário ao eixo. Determine as componentes nas direções x e y das reações dinâmicas nos mancais A e B.

P1–Q2–2002 (PME3200)

Aplicando o TMA com pólo em G: $\vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$

$$\vec{H}_G = \{\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\}\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}_{Gxyz}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \omega\left(-J_{xz}\vec{i} - J_{yz}\vec{j} + J_z\vec{k}\right)$$

$$\dot{\vec{H}}_G = \omega\left(-J_{xz}\dot{\vec{i}} - J_{yz}\dot{\vec{j}}\right) = -\omega J_{yz}\dot{\vec{j}} \qquad (pois\ \ J_{xz} = 0)$$

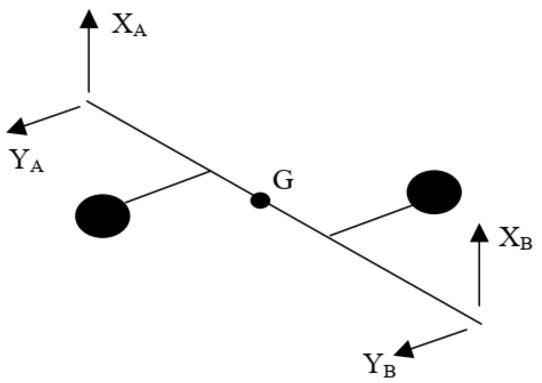
$$\dot{\vec{j}} = \omega\vec{k} \wedge \vec{j} = -\omega\vec{i} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \omega^2 J_{yz}\vec{i} \qquad \left(J_{yz} = mR\left(-\frac{L}{6}\right) + m(-R)\frac{L}{6} = -mR\frac{L}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = -mR\frac{L}{3}\omega^2\vec{i}$$

$$\vec{M}_G = -(X_A - X_B)\frac{L}{2}\vec{j} + (Y_A - Y_B)\frac{L}{2}\vec{i}$$

substituindo no TMA:

$$\begin{cases} Y_A - Y_B = -\dfrac{2}{3}mR\omega^2 & (1) \\ X_A = X_B & (2) \end{cases}$$



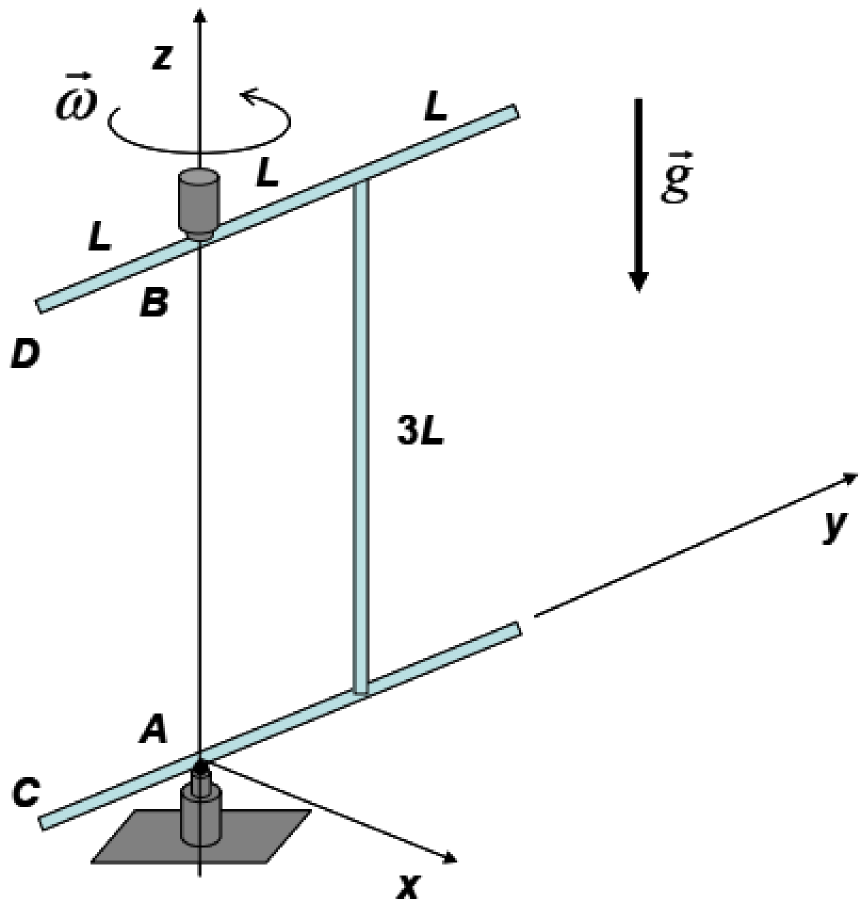
Aplicando o TMB: $\vec{R}_{ext} = m\vec{a}_G = \vec{0}$

$$(X_A + X_B)\vec{i} + (Y_A + Y_B)\vec{j} = \vec{0} \quad \Rightarrow \begin{cases} X_A = -X_B & (3) \\ Y_A + Y_B = 0 & (4) \end{cases}$$

Resolvendo (1), (2), (3) e (4):

$$\boxed{X_A = X_B = 0} \qquad \boxed{Y_A = -\frac{1}{3}mR\omega^2} \quad \text{e} \quad \boxed{Y_B = \frac{1}{3}mR\omega^2}$$

P1–Q1–2007 (PME3200)



1ª Questão (3,0 pontos).

O sistema mostrado na figura, composto por três barras, de massa m e comprimento $3L$, gira em torno do eixo Az com rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, constante.

Determine:

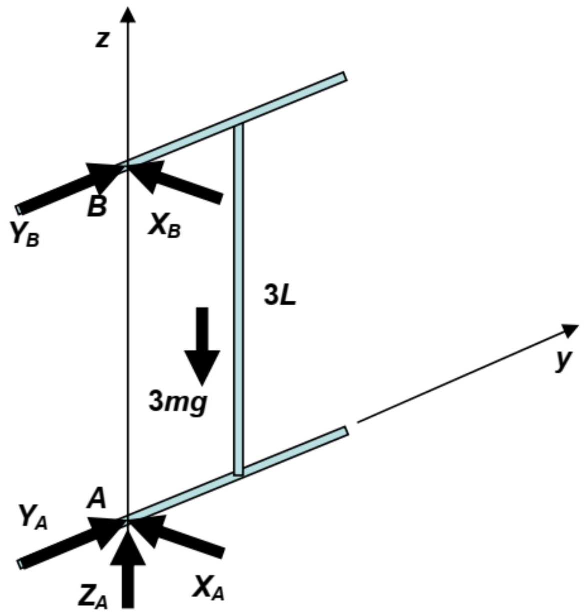
a) As reações (X_A, Y_A), na articulação A e (X_B, Y_B), no anel B (considere o peso);

b) As massas m_1 e m_2, a serem colocadas nos pontos C e D, respectivamente, necessárias para balancear o sistema.

❑ P1–Q1–2007 (PME3200)

Solução:

a) As reações (X_A, Y_A), na articulação A e (X_B, Y_B), no anel B (considere o peso):



Posição do baricentro:

$\boxed{x_G = 0}$

$3my_G = m\,L/2 + mL + m\,L/2 \Rightarrow \boxed{y_G = 2L/3}$

$\boxed{z_G = 3L/2 \text{ (simetria)}}$

Aceleração do baricentro ($\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, constante):

$\boxed{\vec{a}_G = -(2L/3)\omega^2\vec{j}}$ (0,5)

TMB:

$-X_A - X_B = 0$

$Y_A + Y_B = 3m\left(-(2L/3)\omega^2\right)$

$\boxed{Z_A = 3mg}$ (0,5)

Momento Angular, pólo A (fixo):

$$\vec{H}_A = [J_A]\{\vec{\omega}\} = -J_{xz}\omega\vec{i} - J_{yz}\omega\vec{j} + J_z\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_A = -J_{xz}\omega\dot{\vec{i}} - J_{yz}\omega\dot{\vec{j}} + J_z\omega\dot{\vec{k}} = -J_{xz}\omega^2\vec{j} + J_{yz}\omega^2\vec{i}$$

Mas $\boxed{J_{xz} = 0}$; e $J_{yz} = \left(J_{yz}\right)_{barra1} + \left(J_{yz}\right)_{barra2} + \left(J_{yz}\right)_{barra3} = 0 + (0 + m.L.3L/2) + (0 + m.L/2.3L)$

$\Rightarrow \boxed{J_{yz} = 3mL^2}$ e, portanto, $\boxed{\dot{\vec{H}}_A = 3mL^2\omega^2\vec{i}}$ (0,5)

P1–Q1–2007 (PME3200)

TMA, pólo A (fixo):

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{ext} \Rightarrow \begin{cases} 3mL^2\omega^2 = -Y_B 3L - 3mg.2L/3 \\ 0 = -X_B 3L \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} X_A = X_B = 0 \\ Y_A = 2mg/3 - mL\omega^2 \\ Y_B = -2mg/3 - mL\omega^2 \end{array}}$$

(0,5)

P3–Q3–2013

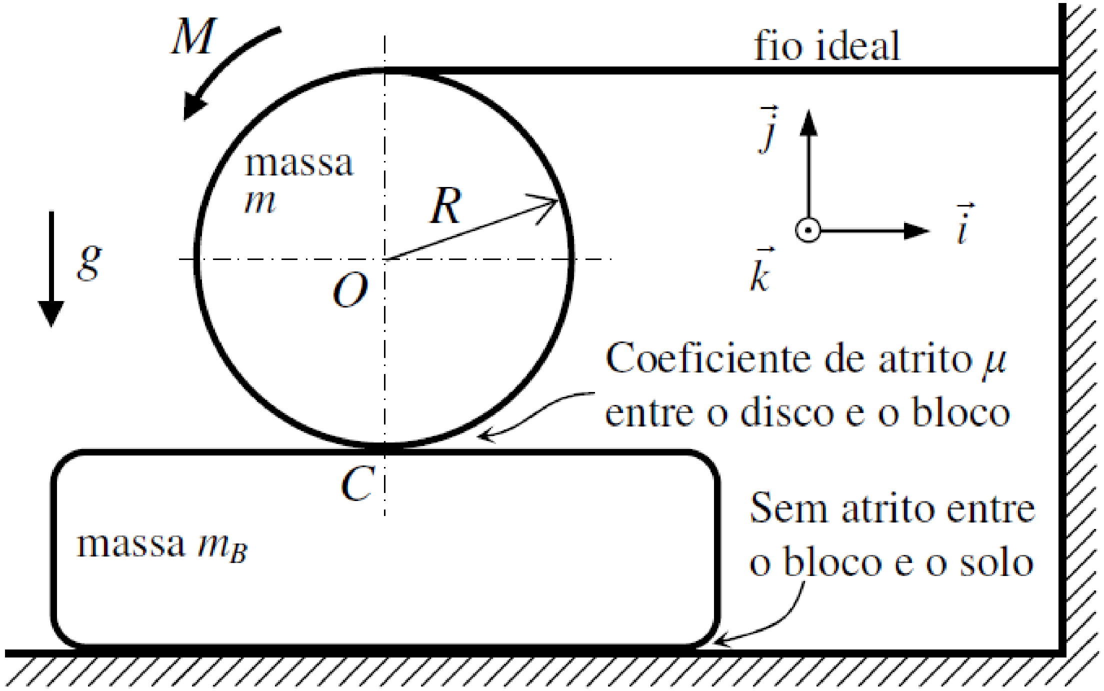
QUESTÃO 3 (4,0 pontos) – O sistema mostrado na figura é composto por um disco de massa m e raio R e um bloco de massa m_B. O disco é acionado por um binário de momento M. Não há escorregamento entre o disco e o bloco e entre o fio ideal e o disco. Pede-se:

a) Os diagramas de corpo livre do disco e do bloco.

b) A aceleração $\vec{a}_O$ do centro O do disco e a aceleração $\vec{a}_B$ do bloco em função da aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco.

c) Calcular a aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco, a aceleração $\vec{a}_O$ do centro O do disco, a aceleração $\vec{a}_B$ do bloco, a força de atrito F_{at} entre o disco e o bloco e a tração T no fio.

d) Calcular o momento máximo M_{max} que pode ser aplicado sem que ocorra escorregamento no contato entre o disco e o bloco.

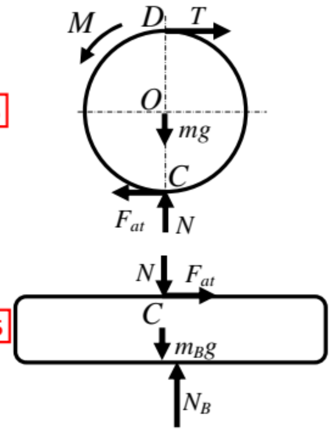


❑ P3–Q3–2013

a) Diagramas de corpo livre:

0,5

0,5



0,5 b) Relações cinemáticas (pontos O e C do disco)

$\boxed{\vec{a}_O = \dot{\omega}R\vec{i}}$ e $\vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C-O)]$

$\Rightarrow \vec{a}_C = \dot{\omega}2R\vec{i} + \omega^2 R\vec{j}$

Como não há escorregamento no ponto C na direção $\vec{i}$, e observando que a aceleração do bloco B é apenas na direção $\vec{i}$ (bloco em translação apenas), então: $\boxed{\vec{a}_B = \dot{\omega}2R\vec{i}}$

c) TMB para o bloco:

$m_B a_{Bx} = F_{at} \Rightarrow \boxed{F_{at} = m_B 2R\dot{\omega}}$

$m_B a_{By} = N_B - N - m_B g = 0$ 0,5

TMB para o disco:

$ma_{Ox} = T - F_{at} \Rightarrow \boxed{T = mR\dot{\omega} + m_B 2R\dot{\omega}}$

$ma_{Oy} = N - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg}$ 0,5

TQMA para o disco, polo no baricentro O: $\dfrac{mR^2}{2}\dot{\omega} = M - TR - F_{at}R$

Substituindo: $\dfrac{mR^2}{2}\dot{\omega} = M - (mR\dot{\omega} + m_B 2R\dot{\omega})R - m_B 2R\dot{\omega}R \Rightarrow \left(\dfrac{mR^2}{2} + mR^2 + 2m_B R^2 + 2m_B R^2\right)\dot{\omega} = M$ 0,5

$\dfrac{(3m + 8m_B)}{2} R^2 \dot{\omega} = M \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \dfrac{2M}{(3m + 8m_B)R^2}}$

Substituindo:

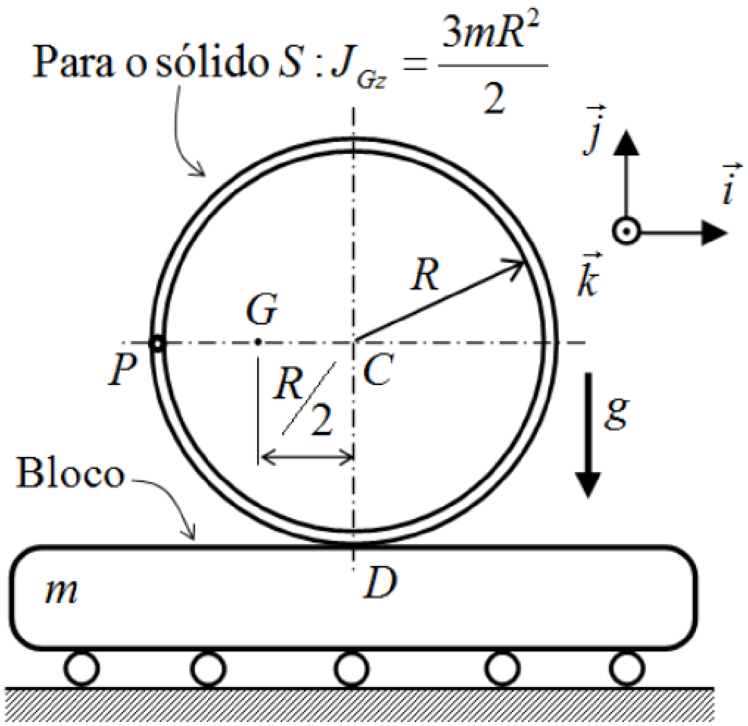
$\boxed{\vec{a}_O = \dfrac{2M}{(3m + 8m_B)R}\vec{i}}$ $\boxed{\vec{a}_B = \dfrac{4M}{(3m + 8m_B)R}\vec{i}}$ $\boxed{F_{at} = \dfrac{4Mm_B}{(3m + 8m_B)R}}$ $\boxed{T = \dfrac{2M(m + 2m_B)}{(3m + 8m_B)R}}$

0,5

0,5 d) Modelo de atrito: $F_{at} \le \mu N$

$\dfrac{4Mm_B}{(3m + 8m_B)R} \le \mu mg \Rightarrow M \le \dfrac{\mu mg(3m + 8m_B)R}{4m_B} \Rightarrow \boxed{M_{\max} = \dfrac{\mu mg(3m + 8m_B)R}{4m_B}}$

P3–Q3–2016



(3,5 pontos) Questão 3 - O sólido S, de centro de massa G e massa $2m$, é formado por um anel homogêneo de centro C e raio R, e um ponto material P, soldado na periferia do anel, conforme mostra a figura. O sólido S pode rolar sem escorregar sobre o bloco de massa m, que, por sua vez, se move sem atrito sobre o solo. O sistema é abandonado a partir do repouso na posição inicial mostrada na figura. No instante inicial, e considerando o bloco como referencial móvel:

a) Mostre que a aceleração relativa de G é $\vec{a}_{G,rel} = -\alpha R\vec{i} - \dfrac{\alpha R}{2}\vec{j}$, onde α é a aceleração angular do sólido S. Justifique porque a aceleração de arrastamento de G é $\vec{a}_{G,arr} = a_B\vec{i}$, onde $a_B\vec{i}$ é a aceleração do bloco. Explique porque a aceleração complementar de G é nula.

b) Desenhe os diagramas de corpo livre do sólido S e do bloco, separadamente.

c) Aplicando o teorema da resultante no sólido S e no bloco, separadamente, determine a força de atrito F_{at} e a normal N no ponto de contato D, em função da aceleração angular α do sólido S.

d) Calcule o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ do sólido S em função de g e da geometria do sistema.

❑ P3–Q3–2016

Solução

a) Movimento relativo - o sólido S rola sem escorregar: $\vec{a}_{C,rel} = \alpha R\left(-\vec{i}\right) \Rightarrow \vec{a}_{C,rel} = -\alpha R\vec{i}$

Para o centro de massa G do sólido S podemos usar o campo de acelerações:

$$\vec{a}_{G,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \vec{\alpha} \wedge (G-C) + \underbrace{\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-C)]}_{\vec{0},\text{ parte do repouso}} = -\alpha R\vec{i} + \alpha\vec{k} \wedge \left(-\frac{R}{2}\vec{i}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{G,rel} = -\alpha R\vec{i} - \frac{\alpha R}{2}\vec{j}}$$

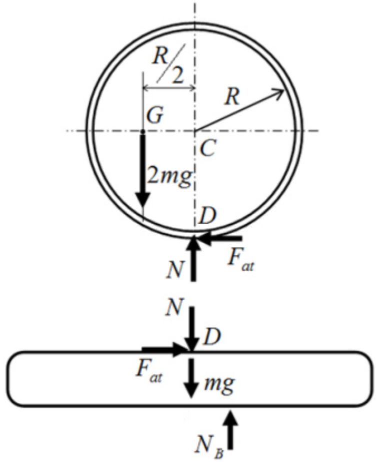
Obs.: no movimento relativo, não se pode afirmar a priori que o ponto D tenha aceleração nula (mesmo se fosse o CIR). Além disso, no instante inicial, não há um CIR para o movimento relativo, pois todos os pontos tem velocidade nula.

Movimento de arrastamento: bloco em translação, todos os pontos têm a mesma aceleração: $\boxed{\underbrace{\vec{a}_{G,arr} = a_B\vec{i}}_{\text{devido à translação}}}$

Aceleração complementar - o bloco apenas translada e $\underbrace{\vec{v}_{G,rel} = \vec{0}}_{\text{parte do repouso}}$, logo $\boxed{\vec{a}_{G,com} = 2\underbrace{\vec{\omega}_{arr}}_{\vec{0},\text{ translação}} \wedge \underbrace{\vec{v}_{G,rel}}_{\vec{0}} = \vec{0}}$

Aceleração absoluta do centro de massa G do sólido S: $\vec{a}_G = \vec{a}_{G,rel} + \vec{a}_{G,arr} + \vec{a}_{G,com} = -(a_B - \alpha R)\vec{i} - \frac{\alpha R}{2}\vec{j}$

b) Diagramas de corpo livre:



c) Teorema da resultante (TR) aplicado no sólido S:

$$2ma_{Gx} = -F_{at} \quad \Rightarrow \quad 2m(a_B - \alpha R) = -F_{at}$$

$$2ma_{Gy} = N - 2mg \Rightarrow 2m\left(-\frac{\alpha R}{2}\right) = N - 2mg \Rightarrow \boxed{N = m(2g - \alpha R)}$$

TR aplicado no bloco, na direção $\vec{i}$:

$$ma_B = F_{at} \quad \Rightarrow \quad a_B = \frac{F_{at}}{m}$$

Usando esse resultado na 1ª equação do TR aplicado no sólido S:

$$2m\left(\frac{F_{at}}{m} - \alpha R\right) = -F_{at} \quad \Rightarrow \quad 3F_{at} = 2mR\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{at} = \frac{2mR}{3}\alpha}$$

d) Teorema da quantidade de movimento angular no sólido S:

$$J_{Gz}\alpha = M_G \quad \Rightarrow \quad \frac{3mR^2}{2}\alpha = N\frac{R}{2} - F_{at}R$$

Substituindo N e F_{at} encontrados anteriormente: $\frac{3mR^2}{2}\alpha = m(2g - \alpha R)\frac{R}{2} - \frac{2mR}{3}\alpha R \quad \Rightarrow$

$$\left(\frac{3mR^2}{2} + \frac{mR^2}{2} + \frac{2mR^2}{3}\right)\alpha = 2mg\frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{8mR^2}{3}\alpha = mgR \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha} = \frac{3g}{8R}\vec{k}}$$

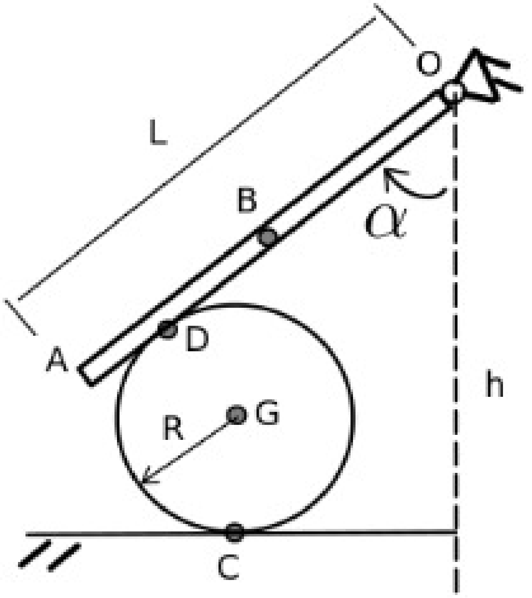
Exercício

A barra homogênea OA de comprimento L e peso Mg pode girar em torno de O e apoia-se sobre um cilindro homogêneo de peso mg e raio r conforme a figura. O sistema parte do respouso quando a barra forma um ângulo α com a vertical. Sabendo-se que o cilindro rola sem escorregar sobre o plano horizontal e que o atrito entre o cilindro e a barra é desprezível, determinara para o instante em que a barra estiver na posição vertical:

a) a velocidade de A;

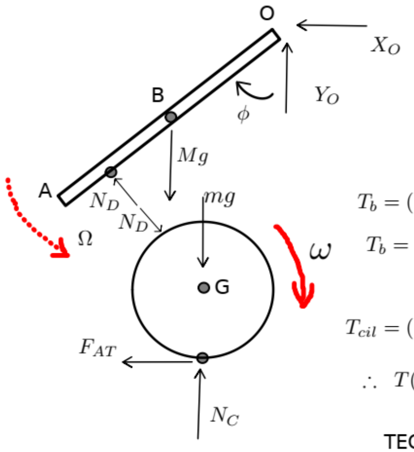
b) a componente vertical da reação em O

Obs.: h-r < L < h



❑ Exercício

(a) DCLs, em uma posição genérica



$$T(t_0) = 0$$
$$T(t_f) = T_{barra} + T_{cil}$$

Barra, polo O:

$$T_b = (1/2)Mv_O^2 + (1/2)M\vec{v}_O.\vec{\Omega} \wedge (G - O) + (1/2)J_O\Omega^2$$
$$T_b = 0 + 0 + (J_B + (1/2)M(L/2)^2)\Omega^2 = ML^2\Omega^2/6$$

Cilindro, polo C (CIR):

$$T_{cil} = (1/2)(J_G + mR^2)\omega^2 = (1/2)(mR^2/2 + mR^2)\omega^2 = 3mR^2\omega^2/4$$
$$\therefore\ T(t_f) = T_b + T_{cil} = ML^2\Omega^2/6 + 3mR^2\omega^2/4$$

TEC:

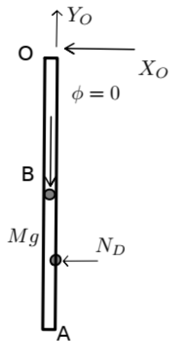
$$\tau_{(t_0,t_1)}^{todas} = \tau_{\alpha,\phi}^{Mg} = Mg[(h - (L/2)\cos\alpha) - (h - (L/2)\cos\phi)] = Mg(L/2)(cos\alpha - cos\phi) = T(t_f) - 0$$

$$\therefore\ ML^2\Omega^2/6 + 3mR^2\omega^2/4 = Mg(L/2)(cos\alpha - cos\phi) \qquad (I)$$

Vínculo cinemático: na posição vertical (final),

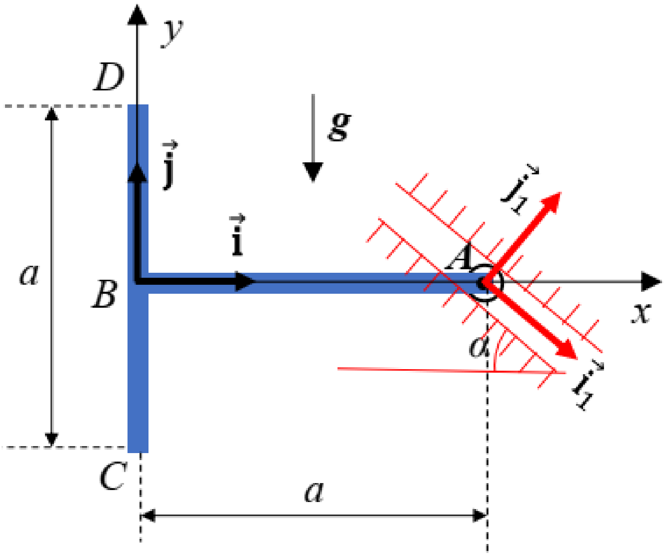
$$D \in \ \text{barra}: \vec{v}_D = \Omega(h - R)\vec{i}$$
$$D \in \text{cil.}: \ \vec{v}_{D_x} = \omega R\vec{i}$$
$$\longrightarrow \omega = \frac{\Omega(h-R)}{R} \quad \text{em } (I) \text{ com } \phi = 0 \Rightarrow \vec{\Omega} = \sqrt{\frac{6MgL(1-\cos\alpha)}{2ML^2 + 9m(h-R)^2}}\vec{k}$$
$$\therefore\ \vec{v}_A = \Omega L\vec{i}$$

(b)



$$\text{TCM (ou TR)}: M\vec{a}_B = (-X_O - N_D)\vec{i} + (Y_O - Mg)\vec{j}$$
$$\vec{a}_{B_y} = \frac{v_B^2}{L/2}\vec{j} \Rightarrow \frac{M\Omega^2(L/2)^2}{L/2} = Y_O - Mg$$
$$\therefore\ Y_O = M\left(g + \omega^2\frac{L}{2}\right)$$

❑ P1–Q3–2020R



3ª Questão (3,0 pontos). A peça *ABCD* em forma de "T", é composta por duas barras delgadas iguais, de massas *m/2*, soldadas uma à outra. Na extremidade *A* da peça, há um pequeno rolete, de massa desprezível, inserido em uma guia linear sem atrito, e que forma um ângulo α com a horizontal. A peça é liberada a partir do repouso, quando o lado *CD* se encontra na vertical. Considerando-se os sistemas de eixos móveis indicados na figura, pede-se:

a) Determinar a posição do centro de massa *G* da peça *ABCD*.

b) Determinar o momento de inércia J_{Gz} da peça.

c) Expressar os versores da base $\{\vec{i}_1, \vec{j}_1\}$ em termos da base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

d) Desenhar o diagrama de corpo livre da peça no <u>instante imediatamente após</u> a liberação do sistema.

e) Determinar a velocidade angular da peça nesse instante.

f) Escrever a expressão da aceleração do centro de massa *G* da peça nesse instante.

g) Escrever a equação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (ou Teorema da Quantidade de Movimento Angular) da peça nesse instante.

h) Escrever as equações do Teorema da Resultante (ou Teorema do Movimento do Baricentro) da peça nesse instante.

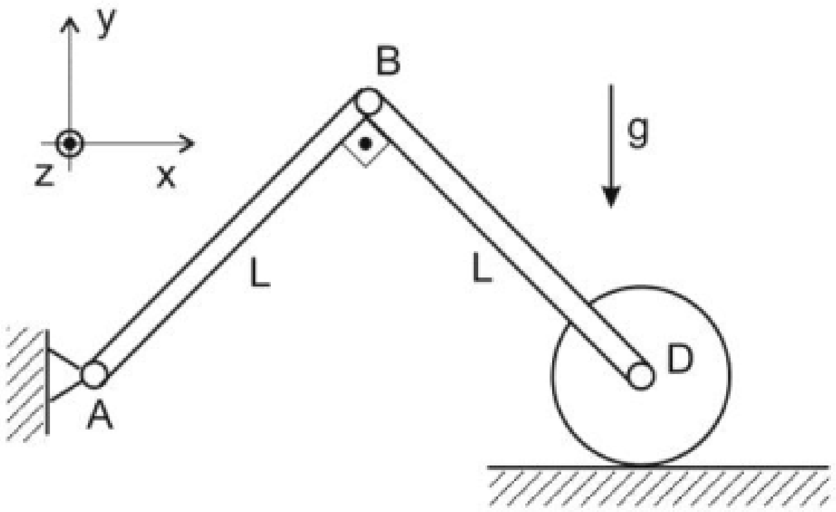
i) Determinar a aceleração angular da peça nesse instante.

j) Determinar a aceleração inicial do ponto *A* da peça nesse instante.

k) Determinar a reação em *A* nesse instante.

❑ PSUB–Q2–2015

<u>2ª Questão (4,0 pontos):</u> O mecanismo da figura é constituído por duas barras delgadas idênticas, de massa m e comprimento L cada uma, e por um disco de massa M e raio R. O sistema é solto do repouso a partir da configuração mostrada na figura. O disco rola sem escorregar sobre a superfície. Com base nestas informações, pedem-se:



a) construa os diagramas de corpo livre de todos os elementos do mecanismo na situação imediatamente antes do sistema entrar em movimento;

b) determine o trabalho realizado pelas forças atuantes no sistema desde a situação inicial até a situação em que as duas barras estejam alinhadas na horizontal;

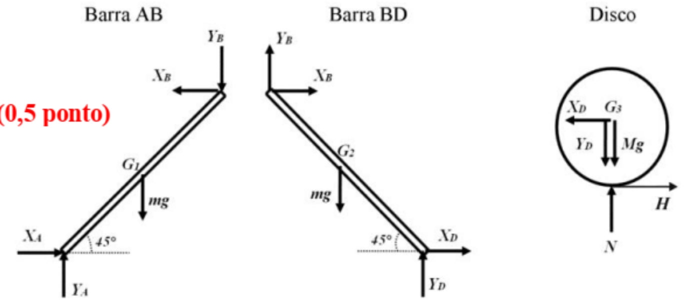
c) obtenha os vetores rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da barra AB e $\vec{\omega}_{BD}$ da barra BD, na situação descrita no item b),

d) calcule a velocidade $\vec{v}_D$ do ponto D, na mesma situação.

PSUB–Q2–2015

Solução:

a)



(0,5 ponto) (0,5 ponto)

b) Considerando o sistema formado pelas duas barras e o disco, as forças internas não realizam trabalho (ação e reação, forças conservativas). As únicas forças que realizam trabalho são os pesos das barras, aplicados em G_1 e G_2, respectivamente:

- Barra AB: $\tau_1 = mg \cdot \Delta y_{G1} = mg\frac{L}{2}\sin 45° = \frac{mgL\sqrt{2}}{4}$; Barra BD: $\tau_2 = mg \cdot \Delta y_{G2} = mg\frac{L}{2}\sin 45° = \frac{mgL\sqrt{2}}{4}$

Assim: $\boxed{\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{mgL\sqrt{2}}{2}}$ **(1,0 ponto)**

c) Para a barra AB: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A) = \vec{0} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge L\vec{\imath} = \omega_{AB}L\vec{\jmath}$ **(0,5 ponto)** (1)

$\vec{v}_{G1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (G_1 - A) = \vec{0} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \frac{L}{2}\vec{\imath} = \frac{\omega_{AB}L}{2}\vec{\jmath}$ (2)

Para a barra BD: $\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{BD} \wedge (B - D) = v_D\vec{\imath} + \omega_{BD}\vec{k} \wedge (-L)\vec{\imath} = v_D\vec{\imath} - \omega_{BD}L\vec{\jmath}$ **(0,5 ponto)** (3)

$\vec{v}_{G2} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{BD} \wedge (G_2 - D) = v_D\vec{\imath} + \omega_{BD}\vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2}\right)\vec{\imath} = v_D\vec{\imath} + \frac{\omega_{BD}L}{2}\vec{\jmath}$ (4)

De (1) e (3) obtemos: $v_D = 0$ e $\omega_{AB} = -\omega_{BD} = \omega$ (5)

Substituindo em (2) e (4), obtemos: $\vec{v}_{G1} = \frac{\omega L}{2}\vec{\jmath} = \vec{v}_{G2}$

A energia cinética do sistema, considerando que nessa posição o disco está parado ($v_D = 0$), será:

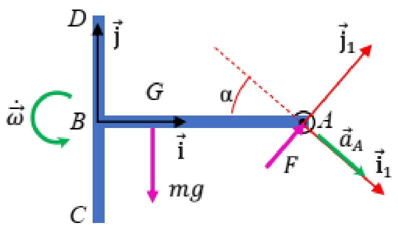
$T = \frac{1}{2}mv_{G1}^2 + \frac{1}{2}J_{G1}\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}mv_{G2}^2 + \frac{1}{2}J_{G2}\omega_{BD}^2 + 0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}(-\omega)^2 = \frac{mL^2}{3}\omega^2$ **(0,5 ponto)**

Pelo TEC, partindo do repouso:

$\frac{mL^2}{3}\omega^2 = \frac{mgL\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3\sqrt{2}g}{2L} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{\omega}_{AB} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{2L}}\vec{k} \text{ e } \vec{\omega}_{BD} = -\sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{2L}}\vec{k}}$

d) De (5): $\boxed{\vec{v}_D = \vec{0}}$ **(0,5 ponto)**

P1–Q3–2020R



(0,5)

a) O eixo Bx é um eixo de simetria da peça. Portanto:

$$y_G = 0$$

$$x_G = \frac{\frac{m}{2}0 + \frac{m}{2}\frac{a}{2}}{m} = \frac{a}{4} \qquad (0{,}2)$$

b) O momento de inércia da peça em relação ao eixo Gz é calculado a seguir:

$$J_{Gz} = J_{Gz}^{AB} + J_{Gz}^{CD} = \left[\frac{\frac{m}{2}a^2}{12} + \frac{m}{2}\left(\frac{a}{4}\right)^2\right] + \left[\frac{\frac{m}{2}a^2}{12} + \frac{m}{2}\left(\frac{a}{4}\right)^2\right] = \frac{7ma^2}{48} \qquad (0{,}2)$$

c) Na base $\{\vec{i},\vec{j}\}$, os versores $\vec{i}_1$ e $\vec{j}_1$ se expressam como:

$$\vec{i}_1 = (\vec{i}_1 \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{i}_1 \cdot \vec{j})\vec{j} = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}$$
$$\vec{j}_1 = (\vec{j}_1 \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{j}_1 \cdot \vec{j})\vec{j} = \sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} \qquad (0{,}2)$$

d) Na figura abaixo apresenta-se o diagrama de corpo livre da peça para o instante imediatamente liberação do sistema. Neste momento, a peça inicia o seu movimento.

e) No instante imediatamente após a liberação do sistema, a velocidade angular da peça é nula ($\vec{\omega} = \vec{0}$). (0,2)

f) A aceleração do centro de massa G da peça é dada por:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)]$$

Para o instante imediatamente após a liberação do sistema, tem-se: $\vec{a}_A = a_A\vec{i}_1 = a_A(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})$ e $\vec{\omega} = \vec{0}$. Portanto, a aceleração de G pode ser escrita, como segue:

$$\vec{a}_G = a_A(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}) + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(-\frac{3}{4}a\right)\vec{i} = a_A\cos\alpha\,\vec{i} - \left(a_A\sin\alpha + \frac{3}{4}a\dot{\omega}\right)\vec{j} \qquad (0{,}2)$$

g) O Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (ou Teorema da Quantidade de Movimento Angular) com respeito ao pólo G fornece:

$$\vec{M}_G = m(G - G) \wedge \vec{a}_G + \frac{d}{dt}([\mathbf{I}_G]\vec{\omega})$$

Para movimento restrito no plano xy, a expressão acima é reduzida, como segue:

$$\vec{M}_G = (J_{Gz}\dot{\omega})\vec{k}$$

O momento resultante do sistema de esforços com respeito ao pólo G é dado por: (0,5)

$$\vec{M}_G = (A - G) \wedge \vec{F} = \frac{3}{4}a\vec{i} \wedge F(\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}) = \left(\frac{3}{4}aF\cos\alpha\right)\vec{k}$$

Substituindo na equação anterior:

$$\vec{M}_G = (J_{Gz}\dot{\omega})\vec{k} = \left(\frac{3}{4}aF\cos\alpha\right)\vec{k} \quad \rightarrow \quad J_{Gz}\dot{\omega} = \frac{3}{4}aF\cos\alpha$$

P1–Q3–2020R

h) O Teorema da Resultante (ou Teorema do Movimento do Baricentro) fornece:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = m\vec{\boldsymbol{a}}_G$$

$$F(\sin\alpha\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\alpha\,\vec{\mathrm{j}}) - mg\vec{\mathrm{j}} = m\left[a_A\cos\alpha\,\vec{\mathrm{i}} - \left(a_A\sin\alpha + \frac{3}{4}a\dot{\omega}\right)\vec{\mathrm{j}}\right]$$

(0,5)

Decompondo-se a equação vetorial anterior em suas componentes escalares, tem-se:

$$F\sin\alpha = ma_A\cos\alpha$$

$$F\cos\alpha - mg = -m\left(a_A\sin\alpha + \frac{3}{4}a\dot{\omega}\right)$$

i-k) Utilizando as equações obtidas nos itens g) e f), obtém-se:

$$\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} = \left(\frac{36}{7}\frac{F\cos\alpha}{ma}\right)\vec{\mathrm{k}} = \left[\frac{36g}{a}\left(\frac{\cos^2\alpha}{34\cos^2\alpha + 7\sin^2\alpha}\right)\right]\vec{\mathrm{k}}$$ (0,2)

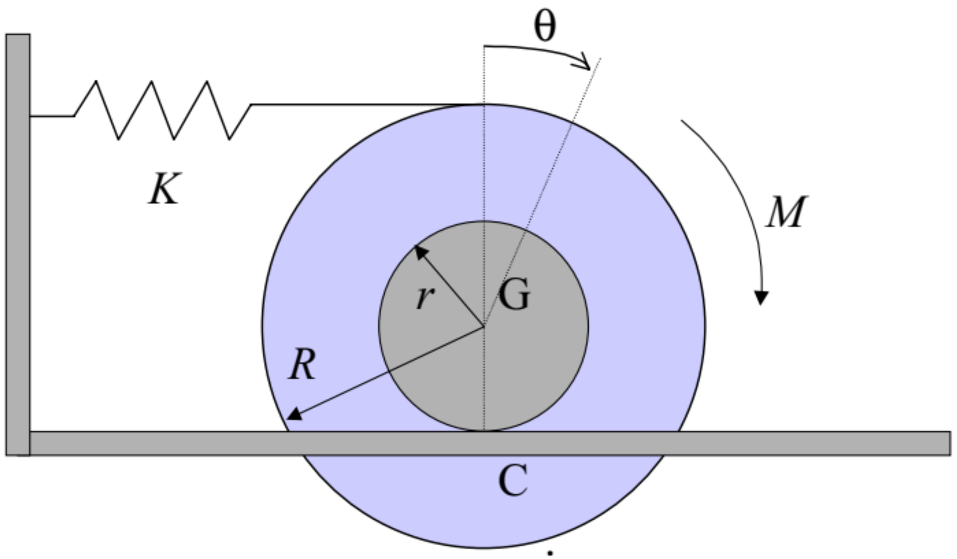
$$\vec{\boldsymbol{a}}_A = \left[7g\left(\frac{\csc\alpha}{7 + 34\cot^2\alpha}\right)\right]\vec{\mathrm{i}}_1$$ (0,2)

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \left[7mg\left(\frac{\cos\alpha}{34\cos^2\alpha + 7\sin^2\alpha}\right)\right]\vec{\mathrm{j}}_1$$ (0,1)

P3–Q3–2004

3ª Questão (3,5 pontos)

O carretel de massa m e raios R e r rola sem escorregar sobre um plano horizontal, sob a ação de um binário de momento M, constante. Um fio ideal, preso em uma mola linear ideal de constante K, é enrolado no carretel conforme a figura. Não existe escorregamento entre o fio e o carretel. No instante inicial $t = 0$, quando $\theta(0) = 0$, o carretel está em repouso e a mola não está distendida. Pede-se:



(a) a energia cinética do carretel, expressa em função da velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$;

(b) o trabalho das forças e momento externos, aplicados ao carretel, expresso em função da posição angular θ;

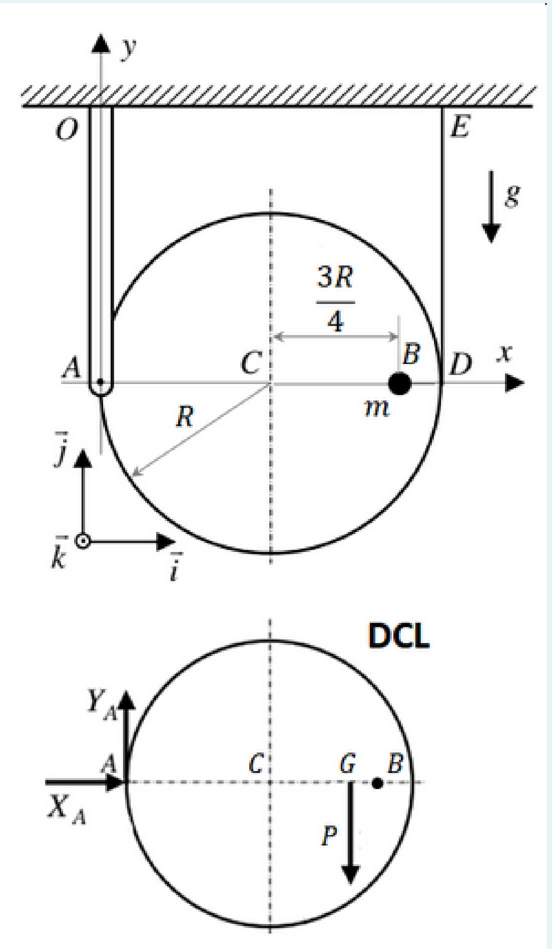
(c) a aceleração angular $\dot{\omega}$ do carretel, expressa em função da posição angular θ;

(d) a aceleração do baricentro a_G, expressa em função da posição angular θ.

Dado: Momento de inércia baricêntrico do carretel: J_G.

No sistema mostrado na figura, o disco de centro C tem massa $2m$ e raio R, e há uma massa concentrada m no ponto B. A distância entre os pontos B e C é $\frac{3R}{4}$. O sistema encontra-se inicialmente em repouso, suspenso pelo fio DE e pela barra fixa OA, articulada ao disco em A. Num dado instante, o fio DE se rompe. Para o instante imediatamente após o rompimento do fio e considerando-se o sistema de coordenadas $Axyz$, calcule e escreva suas respostas nos campos abaixos. Admita que $m = 2.4\,kg$, $R = 0.55\,m$ e $g = 10\,m/s^2$. Dado: para o disco $J_{Cz} = mR^2$.

Responda o que é solicitado abaixo, preenchendo os respectivos campos sem incluir unidades e com apenas 2 casas decimais. Utilizar PONTO como separador de decimais.



(a) as coordenadas do centro de massa G do sistema (disco + massa concentrada), $(G - A) = \square\,\vec{i} + \square\,\vec{j}$ $[m]$ (1,0 ponto)

(b) o momento de inércia do sistema (disco + massa concentrada) em relação ao eixo A_z, $J_{Az} = \square$ $[kgm^2]$ (2,0 pontos)

(c) o produto de inércia do sistema (disco + massa concentrada) em relação ao plano A_{xy}, $J_{Axy} = \square$ $[kgm^2]$ (1,0 ponto)

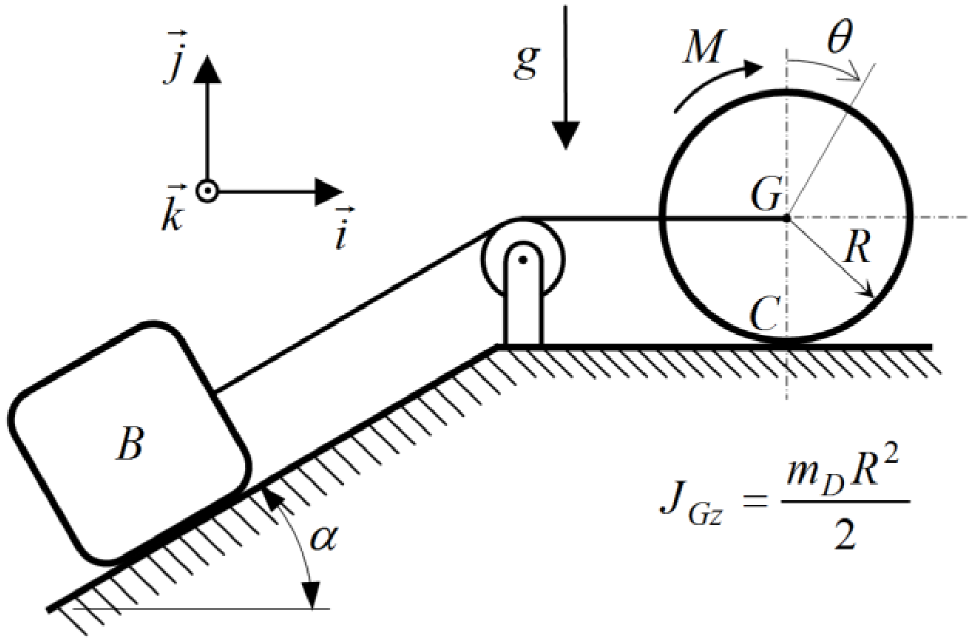
(d) a velocidade angular do disco, $\vec{\omega} = \square\,\vec{k}$ $[rad/s]$ (1,0 ponto)

(e) a aceleração angular do sistema (disco + massa concentrada) (**admita $J_{Az} = 2.4\ kgm^2$ e $x_G = 0.5\ m$**), $\vec{\alpha} = \square\,\vec{k}$ $[rad/s^2]$ (2,0 pontos)

(f) a aceleração do centro de massa G do sistema (disco + massa concentrada) (**admita $J_{Az} = 2.4\ kgm^2$ e $x_G = 0.5\ m$**), $\vec{a}_G = \square\,\vec{i} + \square\,\vec{j}$ $[m/s]$ (1,0 ponto)

(g) As reações vinculares em A (**admita $J_{Az} = 2.4\ kgm^2$ e $x_G = 0.5\ m$**), $\vec{F}_A = \square\,\vec{i} + \square\,\vec{j}$ $[N]$ (2,0 pontos)

❑ P3–Q3–2014



Questão 3 (3,5 pontos): O disco de raio R e massa m_D, rola sem escorregar num plano horizontal, partindo do repouso em $\theta = 0^o$, quando um binário de momento M é aplicado. Um cabo ideal une o centro do disco G ao bloco B, por meio de uma polia de inércia desprezível. O bloco B de massa m_B escorrega sobre o plano com inclinação α e coeficiente de atrito μ.

a) Determine o momento de inércia do disco J_{Cz} em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura (direção $\vec{k}$) que passa pelo ponto C de contato com o solo.

b) Usando J_{Cz}, determine a energia cinética do sistema em função da velocidade angular ω do disco.

c) Determine o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do disco em função de θ.

❑ P3–Q3–2014

Solução

a) 0,5 Teorema dos eixos paralelos:

$$J_{Cz} = J_{Cz} + m_D R^2 = \frac{m_D R^2}{2} + m_D R^2 = \frac{3m_D R^2}{2}$$

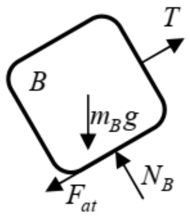
b) 1,0 O sistema parte do repouso $\Rightarrow E_0 = 0$, C é o CIR do disco, e observa-se que a velocidade do bloco é igual, em módulo, à velocidade do centro de massa do disco:

$$E = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} J_{Cz}\omega^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_B v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{3m_D R^2}{2}\omega^2$$

Aplicando a expressão do campo de velocidades: $\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (G - C) \Rightarrow v_G = \omega R$

Então: $E = \frac{1}{2} m_B (\omega R)^2 + \frac{3m_D R^2}{4}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(\omega) = \frac{1}{4}(2m_B + 3m_D)R^2\omega^2}$

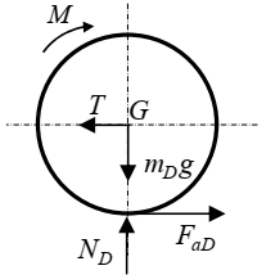
c) 2,0 O trabalho das forças externas: a força de atrito F_{at} , a força peso do bloco e o binário de momento M realizam trabalho:



$$W^{ext} = M\theta - m_B g \theta R sen\alpha - F_{at}\theta R$$

Como há escorregamento: $F_{at} = \mu N = \mu m_B g \cos\alpha$

$$W^{ext} = M\theta - m_B g (sen\alpha + \mu\cos\alpha)\theta R$$



Portanto, aplicando o TEC:

$$\frac{1}{4}(2m_B + 3m_D)R^2\omega^2 = M\theta - m_B g(sen\alpha + \mu\cos\alpha)\theta R \Rightarrow$$

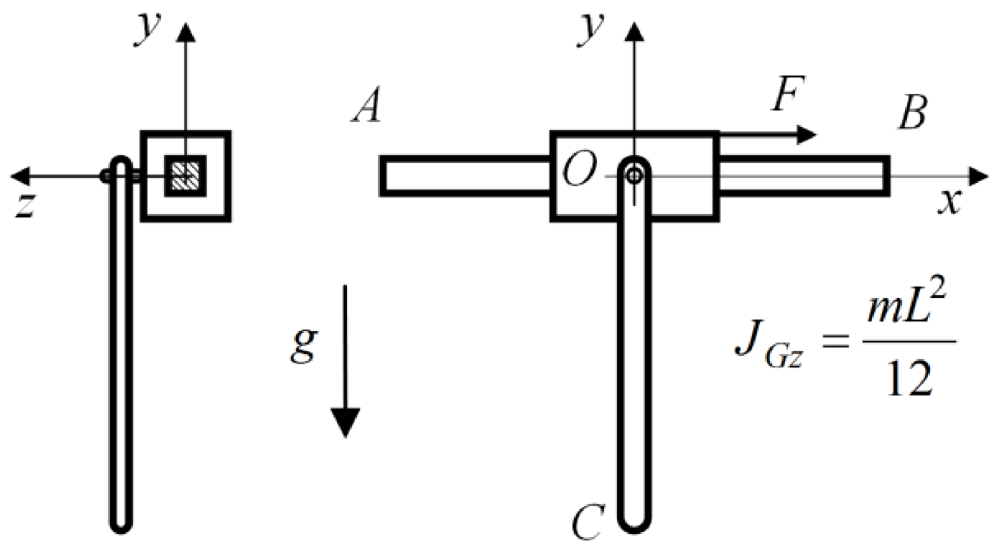
$$\boxed{\vec{\omega} = -\sqrt{\frac{4[M - m_B g(sen\alpha + \mu\cos\alpha)R]\ \theta}{(2m_B + 3m_D)R^2}}\ \vec{k}}$$

P3–Q2–2014

Questão 2 (3,5 pontos): O anel de seção retangular e massa m pode deslizar sem atrito sobre a guia horizontal AB. A barra homogênea OC, de comprimento L e massa m é articulada sem atrito ao anel por meio de um pino horizontal em O. É aplicada ao anel uma força F horizontal. Sabendo que o sistema parte do repouso, com a barra pendente na vertical, pede-se determinar:

a) o diagrama de corpo livre para a barra;

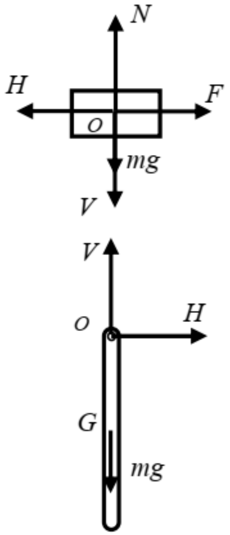
b) para o instante inicial, a aceleração angular da barra, a aceleração do anel e a reação da articulação sobre a barra em O.



P3–Q2–2014

Solução

a) $\boxed{1{,}0}$ Diagramas de corpo livre:



b) $\boxed{2{,}5}$ Teorema do movimento do baricentro:

Anel:

$$ma_{Ox} = F - H$$

$$ma_{Oy} = N - V - mg = 0$$

Barra:

$$ma_{Gx} = H$$

$$ma_{Gy} = V - mg$$

Teorema do momento da quantidade de movimento para a barra:

$$J_{Gz}\dot{\omega} = -H\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{mL^2}{12}\dot{\omega} = -H\frac{L}{2} \Rightarrow H = -\frac{mL}{6}\dot{\omega}$$

Da cinemática, no instante inicial, quando $\vec{\omega} = \vec{0}$:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)] = a_{Ox}\vec{i} + \dot{\omega}\frac{L}{2}\vec{i}$$

Ou seja, no instante inicial $a_{Gy} = 0 \Rightarrow V = mg$

Substituindo nas equações do teorema do movimento do baricentro da barra e do anel:

Barra: $m\left(a_{Ox} + \dot{\omega}\frac{L}{2}\right) = -\frac{mL}{6}\dot{\omega}$

Anel: $ma_{Ox} = F - \left(-\frac{mL}{6}\dot{\omega}\right)$

Portanto:

$$F + 2\frac{mL}{6}\dot{\omega} = -m\dot{\omega}\frac{L}{2} \Rightarrow \frac{5mL}{6}\dot{\omega} = -F \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = -\frac{6F}{5mL}}$$

Também resulta que $H = -\frac{mL}{6}\left(-\frac{6F}{5mL}\right) \Rightarrow H = \frac{F}{5}$

Substituindo na equação do teorema do movimento do baricentro do anel na direção horizontal:

$$ma_{Ox} = F - \frac{F}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_O = \frac{4F}{5m}\vec{i}}$$

Dos resultados anteriores:

$$\vec{R} = H\vec{i} + V\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = \frac{F}{5}\vec{i} + mg\,\vec{j}}$$

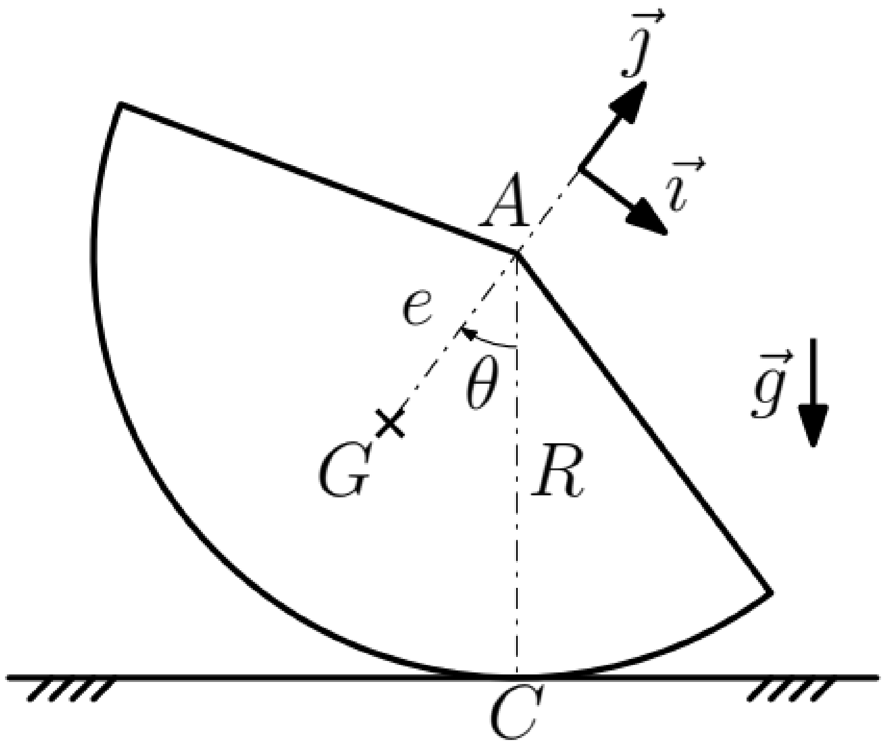
❑ PSUB–Q2–2018

Questão 2 (3,5 pontos). O corpo ilustrado na figura ao lado é um setor recortado de um disco homogêneo, de centro A e raio R, que pode rolar sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal. Este setor tem massa m e seu centro de massa G está a uma distância e do ponto A. O ângulo θ mede a inclinação do segmento GA com respeito à vertical, conforme indicado na figura. Além disso, adota-se uma base ortonormal de vetores $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ solidária a este corpo, com o versor $\vec{\jmath}$ permacecendo paralelo à direção do segmento GA. Pede-se:

a) determinar o momento de inércia J_{Gz} e o produto de inércia J_{Gxy} (dado: $J_{Az} = mR^2/2$);

b) escrever as expressões das energias cinética T e potencial V para este corpo em função de θ e $\dot{\theta}$;

c) obter a equação de movimento deste sistema, explicitando $\ddot{\theta}$ em função de θ e $\dot{\theta}$.



PSUB–Q2–2018

a) Utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos:

$$J_{Az} = J_{Gz} + me^2 \qquad \Rightarrow \qquad J_{Gz} = m\left(\frac{R^2}{2} - e^2\right) \qquad (0{,}5)$$

Notando que Gyz é um plano de simetria e considerando a homogeneidade do corpo:

$$J_{Gxy} = 0 \qquad (0{,}5)$$

b) Notando que $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$ e, da condição de rolamento sem escorregamento, $\vec{v}_C = \vec{0}$, então:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (A - C) = -\dot{\theta}\vec{k} \wedge R(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = \dot{\theta}R(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$$

Dessa forma, a energia cinética T do corpo pode ser obtida a partir da seguinte expressão:

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_A|^2 + m\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \wedge (G - A) + \frac{1}{2}J_{Az}|\vec{\omega}|^2$$

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + m\dot{\theta}R(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) \cdot [(-\dot{\theta}\vec{k}) \wedge (-e\vec{\jmath})] + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2$$

$$T = \left(\frac{3}{4}mR^2 - mRe\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 \qquad (1{,}0)$$

Sendo o peso a única força conservativa atuando sobre o corpo e, considerando como referência um plano horizontal passante por A, tem-se:

$$V = -mge\cos\theta \qquad (0{,}5)$$

PSUB–Q2–2018

c) Da condição de rolamento sem escorregamento, pode-se afirmar que as forças aplicadas no disco em seu contato com o plano não realizam trabalho. Assim, o sistema é conservativo e a energia mecânica $E = T + V$ é constante, logo:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{3}{4}mR^2 - mRe\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 - mge\cos\theta\right] = 0$$

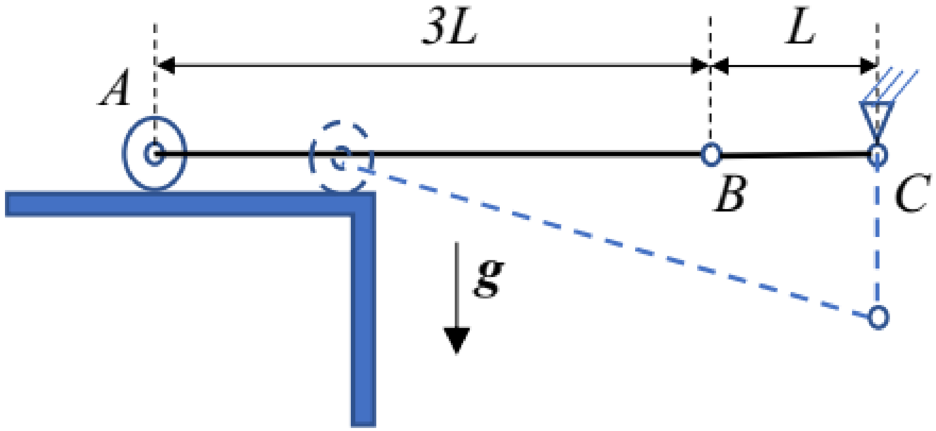
$$2\left(\frac{3}{4}mR^2 - mRe\cos\theta\right)\dot{\theta}\ddot{\theta} + \left(mRe\dot{\theta}\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 + mge\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2e\sin\theta(g + R\dot{\theta}^2)}{3R^2 - 4Re\cos\theta} \qquad (1{,}0)$$

❑ PSUB–Q3–2020R

3ª Questão (3,5 pontos). O sistema de duas barras da figura tem um apoio simples no ponto A, e articulações em B e C. A barra AB tem comprimento $3L$ e massa $3m$, e a barra BC tem comprimento L e massa m. O ponto A pode deslizar sem atrito sobre a superfície horizontal. O sistema é solto com velocidade inicial nula da posição em que as duas barras estão na horizontal. Para o instante em que a posição da barra BC está na vertical (configuração em linha tracejada na figura), determinar:

- **a)** O CIR da barra AB.
- **b)** As velocidades dos pontos A ($\vec{v}_A$) e B ($\vec{v}_B$), em função da velocidade angular da barra BC ($\vec{\omega}_{BC}$).
- **c)** A energia cinética do sistema de barras em função de $\vec{\omega}_{BC}$.
- **d)** A energia potencial do sistema de barras.
- **e)** A velocidade angular de BC ($\vec{\omega}_{BC}$).



❑ PSUB–Q3–2020R

(a) O CIR da barra AB não existe. A barra está em ato de movimento de translação e $\vec{\boldsymbol{v}}_A \parallel \vec{\boldsymbol{v}}_B$.

(b) Na barra BC: $\vec{\boldsymbol{v}}_B = \vec{\boldsymbol{v}}_C + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{BC} \wedge (B - C) = \vec{\mathbf{0}} + \omega_{BC}\vec{\mathbf{k}} \wedge -L\vec{\mathbf{j}} = (\omega_{BC} L)\vec{\mathbf{i}}$

Como a barra AB está em translação, $\vec{\boldsymbol{v}}_A = \vec{\boldsymbol{v}}_B$.

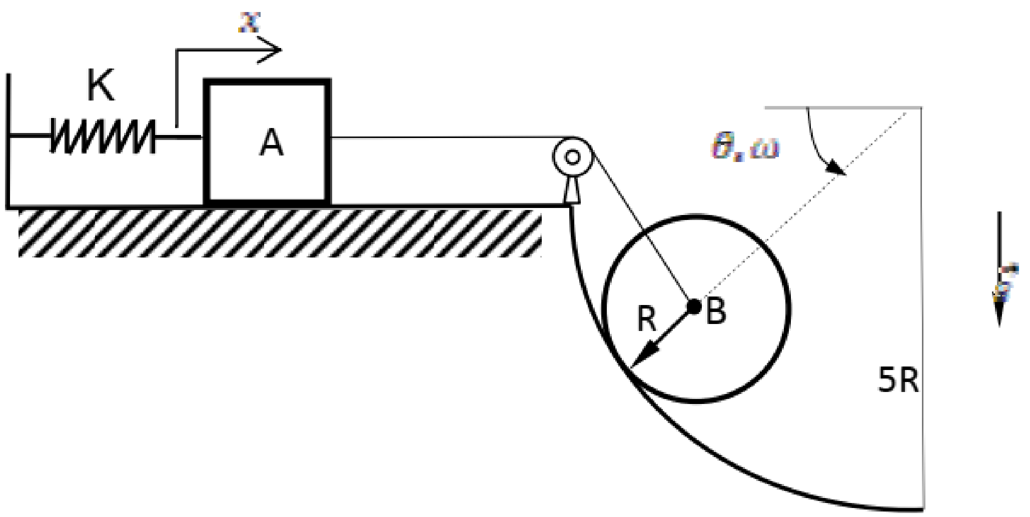
c) $T_{\text{sis}} = T_{\text{AB}} + T_{\text{BC}} = \dfrac{m v_{G_{AB}}^2}{2} + \dfrac{J_C {\omega_{BC}}^2}{2} = \dfrac{41 m L^2 {\omega_{BC}}^2}{3}$

d) $V_{\text{sis}} = V_{\text{AB}} + V_{\text{BC}} = -\dfrac{3mL}{2} - \dfrac{mgL}{2} = -2mgL$

e) $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \rightarrow \quad 0 = \dfrac{41 m L^2 {\omega_{BC}}^2}{3} - 2mgL \quad \rightarrow \quad \omega_{BC} = \sqrt{\dfrac{6g}{41L}}$

❑ P3–Q2–2016R

Questão 2 (5,0 pontos): O disco rígido homogêneo de massa $3m$, centro B e raio R é abandonado a partir do repouso em uma posição inicial θ_0 e rola sem escorregar sobre uma rampa cilíndrica de raio $5R$. O movimento é transmitido, através de um cabo inextensível e de uma polia, ambos de massa desprezível, ao bloco **A**, de massa m que, por sua vez, está conectado a uma mola ideal de constante elástica K. O movimento do disco é responsável por arrastar o bloco A (sem tombamento) sobre a superfície horizontal rugosa (coeficiente de atrito dinâmico μ). Considerando que na posição inicial a mola não está deformada e que a coordenada linear x possui valor nulo exatamente nessa posição, pedem-se:



(a) os diagramas de corpo livre do bloco A e do disco de centro B;

(b) a energia cinética do sistema constituído pelo disco B e pelo bloco A em função da velocidade angular ω e dos parâmetros geométricos do problema, para uma posição genérica $\theta > \theta_0$;

(c) o trabalho realizado por todas as forças atuantes nesse sistema entre a posição inicial e uma posição θ genérica (<u>identificar claramente qual força realiza qual trabalho)</u>;

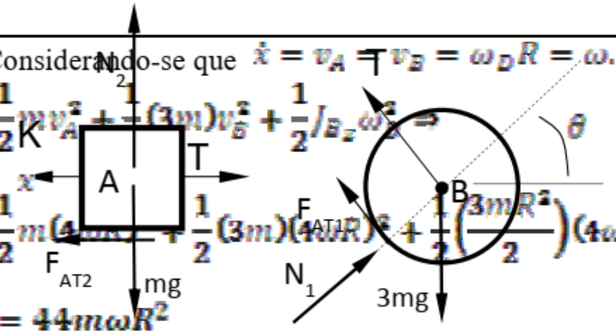
(d) a velocidade angular ω_D do disco B nessa posição genérica;

(e) a aceleração angular $\dot{\omega}_D$ do disco B nessa posição genérica.

❑ P3–Q2–2016R

Solução

a)



(b) Considerando-se que $\dot{x} = v_A = v_B = \omega_D R = \omega.4R$,

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}(3m)v_B^2 + \frac{1}{2}J_{Bz}\omega_D^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}m(4\omega R)^2 + \frac{1}{2}(3m)(4\omega R)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3mR^2}{2}\right)(4\omega)^2$$

$$\Rightarrow T = 44m\omega R^2$$

(c) $\tau = \tau_{FAT2} + \tau_{Kx} + \tau_{PB}$

$$\tau = -\mu\, mg\, (\theta - \theta_0).4R + K/2(0 - [4R(\theta - \theta_0)]^2) + (3mg)4R(sen\,\theta - sen\,\theta_0) \Rightarrow$$

$$\tau = -\mu\, mg\, (\theta - \theta_0).4R - K(\theta - \theta_0)^2.8R^2 + 12\, mg\, R(sen\,\theta - sen\,\theta_0)$$

(d) Pelo teorema da energia cinética: $\tau = T(t) - T(t_0) \Rightarrow$

$$-\mu\, mg\, (\theta - \theta_0).4R - K(\theta - \theta_0)^{2.8R^2} + 12\, mg\, R(sen\,\theta - sen\,\theta_0) = 44m\omega^2R^2 \Rightarrow$$

$$\omega_D^2 = 4\omega^2 = \frac{1}{11}\left(-\frac{4\mu g(\theta - \theta_0)}{R} - \frac{8K}{m}(\theta - \theta_0)^2 + \frac{12g}{R}(sen\,\theta - sen\,\theta_0)\right)$$

(e) Derivando a expressão acima em relação ao tempo e lembrando que $\dot{\theta} = \omega = \frac{\omega_D}{4}$ chega-se a:

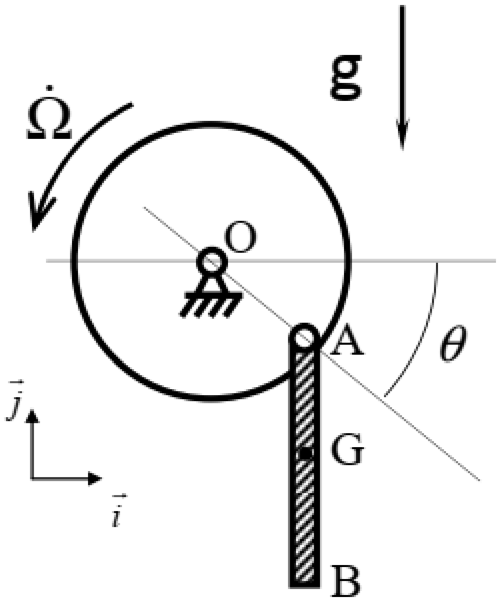
$$2\omega_D\dot{\omega}_D = \frac{1}{11}\left(-\frac{4\mu g}{R}\,\dot{\theta} - \frac{16K}{m}(\theta - \theta_0)\dot{\theta} + \frac{12g}{R}\cos\theta.\dot{\theta}\right) = \frac{1}{11}\left(-\frac{4\mu g}{R}\frac{\omega_D}{4} - \frac{16K}{m}(\theta - \theta_0)\frac{\omega_D}{4} + \frac{12g}{R}\cos\theta\right.$$

$$\dot{\omega}_D = \frac{1}{22}\left(-\frac{\mu g}{R} - \frac{4K}{m}(\theta - \theta_0) + \frac{3g}{R}\cos\theta\right)$$

P3–Q2–2015

2ª Questão (4,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, a barra AB, de massa m e comprimento L, está articulada no ponto A ao disco de massa m e raio R. O sistema parte do repouso, com a barra AB vertical e com a reta que passa por O e A inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. Em um dado instante inicial, o disco passa a ter uma aceleração angular conhecida $\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\Omega}\,\vec{k}$. Para este instante inicial, pede-se:

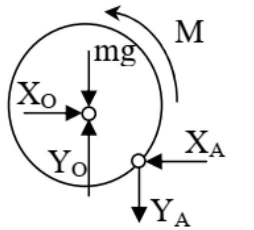


(f) o diagrama de corpo livre do disco e o diagrama de corpo livre da barra;
(g) a aceleração do ponto A;
(h) o vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ da barra;
(i) a aceleração do baricentro da barra;
(j) a força que o disco aplica na barra pela articulação do ponto A.

Dado: Para o disco $J_{z_O} = \dfrac{mR^2}{2}$, para a barra $J_{z_G} = \dfrac{mL^2}{12}$

❑ P3–Q2–2015

Sendo O ponto fixo e considerando que no instante inicial o sistema parte do repouso, têm-se:

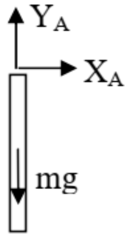


$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (A-O) + \Omega^2 \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (A-O)\right]$$

$$\vec{a}_A = \vec{0} + \dot{\Omega}\vec{k} \wedge R\left(\cos\theta\vec{i} - sen\theta\vec{j}\right) + \vec{0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_A = \dot{\Omega}R\left(sen\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)}$$

Para a aceleração do baricentro da barra podemos escrever:



$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (G-A) + \omega^2 \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (G-A)\right]$$

Considerando que no instante inicial o sistema parte do repouso:

$$\vec{a}_G = \dot{\Omega}R\left(sen\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2}\vec{j}\right) + \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \left(\dot{\Omega}Rsen\theta + \dot{\omega}\frac{L}{2}\right)\vec{i} + \dot{\Omega}R\cos\theta\vec{j}$$

TMA no disco, pólo em G: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

$$\vec{H}_G = J_{zG}\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = J_{zG}\dot{\omega}\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{M}_G = -X_A\frac{L}{2}\vec{k}\ , \quad \text{assim:}\ \frac{mL^2}{12}\dot{\omega}\vec{k} = -X_A\frac{L}{2}\vec{k} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{6X_A}{mL} \qquad (1)$$

TMB no disco:

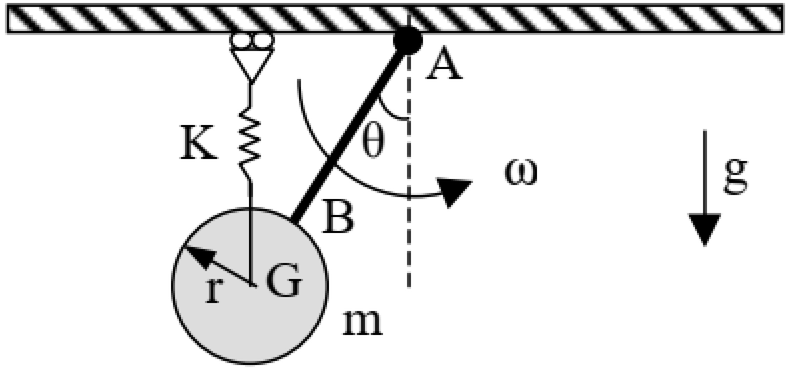
$$m\vec{a}_G = X_A\vec{i} + (Y_A - mg)\vec{j} \Rightarrow m\left(\dot{\Omega}Rsen\theta + \dot{\omega}\frac{L}{2}\right)\vec{i} + m\dot{\Omega}R\cos\theta\vec{j} = X_A\vec{i} + (Y_A - mg)\vec{j}$$

$$\begin{cases} X_A = m\dot{\Omega}Rsen\theta + m\dot{\omega}\dfrac{L}{2} & (2) \\ Y_A - mg = m\dot{\Omega}R\cos\theta & (3) \end{cases}$$

Resolvendo (1) e (2): $\boxed{X_A = \dfrac{m\dot{\Omega}Rsen\theta}{4}}$ e $\boxed{\dot{\omega} = -\dfrac{3\dot{\Omega}Rsen\theta}{2L}}$ De (3): $\boxed{Y_A = m\dot{\Omega}R\cos\theta + mg}$

P3–Q3–2005

3ª Questão (3,5 pontos). O disco de massa **m** e raio **r**, está suspenso pela barra **AB,** de massa desprezível e comprimento **3r,** articulada em **A.** Uma mola de constante elástica **K** é presa ao baricentro **G** do disco. A mola se mantém na direção vertical durante o movimento. No instante inicial $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, o sistema está em repouso e a mola não está distendida. Pede-se:



Dado: Momento de inércia baricêntrico do disco: $J_{GZ} = {mR^2}/{2}$

(a) A energia cinética do sistema em função da velocidade angular ω.
(b) O trabalho das forças externas aplicadas ao sistema, em função da posição angular θ.
(c) O vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ do disco.
(d) O vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do disco.

P3–Q3–2005

a) $T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}J_{zG}\omega^2;\ J_{zG}=\frac{mr^2}{2};v_G=4\omega r\left(\cos\theta\,\vec{i}-\sin\theta\,\vec{j}\right)\rightarrow T=\frac{33m\omega^2r^2}{4}$ (1,0)

b) $\tau=mg4r(\cos\theta-\cos\theta_0)-\frac{K}{2}(4r\cos\theta-4r\cos\theta_0)^2$ (1,0)

c) TEC:

$$\frac{33m\omega^2r^2}{4}=mg4r(\cos\theta-\cos\theta_0)-\frac{K}{2}(4r\cos\theta-4r\cos\theta_0)^2\rightarrow$$

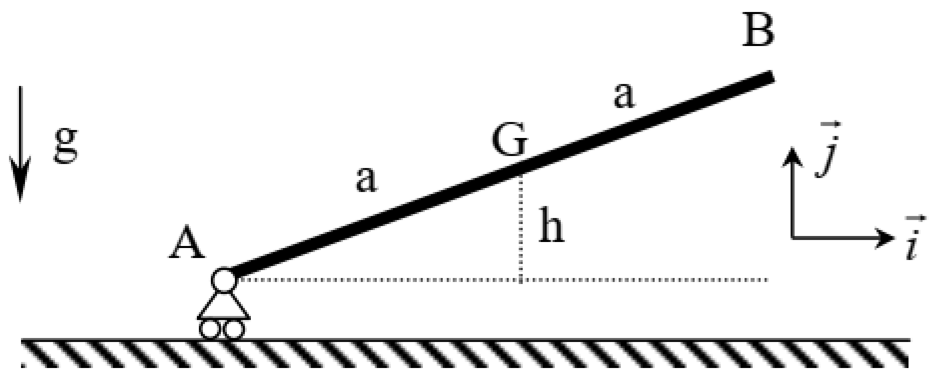
$$\vec{\omega}=\left[\frac{16g}{33r}(\cos\theta-\cos\theta_0)-\frac{32K}{33m}(\cos\theta-\cos\theta_0)^2\right]^{1/2}\vec{k}$$ (1,0)

d) $\frac{33\,m\,2\omega\dot{\omega}r^2}{4}=mg4r(-sin\theta)\dot{\theta}-\frac{K}{2}2(4r\cos\theta-4r\cos\theta_0)(-4rsin\theta)\dot{\theta}\rightarrow$

$$\dot{\omega}=\left[\frac{8g}{33r}-\frac{32K}{33m}(\cos\theta-\cos\theta_0)\right]sin\theta,com\ \dot{\vec{\omega}}=\dot{\omega}\vec{k}$$ (0,5)

P3–Q1–2005

1ª Questão (3,0 pontos). No instante inicial a barra **AB** homogênea, de massa **m** e comprimento **2a**, encontra-se na posição vertical e em repouso. Devido a uma pequena perturbação, a barra cai deslizando sua extremidade **A** sobre um plano. Pede-se:



Dado: Momento de inércia baricêntrico da barra **AB**: $J_{GZ} = {mL^2}/{12}$

(a) Justificar que o movimento do baricentro **G** é na vertical.

(b) A relação entre a velocidade angular ω da barra e a velocidade do baricentro $\mathbf{v_G}$.

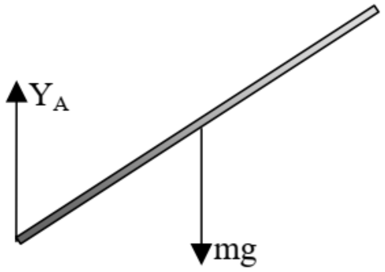
(c) O trabalho τ das forças atuantes na barra em função da altura h.

(d) A energia cinética da barra em função da altura h.

(e) A velocidade do baricentro $\mathbf{v_G}$ em função da altura h.

P3–Q1–2005

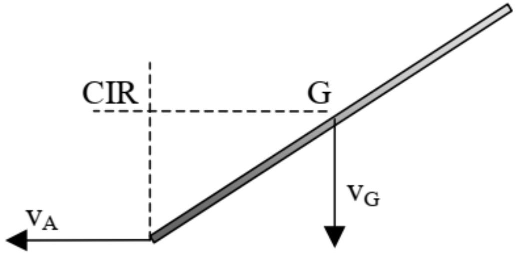
a) dcl da barra:



$$m\vec{a}_G = (Y_A - mg)\vec{j} \rightarrow \vec{a}_G.\vec{i} = 0 \rightarrow \vec{v}_G.\vec{i} = cte = 0\,(parte\,do\,repouso)$$

$\therefore x_G$ é constante. (0,5)

b) CIR da barra:



$$\vec{v}_G = \omega(-\vec{k}) \wedge (G - CIR)$$
$$\vec{v}_G = -\omega(a^2 - h^2)^{1/2}\vec{j}$$
$$v_G{}^2 = \omega^2(a^2 - h^2)$$

(0,5)

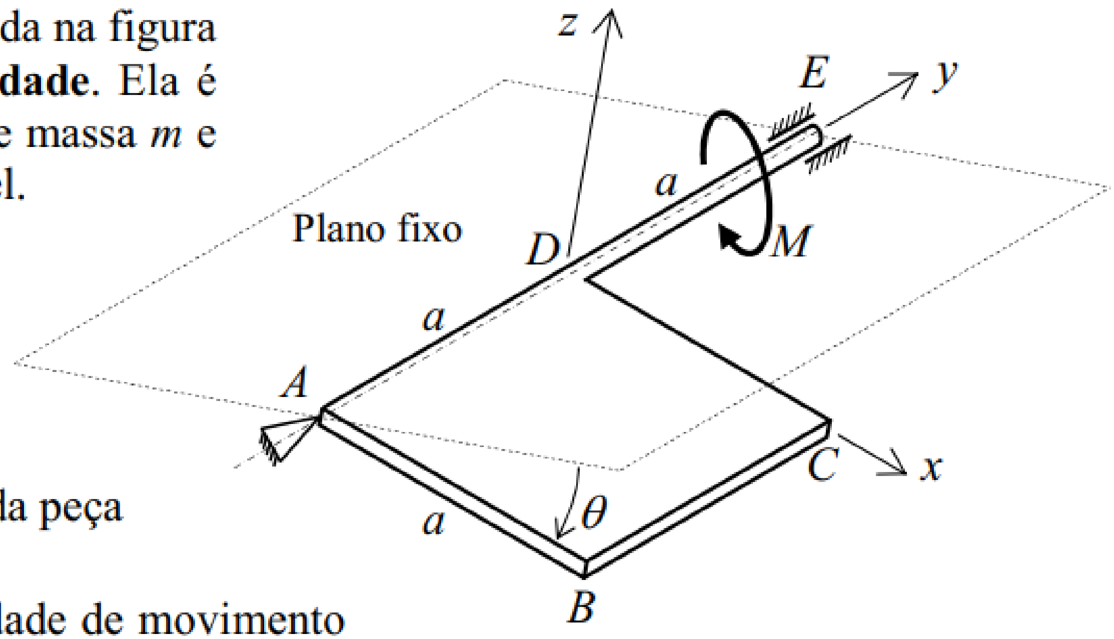
c) $\tau = mg(a-h)$ (0,5)

d) $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_{zG}\omega^2$; $J_{zG} = \frac{m4a^2}{12}$; $\therefore T = \frac{mv_G^2(4a^2 - 3h^2)}{6(a^2 - h^2)}$ (1,0)

e) TEC: $mg(a-h) = \frac{mv_G^2(4a^2 - 3h^2)}{6(a^2 - h^2)} \rightarrow v_G = (a-h)\sqrt{\frac{6(a+h)}{(4a^2 - 3h^2)}}$ (0,5)

❑ P3–Q3–2023

3ª Questão (3,5 pontos) A peça *ABCDE* mostrada na figura faz parte de um satélite no espaço, **sem gravidade**. Ela é formada por uma placa quadrada homogênea de massa *m* e lado *a*, soldada à barra *DE*, de massa desprezível.
Essa peça *ABCDE* é articulada em *A*, tem um anel em *E*, e gira em torno de *AE* acionada por um torque (momento) *M* variável dado. Pede-se, usando o sistema de coordenadas (*D*, *x*, *y*, *z*) fixo à peça:



a – (0,5 ponto) faça o diagrama de corpo livre da peça *ABCDE;*

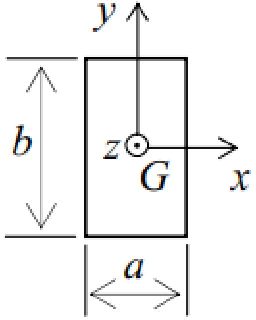
b – (1,0 ponto) obtenha a expressão da quantidade de movimento angular da peça, em relação ao polo *D*, em função da sua rotação $\omega \; (= \dot{\theta})$;

c – (0,5 ponto) obtenha os momentos e produtos de inércia da peça, envolvidos na expressão obtida no item (b);

d – (1,5 ponto) obtenha as reações em *A* e *E*, em função de *M* e ω, e desenhe o diagrama de corpo livre com as respostas finais.

$$J_{Gx} = \frac{mb^2}{12}$$

$$J_{Gz} = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12}$$



❑ P3–Q3–2019 (Reof.)

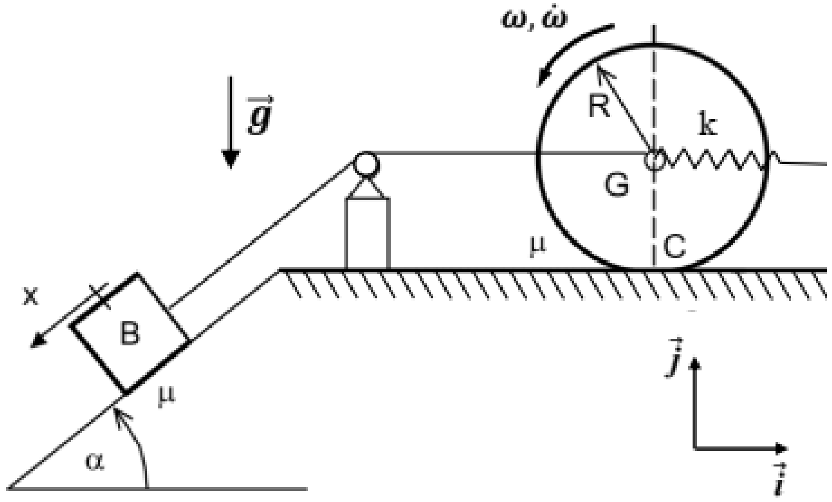
Questão 2 (3,5 pontos).
O disco rígido e homogêneo de centro G, raio R e massa M, rola sem escorregar num plano horizontal. O disco está conectado ao plano vertical por uma mola ideal linear de constante elástica k. Um fio ideal une o centro do disco a um bloco B de massa m, através de uma polia de inércia desprezível. O bloco B escorrega *com atrito* sobre um plano com inclinação α, *partindo do repouso* em $x = 0$. Assumindo que no instante inicial a mola não está deformada, e que o coeficiente de atrito entre o disco e o plano horizontal e entre o bloco e o plano inclinado é μ, pede-se:

a) a energia cinética do *sistema* em função da velocidade angular ω do disco;

b) o trabalho das forças externas do *sistema* em função de x;

c) a velocidade angular ω do disco em função de x;

d) a aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco em função de x.



PSUB–Q3–2023

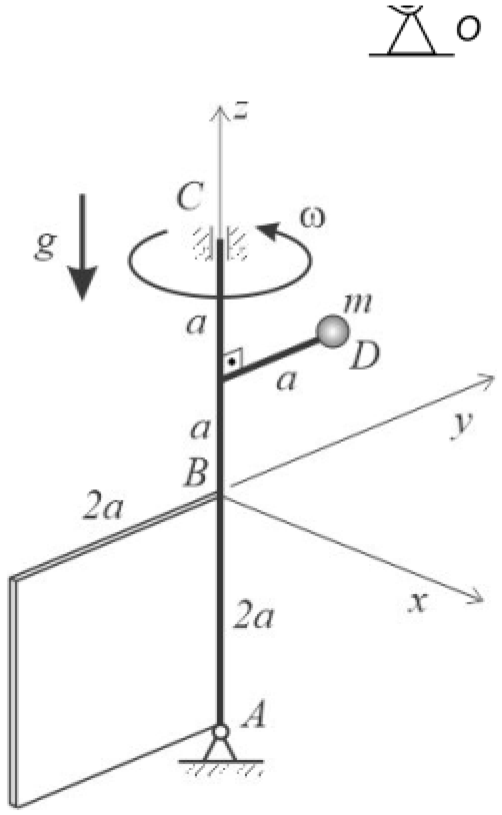
<u>**Questão 3 (3,5 pontos)**</u>. Na figura, no eixo vertical ABC há uma articulação em A e um anel em C. Soldadas nesse eixo, há uma placa homogênea, de massa m e lado $2a$, e uma barra, de comprimento a com uma massa m fixa em D, conforme mostrado na figura. O conjunto eixo, placa e barra está no plano Byz e o sistema de coordenadas (B, x, y, z) gira solidariamente ao conjunto com rotação ω constante dada. O eixo e a barra têm massas desprezíveis. Pede-se:

(a) (0,5) faça o diagrama de corpo livre (DCL) do conjunto;

(b) (1,0) obtenha a expressão da quantidade de movimento angular do conjunto, em relação ao polo B, em função da sua rotação ω;

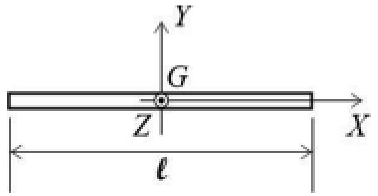
(c) (0,5) obtenha os momentos e produtos de inércia do conjunto, envolvidos na expressão do item (b);

(d) (1,5) obtenha as reações em A e C, em função de ω.



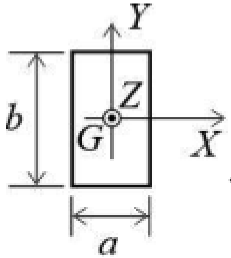
Formulário da prova: momentos de inércia de sólidos homogêneos

Barra homogênea (massa m, comprimento ℓ):



$$J_{GY} = J_{GZ} = \frac{1}{12} m \ell^2$$

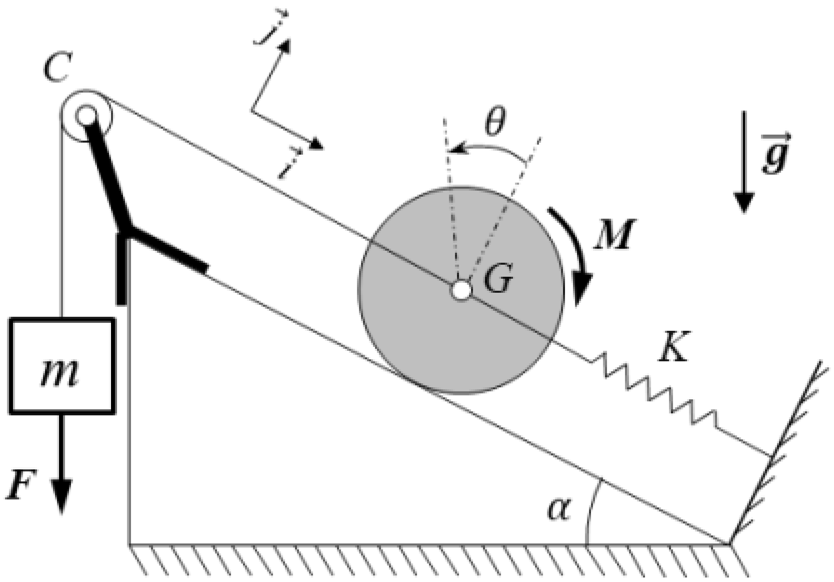
Placa retangular homogênea (massa m, lados a, b):



$$J_{GX} = \frac{1}{12} m b^2 \quad J_{GZ} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

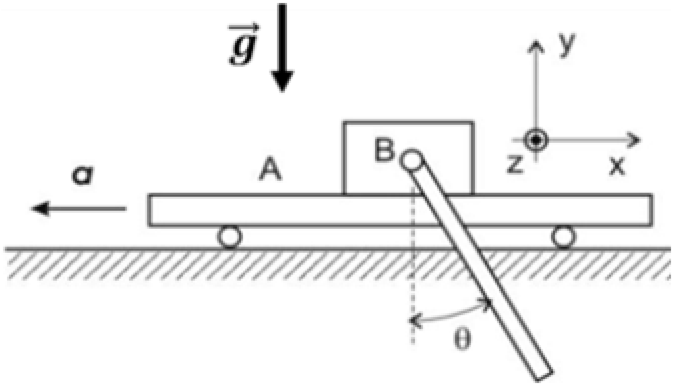
PSUB–Q2–2017

Questão 2 (3,5 pontos). Um disco homogêneo de massa $2m$, raio R e centro G rola sem escorregar sobre um plano inclinado, como mostrado na figura. O disco é conectado por um fio inextensível, de massa desprezível, a um corpo B de massa m, bem como a uma mola linear ideal de constante K fixa a uma parede. No instante inicial $t=0$, quando $\theta(0)=0$, o sistema está em equilíbrio e a mola encontra-se indeformada. Num instante posterior, um binário de momento M, constante, é aplicado ao disco. Concomitantemente, uma força F, também constante, é aplicada ao bloco. Sabendo que a polia com centro C tem massa desprezível, pede-se:



(a) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco.
(b) a energia cinética do sistema em função da velocidade angular $\dot{\theta}$ do disco.
(c) o trabalho dos esforços externos aplicados ao sistema, expressa em função da posição angular θ.
(d) a velocidade angular do disco, expressa em função da posição angular θ.
(e) a aceleração do centro de massa G do disco, expressa em função da posição angular θ.

❑ PSUB–Q2–2022 (Reof.)



Questão 2 (3,5 pontos). A plataforma A, de massa desprezível, mostrada na figura, se desloca para a esquerda com uma aceleração a constante. Sobre a plataforma, apoia-se um bloco B de massa m. Ao bloco, por sua vez, está articulada uma barra de comprimento L e massa m. Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco e a plataforma é μ, pede-se:

- **a)** Os diagramas de corpo livre do bloco e da barra.
- **b)** A aceleração a necessária para manter a barra em um dado ângulo θ constante.
- **c)** As forças na extremidade B da barra.
- **d)** O valor máximo de a para o qual o bloco não escorrega.

❑ P3–Q3–2008

3. (3,5 pts) Uma roda de bicicleta modelada por um anel de massa m e raio R está sob a ação de uma força $\vec{F}$ e de um binário de momento $\vec{T}$, conforme ilustrado na figura 4, e rola sem escorregar sobre a plataforma de massa M. O sistema de coordenadas $(B, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é solidário à plataforma. Não há atrito entre a plataforma e o piso. É dado o momento de inércia da roda de bicicleta (anel) em relação ao seu eixo: $J_G = mR^2$.

Solicita-se:

a) Fazer os diagramas de corpo livre do anel e da plataforma.

b) Determinar a relação cinemática entre as acelerações $\vec{a}_G$ do ponto G, $\vec{a}_B$ do ponto B e a aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do anel.

c) Determinar aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do anel em função dos dados do problema.

d) Determinar as forças no ponto de contato C em função dos dados do problema.

e) Determinar a relação entre F e T para que a força horizontal de contato no ponto C seja nula.