PME 3100 – Mecânica I

Aula de Exercícios – P1

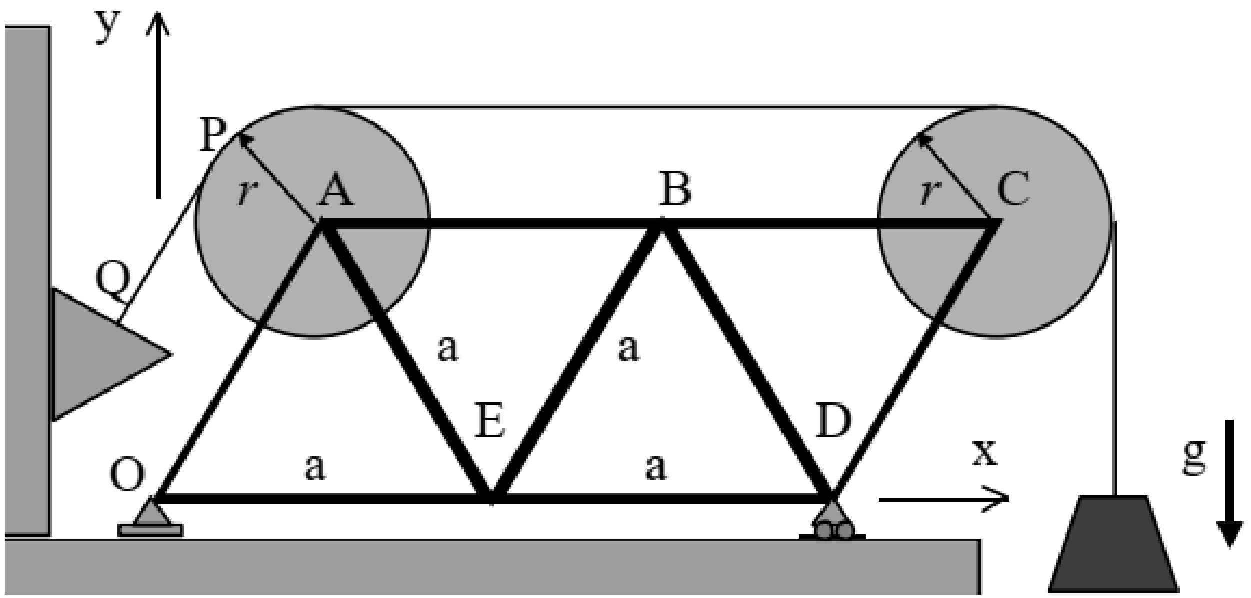
- Sistemas de Esforços
- Estática (Pórticos, 3D, Hidrostática, Atrito)

Prof. Francisco J. Profito
fprofito@usp.br

Exercício (2005–P1–Q3)

3ª Questão (3,5 pontos)

A treliça da figura ao lado é formada por um conjunto de barras em um arranjo de triângulos eqüiláteros, de lado a. Nas articulações A e C estão montadas duas polias, de massa desprezível e raio r. O fio ideal suporta a carga P e está preso em Q. O segmento PQ é paralelo a OA. Pede-se:

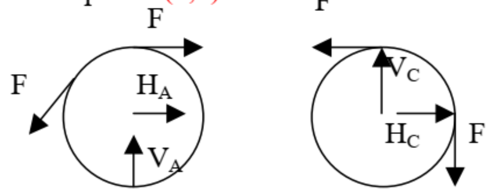


a) O diagrama de corpo livre (DCL) das polias.
b) O diagrama de corpo livre (DCL) da treliça.
c) Calcular as reações vinculares em O e D.
d) As forças nas barras OA e AE, indicando se são de tração ou compressão.

Exercício (2005–P1–Q3)

Solução

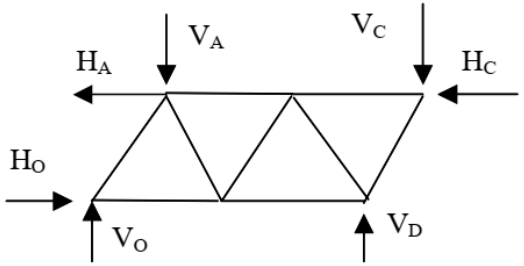
a) DCL das polias (0,5)



Impondo o equilíbrio das polias:

$$\begin{cases} H_A = -\dfrac{F}{2};\ V_A = \dfrac{F\sqrt{3}}{2} \\ H_C = F;\ V_C = F \end{cases}$$

b)DCL da treliça (1,0)



c)Impondo as condições de equilíbrio e substituindo os valores calculados em a):

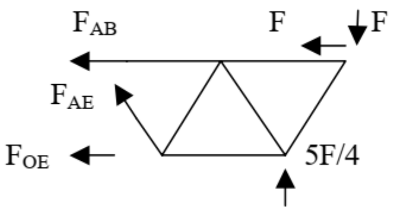
$$\begin{cases} H_O + \dfrac{F}{2} - F = 0; \\ V_O + V_D - \dfrac{F\sqrt{3}}{2} - F = 0; \\ \vec{M}_A = 0 \rightarrow V_D 2a + F\dfrac{5a}{2} - F\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{a}{2} - \dfrac{F}{2}a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0; \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} H_O = \dfrac{F}{2}; \\ V_D = \dfrac{5F}{4}; V_O = \dfrac{F}{4}\left(2\sqrt{3}-1\right) \end{cases}$$

(0,5) equacionamento e (0,5) respostas

d) "Cortando" a treliça nas barras AB, AE e OE:



Impondo o equilíbrio

$$F_{AB} + F_{OE} + F_{AE}\frac{1}{2} + F = 0;$$

$$F_{AE}\frac{\sqrt{3}}{2} + F\frac{5}{4} - F = 0;$$

$$\vec{M}_E = \vec{0} \rightarrow F_{AB}\frac{\sqrt{3}}{2}a + F\frac{\sqrt{3}}{2}a + F\frac{5}{4}a - F\frac{3}{2}a = 0;$$

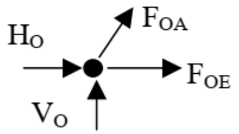
Resolvendo, chega-se a:

$$F_{AB} = F\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - 1\right)\ comp.$$

$$F_{AE} = -F\frac{\sqrt{3}}{6}\ comp.$$

$$F_{OE} = -F\frac{\sqrt{3}}{12}\ comp.$$

Finalmente, isolando o nó O:



Impondo o equilíbrio na vertical

$$F_{OA}\frac{\sqrt{3}}{2} + V_O = 0 \rightarrow F_{OA} = F\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - 1\right)\ comp.$$

(0,5) equacionamento e (0,5) respostas

Exercício (2015R–P1–Q3)

3ª Questão (3,5 pontos)

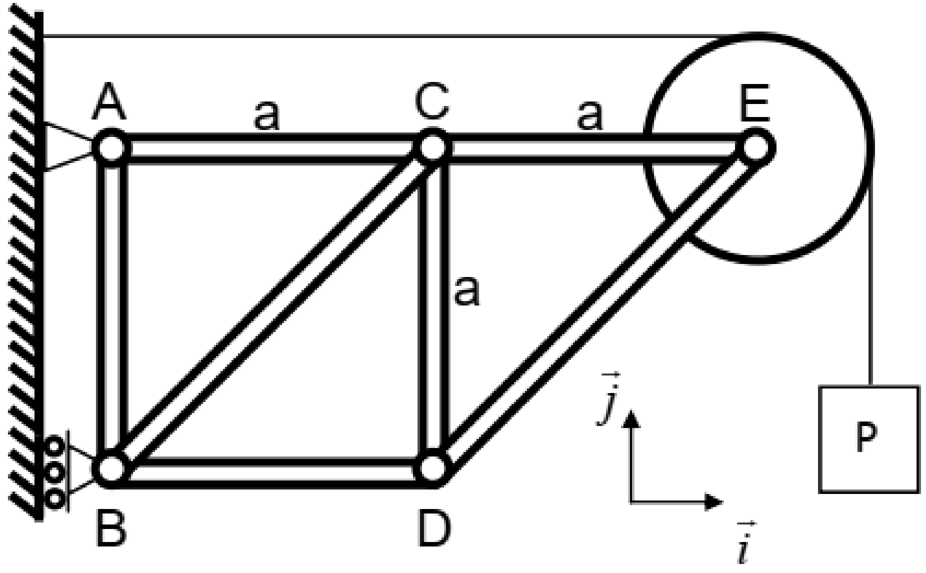
A treliça de sete barras indicada na figura é suportada por uma articulação no nó A e por um apoio simples no nó B. No nó E, a treliça está articulada a uma polia de raio R e massa desprezível, que sustenta um peso P.

Pede-se:

a) Os esforços que a polia exerce sobre a treliça

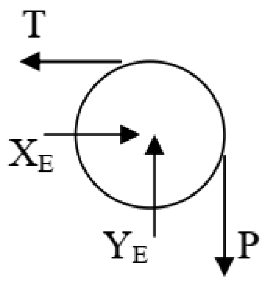
b) As reações vinculares em A e B

c) As forças nas barras AC e BD, indicando se são de tração ou de compressão



Exercício (2015R–P1–Q3)

Do equilíbrio da polia:

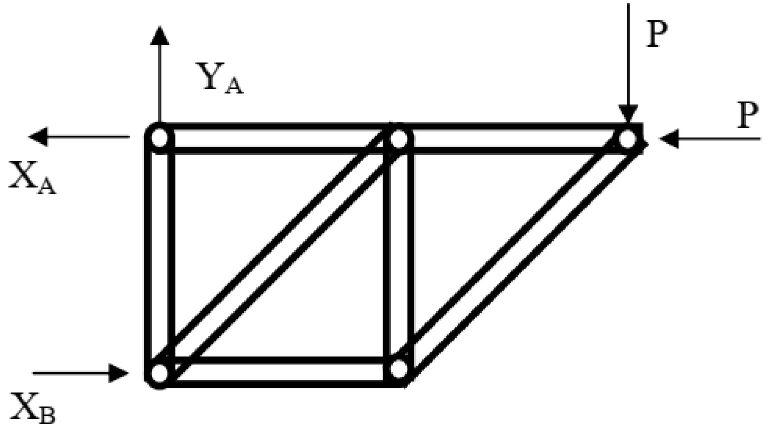


$$\sum F_x = 0 \therefore X_E = T$$
$$\sum F_y = 0 \therefore Y_E = P$$
$$\sum M_{zE} = 0 \therefore \boxed{T = P}$$

Resulta: $\boxed{X_E = P}$ e $\boxed{Y_E = P}$

As forças que a polia exerce sobre a treliça são os pares ação reação de X_E e Y_E respectivamente.

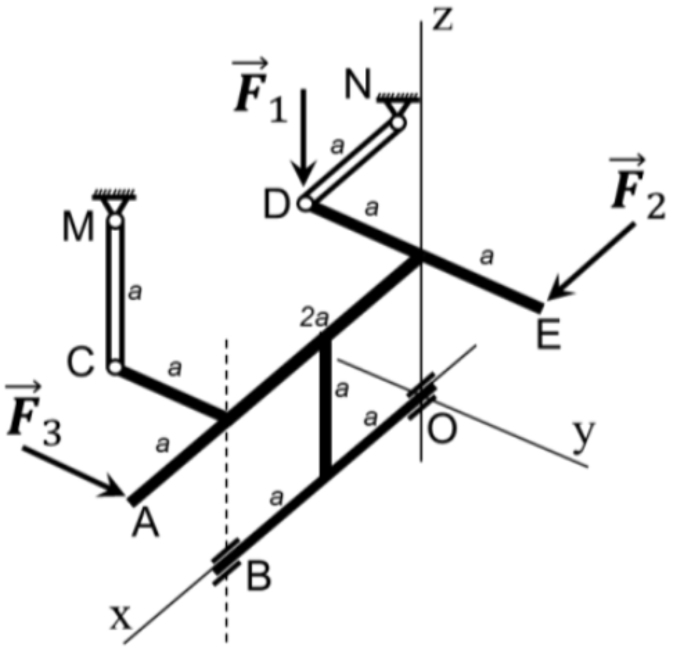
Do equilíbrio da treliça:



$$\sum F_x = 0 \therefore X_B - X_A - P = 0$$
$$\sum F_y = 0 \therefore \boxed{Y_A = P}$$
$$\sum M_{zA} = 0 \therefore X_B \cdot a = P \cdot 2a$$
$$\Rightarrow \boxed{X_B = 2P}\text{, e assim: }\boxed{X_A = P}$$

Exercício (2022–P1–Q1)

1ª Questão (3,5 pontos). A peça $OBACDE$ mostrada na figura mantém-se em equilíbrio apoiada nos anéis O e B e articulada às barras MC e ND, sendo a barra MC paralela ao eixo Oz e a barra ND paralela ao eixo Ox. Os vínculos em C, D, N e M são articulações ideais e os pesos da peça e das barras MC e ND são desprezíveis. Sobre o sistema são aplicadas as forças $(\vec{F}_1, D)$, com $\vec{F}_1 = -P\vec{k}$; $(\vec{F}_2, E)$, com $\vec{F}_2 = P\vec{i}$ e $(\vec{F}_3, A)$, com $\vec{F}_3 = P\vec{j}$.



Parte 1 – Considerando **unicamente o sistema composto pelas forças ativas** $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$:

a) Calcular a resultante do sistema de forças ativas.
b) Calcular o momento em relação ao polo E.
c) Verificar, justificando sua resposta, se o sistema de forças ativas é redutível a uma única força.
d) Calcular o valor do momento mínimo.

Parte 2 – Considerando todo o sistema:

e) Fazer o diagrama de corpo livre da peça $OBACDE$.
f) Calcular as reações vinculares nos pontos B, M, N e O.

Exercício (2022–P1–Q1)

Parte 1

a) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = P\vec{i} + P\vec{j} - P\vec{k}$ **(0,5 ponto)**

b) $\vec{M}_E = (D - E) \wedge \vec{F}_1 + (E - E) \wedge \vec{F}_2 + (A - E) \wedge \vec{F}_3$

$\Rightarrow \vec{M}_E = (-2a\vec{j}) \wedge -P\vec{k} + \vec{0} + (3a\vec{i} - a\vec{j}) \wedge P\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{M}_E = 2aP\vec{i} + 3aP\vec{k}$ **(0,5 ponto)**

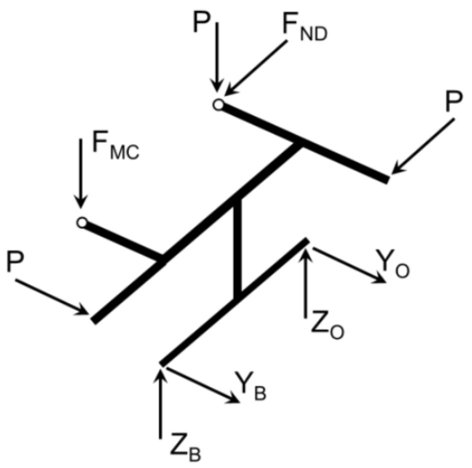
c) Invariante escalar $I = \vec{M}_E \cdot \vec{R} = 2aP^2 - 3aP^2$, portanto $I = -aP^2 \neq 0$. O sistema não pode ser reduzido a uma força **(0,5 ponto)**

d) $\vec{M}_{min} = \frac{I}{|\vec{R}|^2}\vec{R} = \frac{-aP^2}{3P^2}\left(P\vec{i} + P\vec{j} - P\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{M}_{min} = \frac{-aP}{3}\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$

(0,5 ponto)

Parte 2

e) Veja diagrama de corpo livre ao lado. **(1,0 ponto)**



f) Equações de equilíbrio:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = P + F_{ND} = 0 \\ \sum F_y = Y_O + Y_B + P = 0 \\ \sum F_z = Z_O + Z_B - P - F_{MC} = 0 \end{cases} \qquad \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M_{Ox} = Pa + F_{MC}a - Pa = 0 \\ M_{Oy} = Pa + F_{ND}a - 2Z_Ba + 2F_{MC}a = 0 \\ M_{Oz} = -Pa + F_{ND}a + 2Y_Ba + 3Pa = 0 \end{cases}$$

(0,5 ponto)

Resolvendo o sistema linear de equações para as variáveis $(Y_O, Z_O, Y_B, Z_B, F_{ND}, F_{MC})$, obtêm-se:

$$Y_O = \frac{-P}{2} \qquad Y_B = \frac{-P}{2} \qquad F_{ND} = -P \qquad Z_O = P \qquad Z_B = 0 \qquad F_{MC} = 0$$

❑ Exercício (P1–Q2–2011)

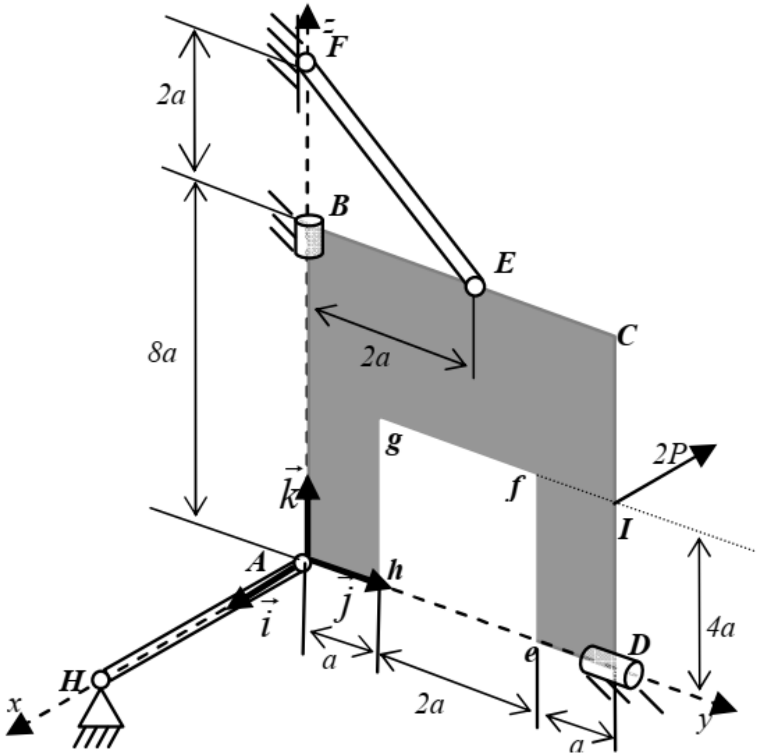
QUESTÃO 2 (3,0 pontos). A placa homogênea *ABCDefgh* de peso P e sujeita a uma força horizontal $-2P\vec{i}$ aplicada ao ponto *I*, mantém-se em equilíbrio apoiada nas barras *EF* e *AH*, ambas de peso desprezível, e nos anéis *B* e *D* indicados na figura. Nessas condições, pede-se:

(a) a posição do baricentro da placa *ABCDefgh*; **(0,5)**

(b) os diagramas de corpo livre das barras *AH* e *EF*; **(0,5)**

(c) o diagrama de corpo livre da placa *ABCDefgh*; **(0,5)**

(d) as forças nas barras *AH* e *EF* e as reações nos anéis *B* e *D*. **(1,5)**



❑ Exercício (P1–Q2–2011)

QUESTÃO 2.

Como a figura da placa homogênea *ABCDefgh* esquematizada ao lado possui um eixo de simetria vertical, a coordenada y de seu baricentro vale:

$$y_G = 2a$$

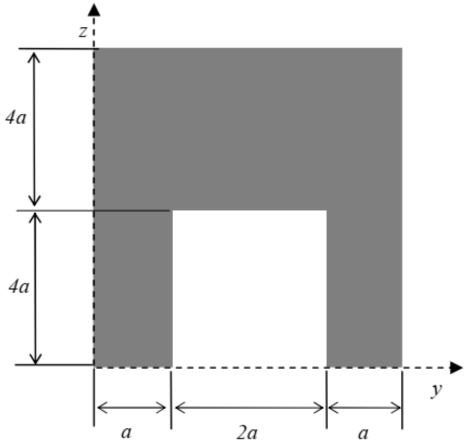
enquanto que a coordenada z é dada por:

$$z_G = \frac{32a^2 \cdot 4a - 8a^2 \cdot 2a}{32a^2 - 8a^2} = \frac{14a}{3}$$

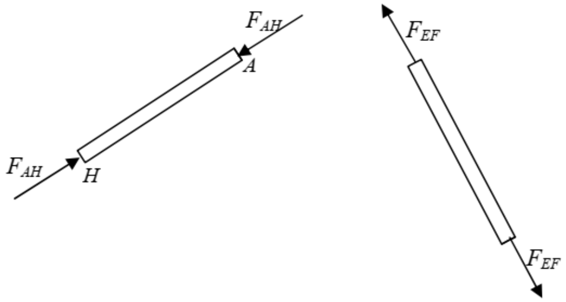
Portanto, o baricentro da placa *ABCDefgh* é o ponto

$$G = \left(0, 2a, \frac{14}{3}a\right)$$

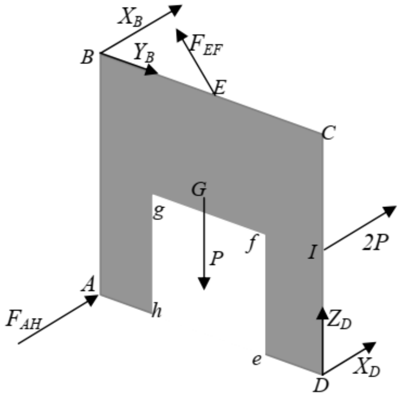
(Resposta a)



Os diagramas de corpo livre da barra *AH* e da placa *ABCDefgh* são ilustrados nas figuras abaixo.



(Resposta b)



(Resposta c)

Aplicando-se as equações de equilíbrio ao sistema de forças atuantes sobre a placa *ABCDefgh*, obtém-se:

$$\boxed{X_B + X_D + F_{AH} + 2P = 0} \quad (1)$$

$$\boxed{Y_B - F_{EF}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0} \quad (2)$$

$$\boxed{F_{EF}\frac{\sqrt{2}}{2} + Z_D - P = 0} \quad (3)$$

$$M_{Ax} = Z_D \cdot 4a - P \cdot 2a + (E - A) \wedge \vec{F}_{EF} \cdot \vec{i} = Z_D \cdot 4a - P \cdot 2a + \left(2a\vec{j} + 8a\vec{k}\right) \wedge \left(-F_{EF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + F_{EF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) \cdot \vec{i} - Y_B \cdot 8a = 0$$

$$\boxed{\therefore 4Z_D - 2P - 8Y_B + 5\sqrt{2}F_{EF} = 0} \quad (4)$$

$$M_{Ay} = -X_B \cdot 8a - 2P \cdot 4a = 0$$

$$\boxed{\therefore X_B = -P} \quad (5)$$

$$M_{Az} = X_D \cdot 4a + 2P \cdot 4a = 0$$

$$\boxed{\therefore X_D = -2P} \quad (6)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1)-(6), resulta, finalmente, que:

$\boxed{X_B = -P}$, $\boxed{Y_B = P}$, $\boxed{X_D = -2P}$, $\boxed{Z_D = 0}$, $\boxed{F_{EF} = P\sqrt{2}}$, $\boxed{F_{AH} = P}$

Na barra *EF* atuam duas forças de tração com módulo $\boxed{\left|\vec{F}_{EF}\right| = P\sqrt{2}}$

Na barra *AH* atuam duas forças compressivas de módulo $\boxed{\left|\vec{F}_{AH}\right| = P}$

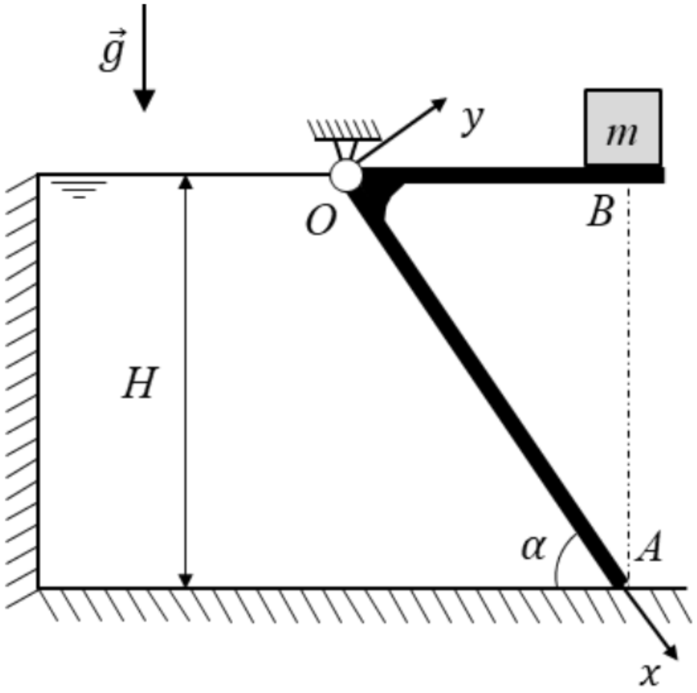
Nos anéis *B* e *D* atuam, respectivamente, as reações

$\boxed{\vec{R}_B = P\vec{i} + P\vec{j}}$ e $\boxed{\vec{R}_D = 2P\vec{i}}$

(Resposta d)

Exercício (P1–Q3–2018R)

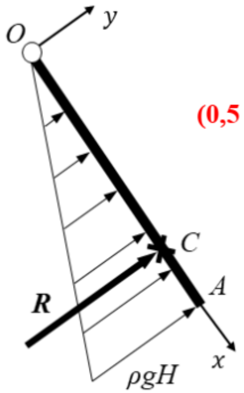
2ª Questão (3,0 pontos). A figura mostra a seção transversal de um reservatório, de largura L (ortogonal ao plano da figura), projetado para armazenar um fluido ideal de densidade ρ (kg/m^3). O fluido é mantido no reservatório por meio da comporta AOB, de massa desprezível, articulada em O e apoiada no solo em A, **sem atrito**. A altura máxima H de fluido que pode ser armazenado no reservatório é controlada por um contrapeso, de massa m (kg), situado na extremidade B da comporta. A aceleração da gravidade é g (m/s^2). Nestas condições, pede-se:



(a) construir o diagrama de forças hidrostáticas atuantes sobre a superfície AO;
(b) determinar a resultante R do sistema de forças hidrostáticas considerado no item (a);
(c) determinar a abscissa x do centro de pressões do sistema de forças hidrostáticas considerado no item (a);
(d) desenhar o diagrama de corpo livre da comporta AOB;
(e) determinar o esforço atuante no ponto de apoio A;
(f) determinar o valor mínimo da massa do contrapeso necessária para manter o sistema sempre em equilíbrio estático.

❑ Exercício (P1–Q3–2018R)

(a) O diagrama de forças hidrostáticas atuantes sobre a superfície AO é ilustrado abaixo:



(0,5 ponto)

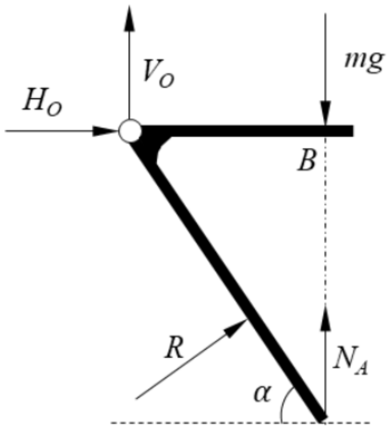
(b) A resultante R do sistema de forças hidrostáticas corresponde ao volume do prisma de pressões, cuja seção transversal é ilustrada na solução do item a):

$$R \equiv \text{volume do prisma de pressões} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R} = \frac{\rho g H^2 L}{2\sin\alpha}$$ **(0,5 ponto)**

(c) A abscissa x do centro de pressões C do sistema de forças hidrostáticas corresponde à projeção, na superfície AO, do baricentro da seção transversal do prisma de pressões ilustrada na solução do item a). Portanto:

$$\boldsymbol{x_C} = \frac{2H}{3\sin\alpha}$$ **(0,5 ponto)**

(d) O diagrama de corpo livre da comporta AOB é ilustrado abaixo:



(0,5 ponto)

(e) Calculando o momento resultante com respeito ao pólo O, e considerando a condição de equilíbrio estático, tem-se:

$$\sum \vec{M}_O = -mg\frac{H}{\tan\alpha} + N_A\frac{H}{\tan\alpha} + Rx_C = 0$$

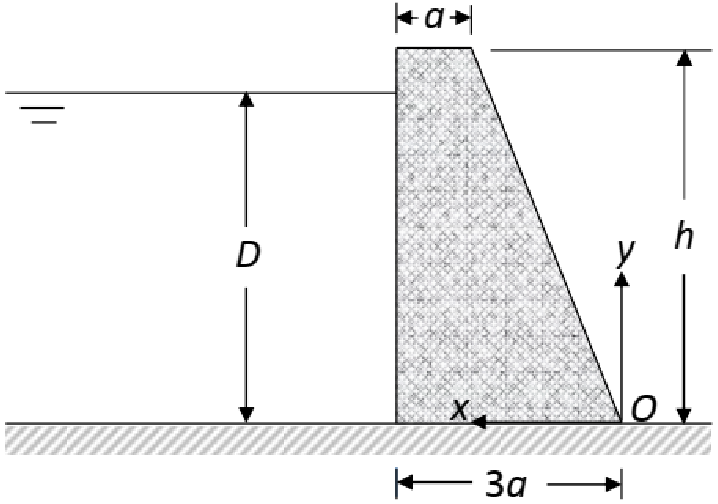
$$-mg\frac{H}{\tan\alpha} + N_A\frac{H}{\tan\alpha} + \left(\frac{\rho g H^2 L}{2\sin\alpha}\right)\frac{2H}{3\sin\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_A} = \boldsymbol{mg} - \frac{\rho g H^2 L}{3\sin\alpha\cos\alpha}$$ **(0,5 ponto)**

(f) Para o sistema permanecer sempre em equilíbrio estático, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$N_A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m} \geq \frac{\rho H^2 L}{3\sin\alpha\cos\alpha}$$ **(0,5 ponto)**

Exercício (P1–Q3–2014)

Questão3(3,5 pontos):



A figura mostra a seção transversal de uma barragem de gravidade projetada para suportar uma lâmina d´água de altura D. Sabe-se que não há infiltração de água entre o solo e a barragem. São dados os pesos por unidade de volume da água, γ_a, e do material da barragem, γ_c. É dada, também, a largura L da barragem (perpendicular ao plano da figura). Pedem-se:

(a) a posição do centro de massa da barragem em relação ao sistema Oxy indicado;

(b) a resultante das pressões hidrostáticas sobre a barragem;

(c) a posição do centro dessas pressões, em relação ao sistema Oxy indicado;

(d) o mínimo valor que deve ter a dimensão a da barragem para que ela não escorregue, sabendo que o coeficiente de atrito entre a barragem e o solo é μ;

(e) o mínimo valor que deve ter a dimensão a da barragem para que ela não tombe.

❑ Exercício (P1–Q3–2014)

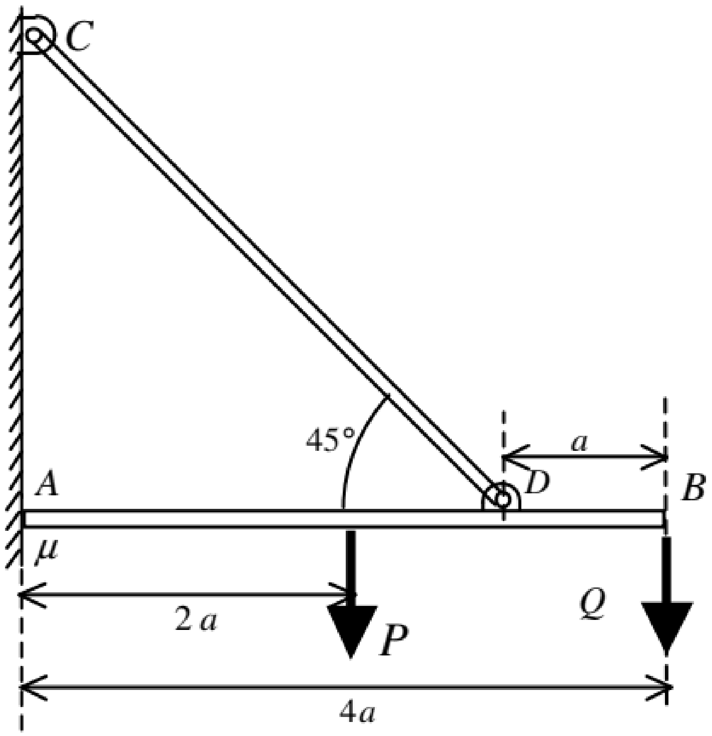
a)	$x_G = \frac{\left(ah\left(2a+\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}2ah\frac{2}{3}2a\right)}{ah+\frac{1}{2}2ah} \Rightarrow x_G = \frac{23}{12}a$ (0,5) $y_G = \frac{\left(ah\frac{h}{2}+\frac{1}{2}2ah\frac{1}{3}h\right)}{ah+\frac{1}{2}2ah} \Rightarrow y_G = \frac{5}{12}h$ (0,5)
b)	$R = \frac{1}{2}\gamma_a D^2 L$ (0,5)
c)	$x_c = 3a;\ y_c = \frac{D}{3}$ (0,5)
d)	$R \leq \mu P;\ P = 2\,ahL\gamma_c \Rightarrow \frac{1}{2}\gamma_a D^2 L \leq \mu 2\,ahL\gamma_c \Rightarrow a_{min} = \frac{1}{\mu}\frac{\gamma_a}{\gamma_c}\frac{D^2}{4h}$ (0,5)
e)	$P x_G \geq R y_c \Rightarrow 2\,ahL\gamma_c \frac{23}{12}a \geq \frac{1}{2}\gamma_a D^2 L \frac{D}{3} \Rightarrow a_{min} = \sqrt{\frac{\gamma_a D^3}{23\gamma_c h}}$ (0,5: DCL) + (0,5: resposta)

❑ Exercício (<u>P1–Q3–2016</u>)

<u>**3ª Questão (3.0 pontos)**</u>**:** A estrutura ilustrada na figura compõe-se de uma barra CD, de peso desprezível, articulada a uma parede vertical e a uma barra horizontal AB, de peso P. A extremidade A da barra AB apoia-se na parede, enquanto em B aplica-se uma força vertical Q. O coeficiente de atrito no contato entre a parede e a barra AB é μ. Pede-se:

a) construir os diagramas de corpo livre das barras AB e CD;

b) determinar o valor máximo de Q compatível com o equilíbrio da estrutura.

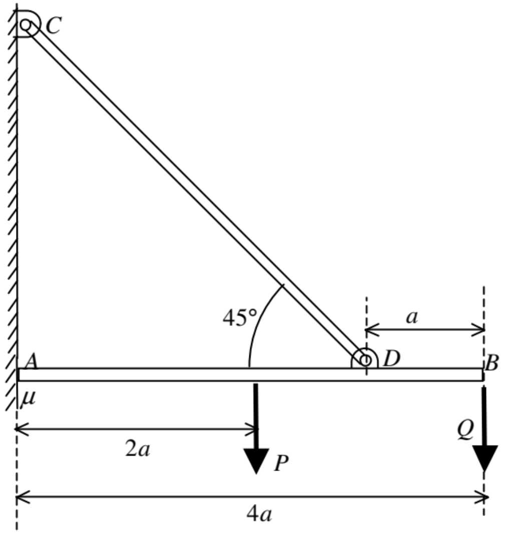


❑ Exercício (P1–Q3–2016)

<u>Resolução da 3ª questão (3.0 pontos)</u>: A estrutura ilustrada na figura compõe-se de uma barra CD, de peso desprezível, articulada a uma parede vertical e a uma barra horizontal AB, de peso P. A extremidade A da barra AB apoia-se na parede, enquanto em B aplica-se uma força vertical Q. O coeficiente de atrito no contato entre a parede e a barra AB é μ. Pede-se:

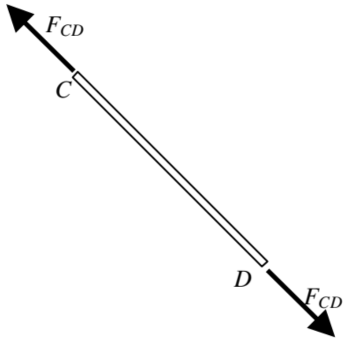
a) construir os diagramas de corpo livre das barras AB e CD;

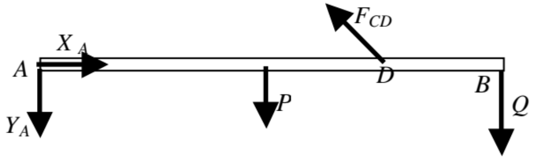
b) determinar os valor máximo de Q compatível com o equilíbrio da estrutura.



Resolução

Os diagramas de corpo livre das barras CD e AB são apresentados na figura abaixo: (1,0 pontos)





iminência de deslizamento 'para cima'

Considerando-se em seguida o caso de deslizamento iminente 'para cima', tem-se:

$$\sum F_{xi} = 0 \Rightarrow X_A - F_{CD}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{yi} = 0 \Rightarrow -Y_A - P - Q + F_{CD}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow -P2a - Q4a + F_{CD}\frac{\sqrt{2}}{2}3a = 0 \Rightarrow F_{CD} = \frac{\sqrt{2}}{3}(2P + 4Q) \qquad (3)$$ (1,0 pontos)

Substituindo-se (1) em (2) e em (3), obtêm-se:

$$X_A = \frac{2P + 4Q}{3} \text{ e } Y_A = \frac{Q - P}{3}$$ (0,5 pontos)

Para que não ocorra deslizamento 'para cima' deve-se ter:

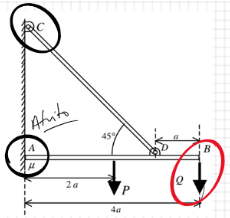
$$Y_A < \mu X_A \Rightarrow \frac{Q-P}{3} < \mu\frac{2P+4Q}{3} \Rightarrow Q < \frac{1+2\mu}{1-4\mu}P \quad \text{no limite máximo: } Q = \frac{1+2\mu}{1-4\mu}P$$ (0,5 pontos)

❑ Exercício (P1–Q3–2016)

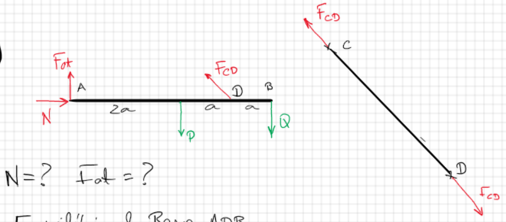
2ª Questão (3.0 pontos): A estrutura ilustrada na figura compõe-se de uma barra CD, de peso desprezível, articulada a uma parede vertical e a uma barra horizontal AB, de peso P. A extremidade A da barra AB apoia-se na parede, enquanto em B aplica-se uma força vertical Q. O coeficiente de atrito no contato entre a parede e a barra AB é μ. Pede-se:

a) construir os diagramas de corpo livre das barras AB e CD;

b) determinar o valor máximo de Q compatível com o equilíbrio da estrutura.



a)



b) $N = ?$ $\quad F_{at} = ?$

- Equilíbrio da Barra ADB

$\begin{cases} 3 \text{ incógnitas } (N, F_{at}, F_{CD}) \\ 3 \text{ equações } (2D) \end{cases}$

$$\vec{R} = \vec{0} : \begin{cases} R_x = N - F_{CD}\cos 45 = 0 \\ R_y = F_{at} + F_{CD}\sin 45 - P - Q = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} : \left\{ M_{A_z} = -P \cdot 2\cancel{a} + F_{CD}\sin 45 \cdot 3\cancel{a} - Q \cdot 4\cancel{a} = 0 \right.$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} N = \dfrac{2P+4Q}{3} \\ F_{at} = \dfrac{P-Q}{3} \\ F_{CD} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(2P+4Q) \end{cases}$$

$$N = F_{CD}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{3} \cdot (2P+4Q)$$

$$\boxed{N = \frac{(2P+4Q)}{3}}$$

$$F_{at} + F_{CD}\frac{\sqrt{2}}{2} = P + Q$$

$$F_{at} + \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{3}(2P+4Q) = P + Q$$

$$F_{at} + \frac{(2P+4Q)}{3} = \frac{3(P+Q)}{3}$$

$$F_{at} = \frac{3P+3Q-2P-4Q}{3}$$

$$\boxed{F_{at} = \frac{P-Q}{3}}$$

$$3F_{CD}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2P + 4Q$$

$$\sqrt{2}F_{CD} = \frac{4P+8Q}{3}$$

$$F_{CD} = \frac{4P+8Q}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(4P+8Q)}{3 \cdot 2}$$

$$\boxed{F_{CD} = \frac{\sqrt{2}}{3}(2P+4Q)}$$

c) Lei de Coulomb (Atrito Seco)

$$|F_{at}| \leqslant \mu_e |N|$$

$$\left|\frac{P-Q}{\cancel{3}}\right| \leqslant \mu_e \underbrace{\left|\frac{2P+4Q}{\cancel{3}}\right|}_{>0}$$

$$|P-Q| \leqslant \mu_e(2P+4Q)$$

Utilizando a propriedade:

$$|x| \leqslant a \rightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$

$$\overbrace{-\mu_e(2P+4Q) \leqslant (P-Q)}^{1} \underbrace{\leqslant \mu_e(2P+4Q)}_{2}$$

1

$$-\mu_e(2P+4Q) \leqslant (P-Q)$$
$$P-Q \geqslant -\mu_e(2P+4Q)$$
$$-Q + 4\mu_e Q \geqslant -2\mu_e P - P \quad \times(-1)$$
$$Q - 4\mu_e Q \leqslant P + 2\mu_e P$$
$$Q(1-4\mu_e) \leqslant P(1+2\mu_e)$$
$$Q \leqslant \frac{P(1+2\mu_e)}{(1-4\mu_e)}$$

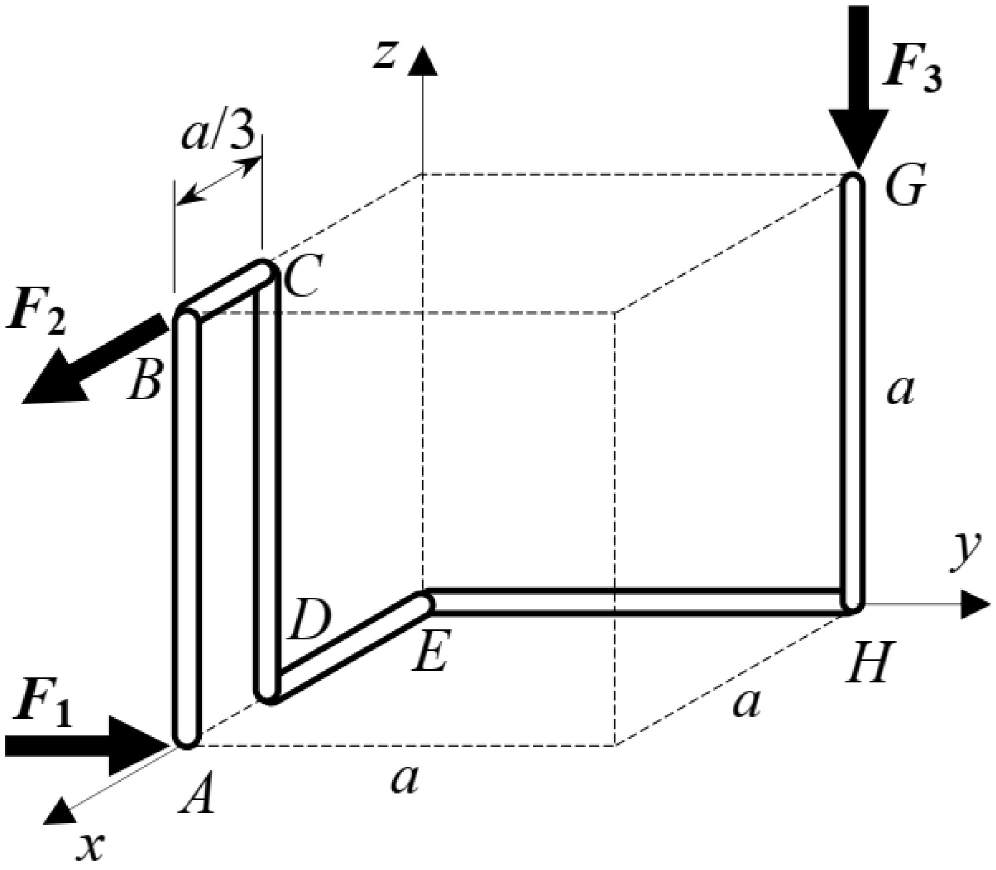
2

$$P - Q \leqslant \mu_e(2P+4Q)$$
$$-Q - 4\mu_e Q \leqslant 2\mu_e P - P \quad \times(-1)$$
$$Q(1+4\mu_e) \geqslant P(1-2\mu_e)$$
$$Q \geqslant \frac{P(1-2\mu_e)}{(1+4\mu_e)}$$

$$\boxed{\frac{P(1-2\mu_e)}{(1+4\mu_e)} \leqslant Q \leqslant \frac{P(1+2\mu_e)}{(1-4\mu_e)}}$$

Valor máximo de Q compatível com o equilíbrio! (barra não desliza para cima)

❑ Exercício (P1–Q2–2008)



1ª Questão (3,0 pontos): A barra *ABCDEHG* está sob a ação do sistema de forças ($\vec{F}_1$, A), ($\vec{F}_2$, B) e ($\vec{F}_3$, G). Pede-se:

a) A resultante $\vec{R}$ e o momento $\vec{M}_E$ do sistema de forças em relação ao pólo E.

b) Deseja-se restringir todos os movimentos da barra vinculando-a em um único ponto. Considerando $\left|\vec{F}_i\right| = F$, para $i = 1, 2, 3$:

b_1) Determine o tipo de vínculo que deve ser empregado e justifique a escolha.

b_2) Determine a posição na qual o vínculo deve ser colocado na barra de modo a minimizar as reações vinculares que mantém a barra em equilíbrio estático.

b_3) Calcule essas reações vinculares.

❑ Exercício (P1–Q2–2017R)

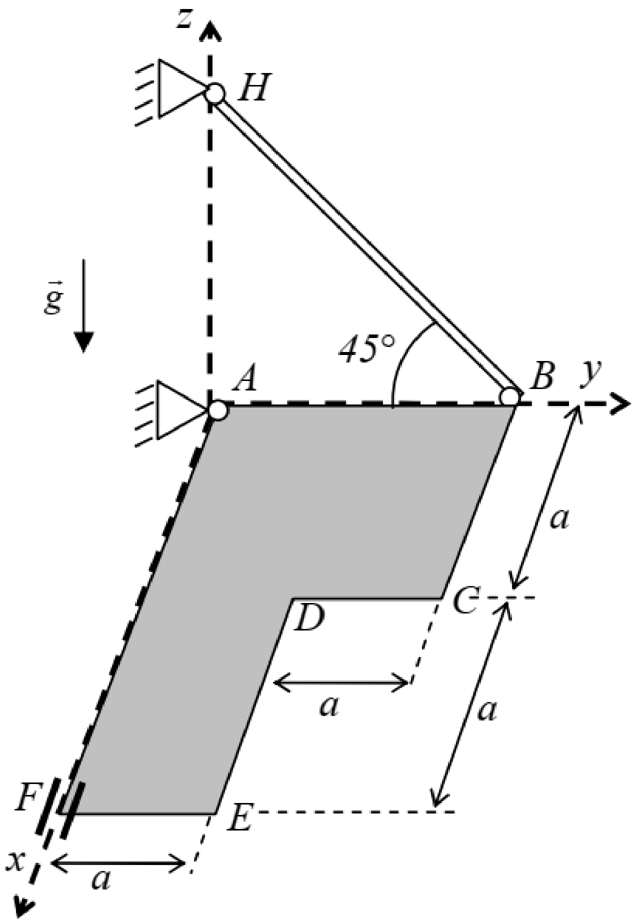
Questão 2 (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura abaixo é constituído por uma placa homogênea *ABCDEF*, de massa *m*, e por uma barra *BH,* de massa desprezível. A placa é articulada à barra em *B*, sendo ligada a uma parede plana vertical (plano *xz*) por meio de uma articulação em *A* e um anel em *F*. A barra *BH* pertence ao plano *yz* e é ligada à parede vertical por meio de uma articulação em *H*. Pede-se:

(a) determinar a posição do centro de massa da placa *ABCDEF*;

(b) desenhar os diagramas de corpo livre da placa e da barra;

(c) calcular as reações na articulação *A* e no anel *F*;

(d) calcular as forças na barra *BH*.



RESOLUÇÃO

❑ Exercício (P1–Q2–2017R)

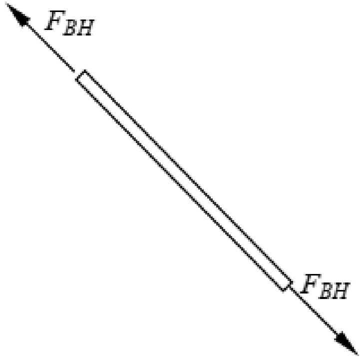
O centro de massa da placa $ABCDEF$ é obtido supondo que ela seja o resultado da composição de uma placa quadrada de lado $2a$ e densidade positiva e de uma placa quadrada de lado a e densidade negativa, ou seja:

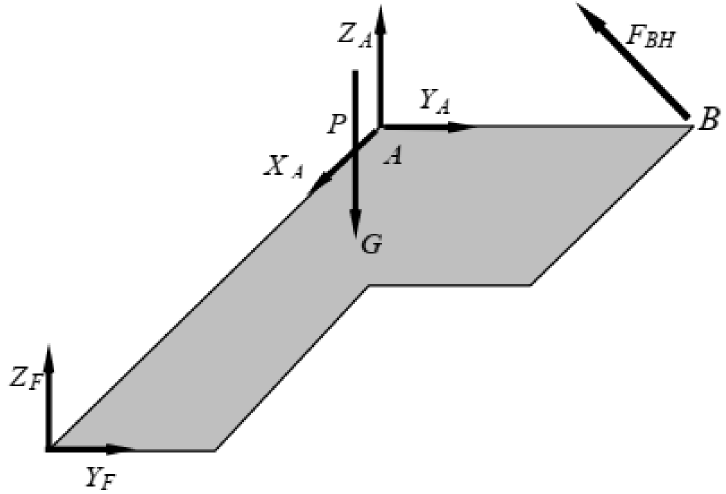
$$x_G = \frac{(2a \cdot 2a) \cdot a - (a \cdot a) \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right)}{2a \cdot 2a - a \cdot a} = \frac{5}{6}a$$

$$y_G = \frac{(2a \cdot 2a) \cdot a - (a \cdot a) \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right)}{2a \cdot 2a - a \cdot a} = \frac{5}{6}a$$

(½ ponto)

Os diagramas de corpo livre da barra e da placa são apresentados nas figuras a seguir:





(1 ponto)

❑ Exercício (P1–Q2–2017R)

Aplicando-se as equações de equilíbrio à placa, tem-se:

$$\vec{R} = Y_F\vec{j} + Z_F\vec{k} + X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k} - P\vec{k} - F_{BH}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + F_{BH}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} = \vec{0} \qquad \text{(i)}$$

$$\vec{M}_A = (F-A)\wedge\left(X_F\vec{i} + Z_F\vec{k}\right) + (G-A)\wedge\left(-P\vec{k}\right) + (B-A)\wedge\left(-F_{BH}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + F_{BH}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2a\vec{i}\wedge\left(Y_F\vec{j} + Z_F\vec{k}\right) + \left(\frac{5}{6}a\vec{i} + \frac{5}{6}a\vec{j}\right)\wedge\left(-P\vec{k}\right) + 2a\vec{j}\wedge\left(-F_{BH}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + F_{BH}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2aY_F\vec{k} - 2aZ_F\vec{j} + \frac{5}{6}aP\vec{j} - \frac{5}{6}aP\vec{i} + \sqrt{2}aF_{BH}\vec{i} = \vec{0} \qquad \text{(ii)}$$

Da equação vetorial (ii) resultam:

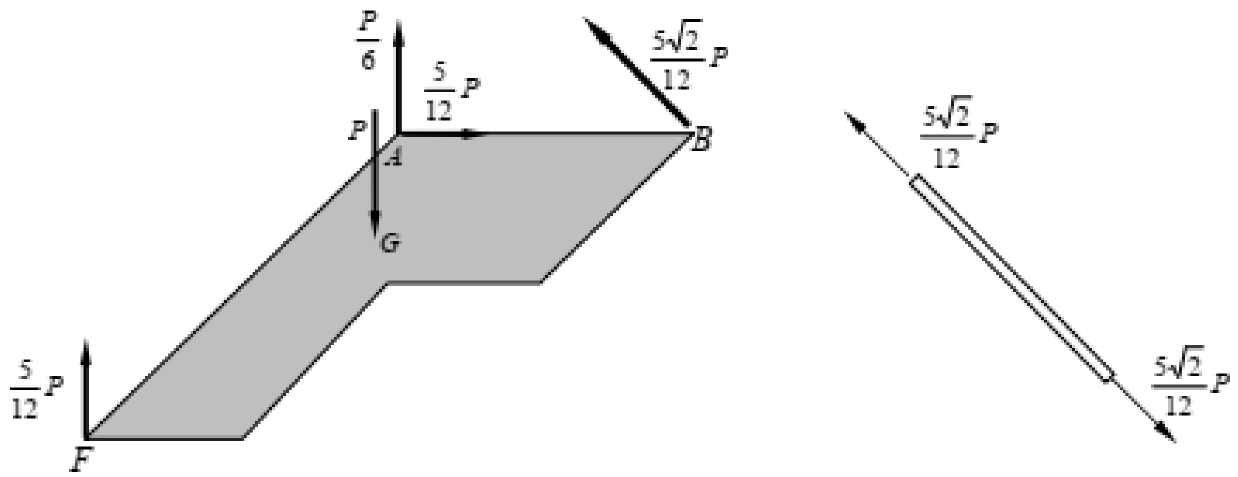
$$-\frac{5}{6}aP + \sqrt{2}aF_{BH} = 0 \qquad (4)$$

$$2aZ_F + \frac{5}{6}aP = 0 \qquad (5)$$

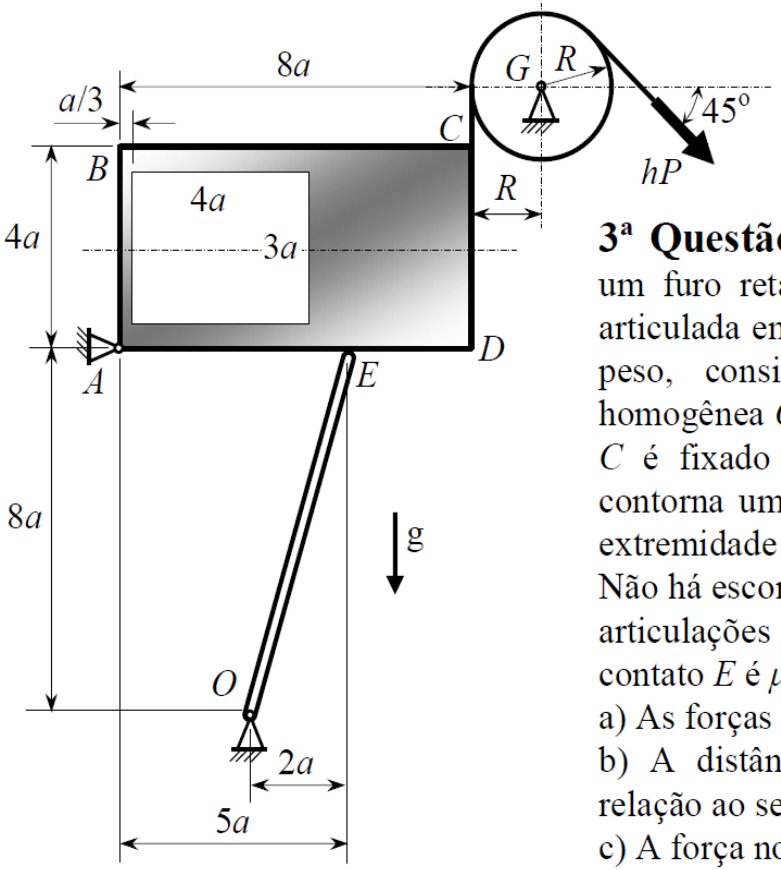
$$2aY_F = 0 \qquad (6)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1) a (6) obtêm-se:

$X_A = 0$, $Y_A = \frac{5}{12}P$, $Z_A = \frac{P}{6}$, $Y_F = 0$, $Z_F = \frac{5}{12}P$, $F_{BH} = \frac{5\sqrt{2}}{12}P$ (tração)



❑ Exercício (P1–Q3–2008)



3ª Questão (3,5 pontos): A placa homogênea *ABCD* tem um furo retangular, conforme mostrado na figura, estando articulada em *A* e apoiada com atrito na barra *OE* em *E*. Seu peso, considerando o furo retangular, é *P*. A barra homogênea *OE* tem peso *P*, e está articulada em *O*. No ponto *C* é fixado um fio ideal, inextensível e sem massa, que contorna uma polia de centro *G*, raio *R* e peso *P*. Na outra extremidade do fio é aplicada uma força de intensidade *hP*. Não há escorregamento entre o fio e a polia. Não há atrito nas articulações em *A*, *O* e *G*. O coeficiente de atrito no ponto de contato *E* é $\mu = 0{,}5$. Determine:

a) As forças atuantes na polia.

b) A distância do baricentro da placa furada *ABCD* em relação ao segmento *AB*.

c) A força normal e a força de atrito em *E*.

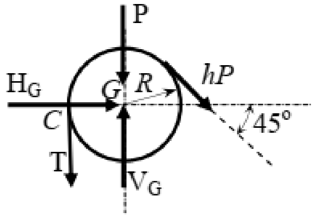
d) O máximo *h* tal que o sistema ainda permaneça em equilíbrio.

❑ Exercício (P1–Q3–2008)

SOLUÇÃO

a) Cálculo das forças atuantes na polia.

Para tanto, constrói-se o diagrama de corpo livre da polia (vide Figura 3-1), aplicando-se ao mesmo as equações de equilíbrio da Estática, ou seja:



$$\sum_{i=1}^{n} M_{Gi} = 0 \Rightarrow -hP\cdot R + T\cdot R = 0 \Rightarrow T = hP \quad \text{(Eq. 3-1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow hP\frac{\sqrt{2}}{2} + H_G = 0$$

$$\Rightarrow H_G = -\frac{\sqrt{2}}{2}hP \quad \text{(Eq. 3-2)}$$

Fig. 3-1: Diagrama de corpo livre da polia.

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \Rightarrow V_G - P - T - hP\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow V_G - P - hP - hP\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V_G = \left[1 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)h\right]P \quad \text{(Eq- 3-3)}$$

(0,5 pontos)

b) Cálculo da posição do baricentro da placa.

Tomando-se por referência o sistema de coordenadas indicado na Figura 3.2, tem-se:

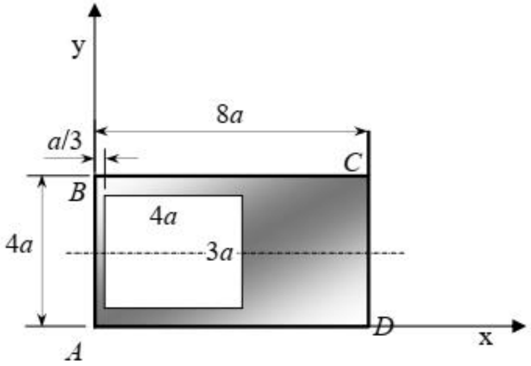


Fig. 3.2: Geometria da placa retangular recortada.

- Retângulo de lados (8a; 4a):
  - Área: $S_1 = 32a^2$
  - Baricentro: $G_1 = (4a,\ 2a)$
- Retângulo de lados (4a; 3a):
  - Área: $S_2 = -12a^2$
  - Baricentro: $G_2 = \left(\frac{a}{3} + 2a,\ 2a\right)$

- Baricentro da placa recortada:

$$X_G = \frac{x_{G1}\cdot S_1 + x_{G2}\cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4a\times 32a^2 - \frac{7a}{3}\times 12a^2}{32a^2 - 12a^2} = 5a \quad \text{(Eq. 3-4)}$$

$Y_G = 2a$ (por simetria) (Eq. 3-5)

Portanto, o baricentro da placa se situa na posição $G = (5a, 2a)$. (1 ponto)

❑ Exercício (P1–Q3–2008)

c) Cálculo das forças normal e de atrito em E.

Para tanto, analisa-se o equilíbrio da placa retangular $ABCD$ e da barra OE, aplicando-se as equações da Estática aos sistemas de forças indicados nos respectivos diagramas de corpo livre das Figuras 3.3 e 3.4.

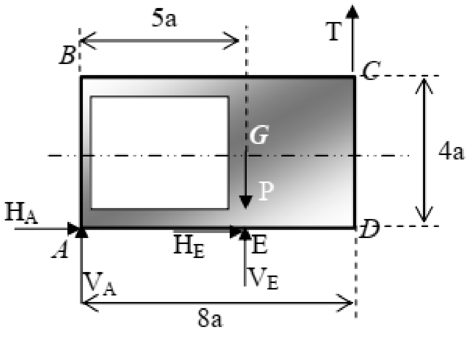


Fig. 3.3: Diagrama de corpo livre da placa $ABCD$.

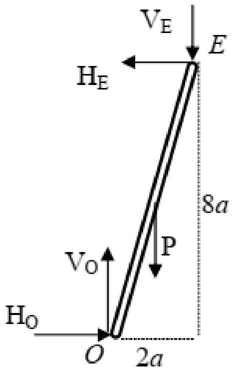


Fig. 3.4: Diagrama de corpo livre da barra OE.

Utilizando-se, para a placa $ABCD$, a equação de equilíbrio de momentos em relação ao pólo A, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0 \Rightarrow V_E \cdot 5a - P \cdot 5a + T \cdot 8a = 0 \Rightarrow V_E \cdot 5a - P \cdot 5a + hP \cdot 8a = 0$$

$$\Rightarrow V_E = P\left(1 - \frac{8}{5}h\right) \qquad \text{(Eq. 3-6)}$$

Utilizando-se, para a barra OE, a equação de equilíbrio de momentos em relação ao pólo O, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Oi} = -P \cdot a - V_E \cdot 2a + H_E \cdot 8a = 0 \Rightarrow -P \cdot a - P\left(1 - \frac{8}{5}h\right) \cdot 2a + H_E \cdot 8a = 0$$

$$\Rightarrow H_E = \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{5}h\right)P \qquad \text{(Eq. 3-7)}$$

(1 ponto)

d) O máximo valor de h para que o sistema permaneça em equilíbrio.

Notando-se que o vínculo em E se deve ao contacto com atrito entre a placa $ABCD$ e a barra OE, e que o sistema abandona seu estado de equilíbrio estático caso ocorra deslizamento da barra OE sobre a superfície da placa $ABCD$ causado pela superação da força de atrito máxima no ponto de contacto, conclui-se que deve ser analisada a situação em que

$$H_E = \mu \cdot V_E \qquad \text{(Eq. 3-8)}$$

ou seja:

$$\left(\frac{3}{8} - \frac{2}{5}h\right)P = 0{,}5P\left(1 - \frac{8}{5}h\right) \qquad \text{(Eq. 3-9)}$$

Portanto, o máximo valor de h compatível com o equilíbrio será

$$h = \frac{5}{16} \qquad \text{(Eq. 3-10)}$$

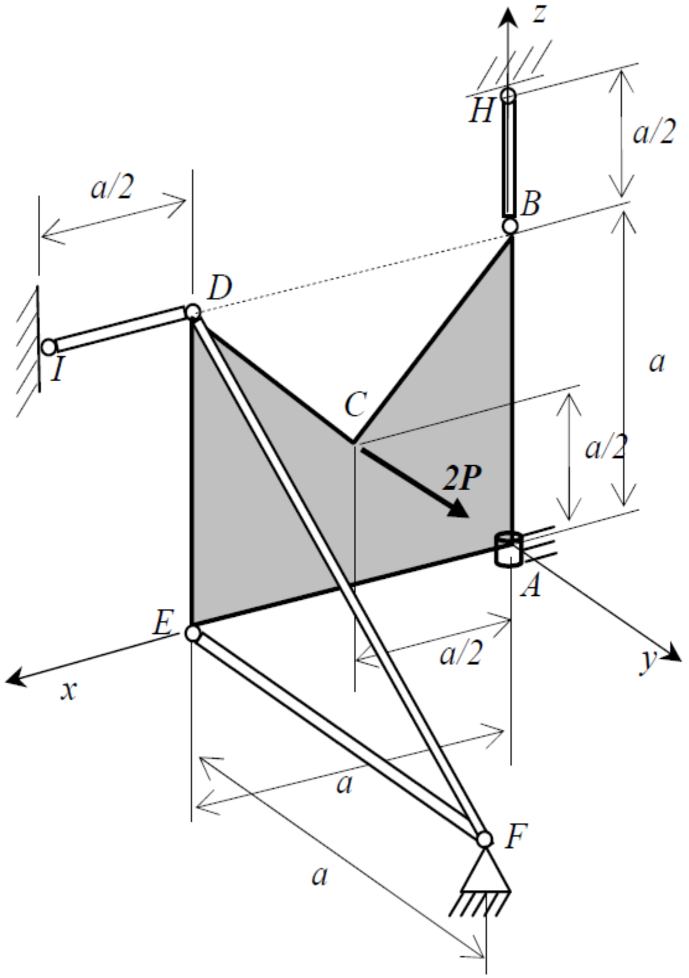
correspondente à situação em que ocorre superação da força de atrito acompanhada pelo deslizamento da barra OE relativamente à placa retangular $ABCD$.

(1 ponto)

❑ Exercício (P1–Q2–2012)

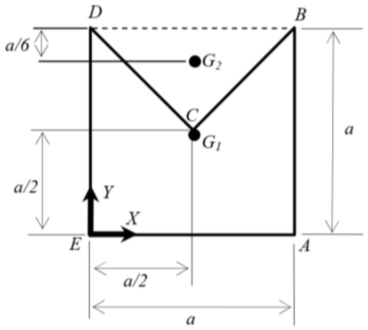
2º Questão (3,5 pontos) A placa plana e homogênea *ABCDEA*, de peso ***P***, está vinculada no anel *A* (eixo vertical) e nas extremidades *B*, *D* e *E* das barras *BH*, *DI*, *DF* e *EF*. Ao ponto *C* da placa aplica-se uma força $2P\vec{j}$ conforme indicado na figura. O ponto *F* tem coordenadas $(a,a,0)$ e as barras *BH*, *DI*, *DF EF* têm peso desprezível. Nessas condições, pede-se:

(a) Calcular a posição do baricentro da placa *ABCDEA*;
(b) Desenhar o diagrama de corpo livre da placa *ABCDEA*;
(c) Determinar as reações no anel e as forças nas barras *BH*, *DI*, *EF* e *DF*.



Exercício (P1–Q2–2012)

Adotando-se o sistema de eixos ***EXY*** indicado na figura e considerando-se os baricentros G_1 do quadrado *ABDE* e G_2 do triângulo *BCD*, a ordenada *Y* do baricentro *G* da placa homogênea *ABCDEA* é dada por:



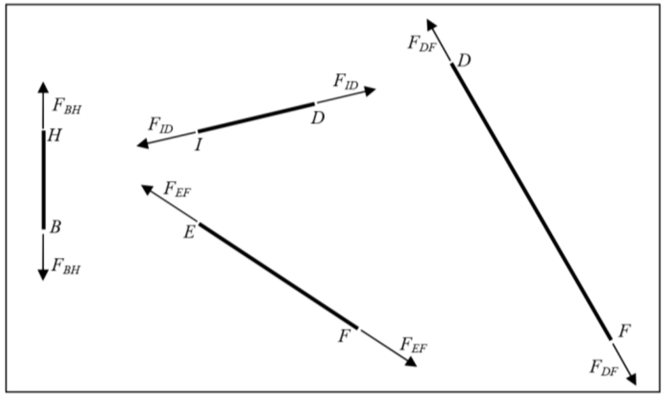
$$Y_G = \frac{a^2\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}\left(a - \frac{1}{3}\frac{a}{2}\right)}{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{7}{18}a$$

Relativamente ao sistema de eixos *Axyz* do enunciado do problema, a peça *ABCDEA* está contida no plano *xz* e apresenta um eixo *Cz* de simetria vertical. Logo, a posição do baricentro *G* da placa no sistema *Axyz* é dada por:

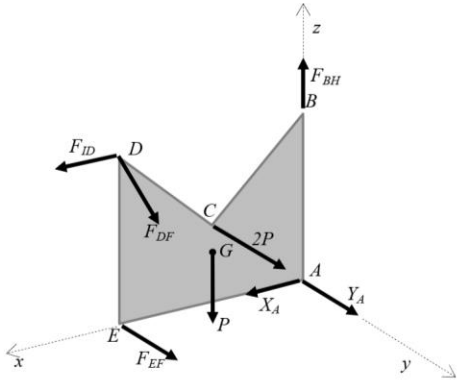
$$G = \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{7a}{18}\right)$$

Resposta (a) (1,0)

As barras *BH*, *ID*, *EF* e *DF*, de peso desprezível, estão em equilíbrio sob a ação de duas forças aplicadas em suas extremidades. Logo, essas forças são iguais, opostas e têm mesma linha de ação. Os diagramas de corpo livre das barras *BH*, *ID*, *EF* e *DF* são apresentados na figura abaixo:



Utilizando-se os diagramas de corpo livre das barras e aplicando-se o Princípio de Ação e Reação, constrói-se o diagrama de corpo livre da placa *ABCDEA* indicado na proxima figura.



Resposta (b) (1,0)

Para que a placa *ABCDEA* esteja em equilíbrio, é necessário que:

- $\vec{R} = F_{ID}\vec{i} + F_{EF}\vec{j} + F_{BH}\vec{k} + 2P\vec{j} + X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} - P\vec{k} + F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} = \vec{0}$ (1)
- $\vec{M}_A = (E-A)\wedge F_{EF}\vec{j} + (G-A)\wedge(-P\vec{k}) + (C-A)\wedge 2P\vec{j} + (D-A)\wedge\left(F_{ID}\vec{i} + F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) = \vec{0}$

$$\Rightarrow a\vec{i}\wedge F_{EF}\vec{j} + \left(\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{7a}{18}\vec{k}\right)\wedge(-P\vec{k}) + \left(\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{k}\right)\wedge 2P\vec{j} + (a\vec{i} + a\vec{k})\wedge\left(F_{ID}\vec{i} + F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow aF_{EF}\vec{k} + \frac{a}{2}P\vec{j} + aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} + aP\vec{k} - aP\vec{i} + aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + aF_{ID}\vec{j} - aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} = \vec{0} \qquad (2)$$

Das equações vetoriais (1) e (2) resultam as 6 equações escalares abaixo:

$$F_{ID} + X_A = 0 \qquad (3)$$

$$F_{EF} + 2P + Y_A + F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (4)$$

$$F_{BH} - P - F_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (5)$$

$$-aP - aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{a}{2}P + aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} + aF_{ID} = 0 \qquad (7)$$

$$aF_{EF} + aF_{DF}\frac{\sqrt{2}}{2} + aPk = 0 \qquad (8)$$

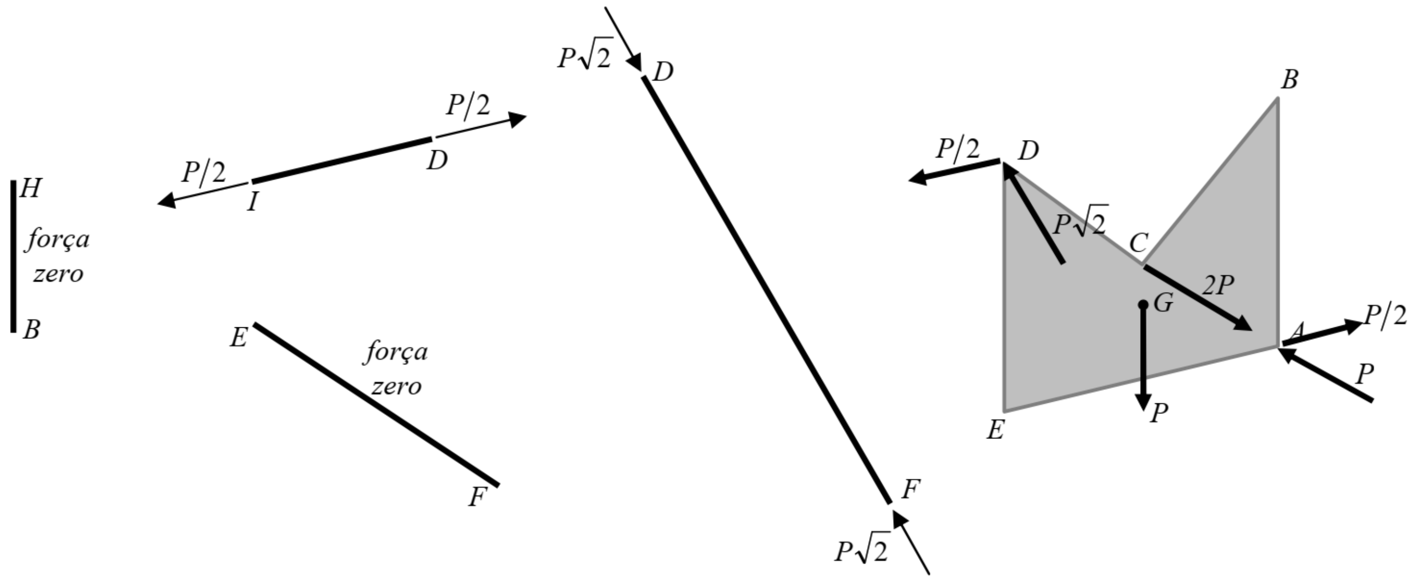
(0,5)

Resolvendo-se o sistema de equações (3) a (8), obtêm-se:

❑ Exercício (P1–Q2–2012)

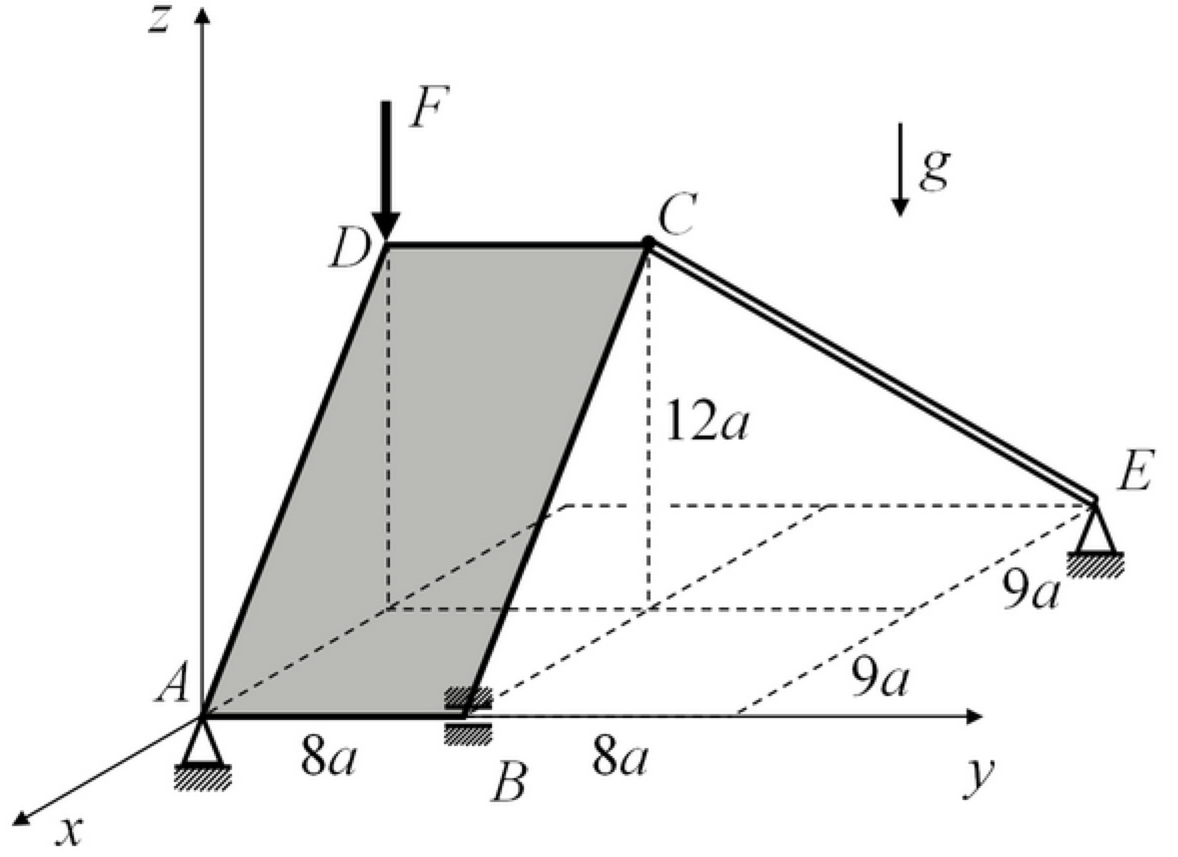
- anel A: $\vec{R}_A = -\frac{P}{2}\vec{i} - P\vec{j}$
- barra BH: $F_{BH} = 0$
- barra DI: $F_{ID} = \frac{P}{2}$ $(tração)$
- barra EF: $F_{EF} = 0$
- barra DF: $F_{DF} = -P\sqrt{2}$ $(compressão)$

Os diagramas de corpo livre das barras e da placa, após a resolução do sistema de equações, são apresentados nas figuras abaixo:



Resposta (c) (1,0)

A placa retangular *ABCD*, de peso desprezível, está vinculada por meio da articulação simples (rótula) em *A*, o anel curto em *B* (o eixo do anel é *Ay*) e a barra *CE* biarticulada, de peso também desprezível. No ponto *C* existe uma articulação. A articulação simples em *E* tem coordenadas $(-18a, 16a, 0)$. As coordenadas do ponto *D* são $(-9a, 0, 12a)$. No vértice *D* da placa está aplicada uma carga vertical *F*, como indicado na figura. São dados: $F = -24$ N, $a = 0.03$ m.



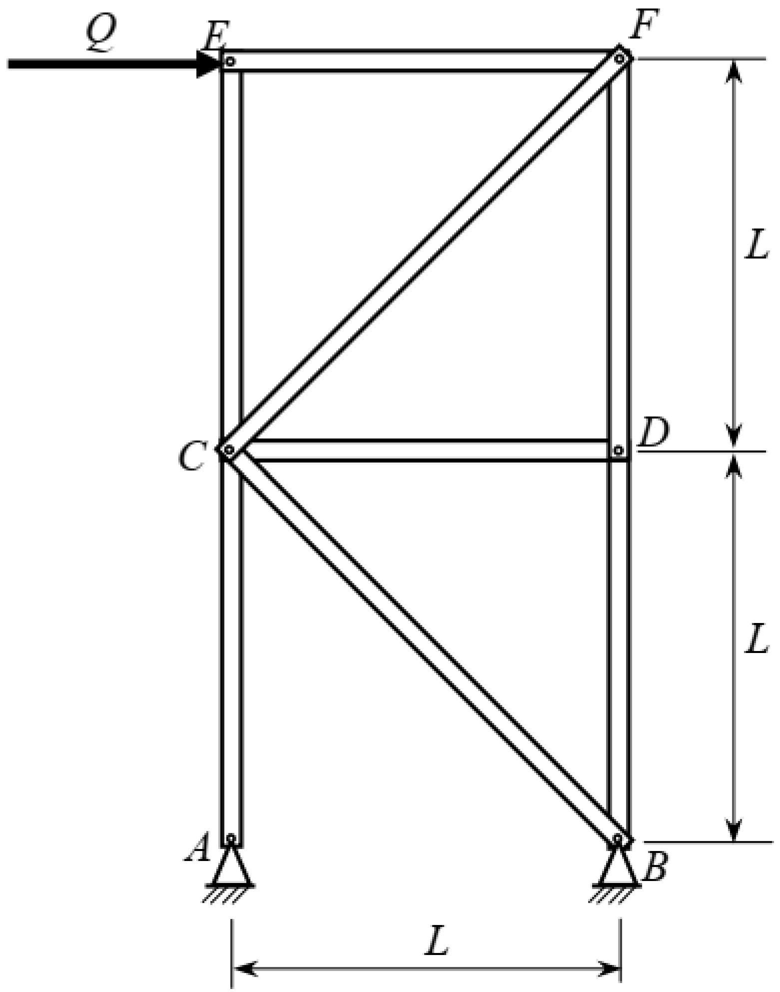
a) Determine o **módulo** da força que a barra *CE* aplica na placa, e escreva o valor no campo a seguir, com até uma casa decimal e **use PONTO como separador**;

b) Especifique se a barra está tracionada ou comprimida. No campo abaixo, escreva -1 se a barra *CE* está sendo comprimida, ou escreva 1 se ela estiver sendo tracionada;

c) Determine o **módulo** da componente Y_A (na direção do eixo *Ay*) da reação da articulação em *A* sobre a placa. Escreva o valor no quadro a seguir, com até uma casa decimal e **use PONTO como separador**;

d) Especifique o sentido da componente Y_A. No campo abaixo, escreva -1 se Y_A é no sentido negativo do eixo Ay, e escreva 1 se Y_A é no sentido positivo do eixo Ay.

❑ Exercício (Lista da Equipe #24)



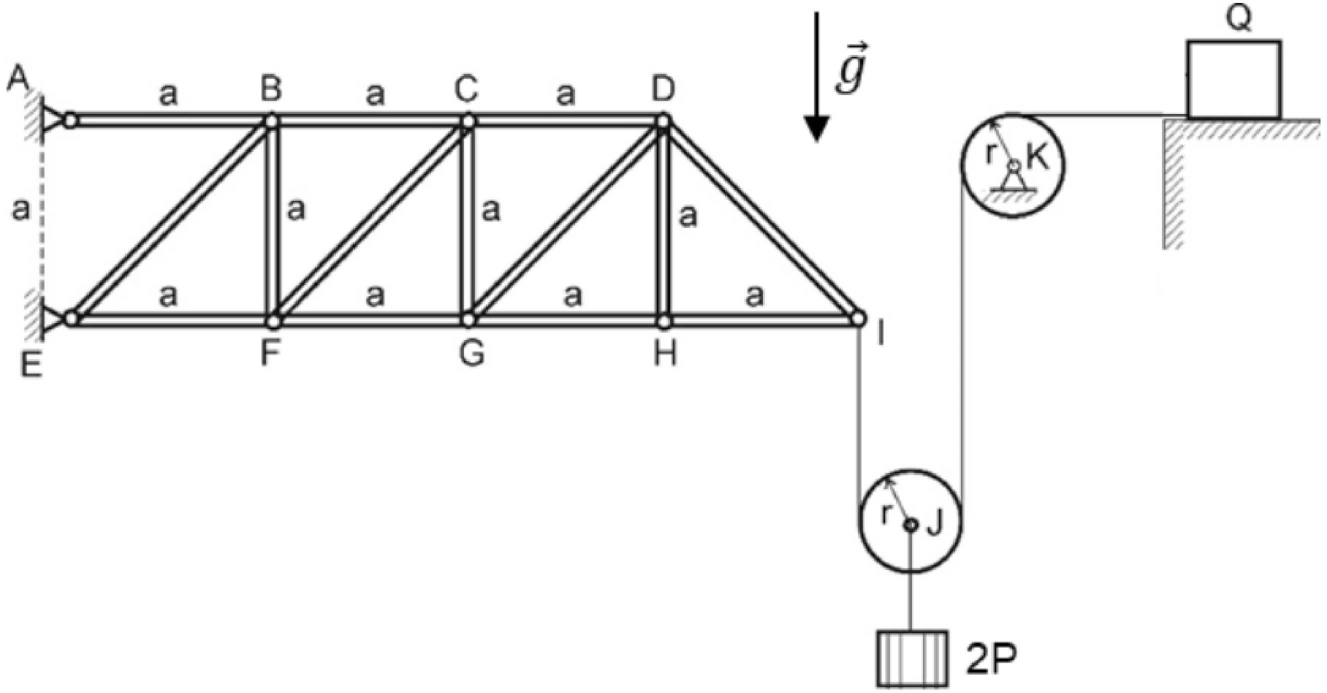
24) A treliça mostrada na figura ao lado, de peso desprezível e dimensões indicadas, está sujeita à força Q horizontal e está vinculada por articulações em A e em B. Calcule as reações externas e as forças em todas as barras, indicando se são de tração ou de compressão.

Respostas:

$$F_{AC} = 2Q \ \text{(tração)}$$
$$F_{BD} = -Q$$
$$F_{BC} = -\sqrt{2}Q$$

❑ Exercício (P1–Q2–2017)

Questão 2 (3,5 pontos). Considere a treliça e o conjunto de polias e blocos indicados na figura ao lado. Os pesos das barras da treliça e das polias são admitidos desprezíveis, e o fio que conecta a treliça aos demais componentes do sistema é ideal. O bloco suspenso pela polia conectada à treliça possui peso $2P$. O bloco apoiado sobre a superfície horizontal localizada na extremidade direita da figura possui peso Q, e o coeficiente de atrito entre este bloco e sua superfície de apoio é μ. Pede-se:



(a) Determine o esforço atuante na barra FC, indicando se é de tração ou compressão;
(b) Obtenha o valor da força de atrito atuante no bloco de peso Q na situação de equilíbrio estático.
(c) Determine o valor mínimo do coeficiente de atrito para manter o sistema na condição de equilíbrio estático.

Exercício (P1–Q2–2017)

(a) Usando o método das seções e aplicando as condições necessárias para o equilíbrio estático do trecho de treliça indicado na figura, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$\sum F_x = 0: \quad -R_{BC} - R_{FC}\frac{\sqrt{2}}{2} - R_{FG} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad -R_{FC}\frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0$$

$$\sum M_C = 0: \quad -aR_{FG} - 2aP = 0$$

Resolvendo:

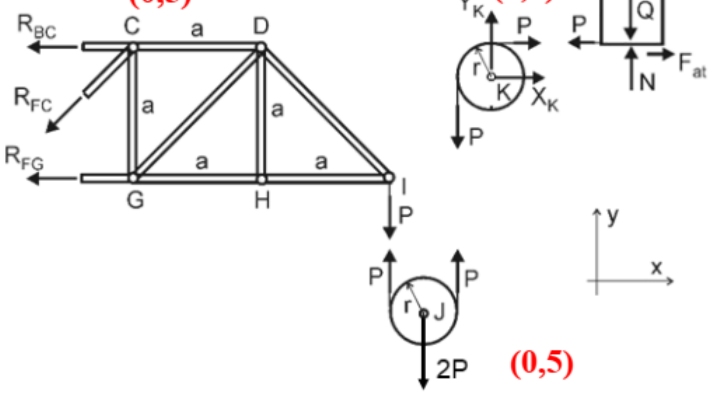
$$R_{FG} = -2P; \quad R_{FC} = -\sqrt{2}P; \quad R_{BC} = 3P$$

Resposta:

$R_{FC} = \sqrt{2}P$ é de <u>compressão</u>, pois o sinal negativo obtido no resultado acima indica que o sentido de R_{FC} é oposto ao adotado inicialmente (ver DCL ao lado). (1,0)

<u>Diagramas de Corpo Livre</u>

(0,5) (0,5)



(0,5)

(b) Para o bloco:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{at} - P = 0$$

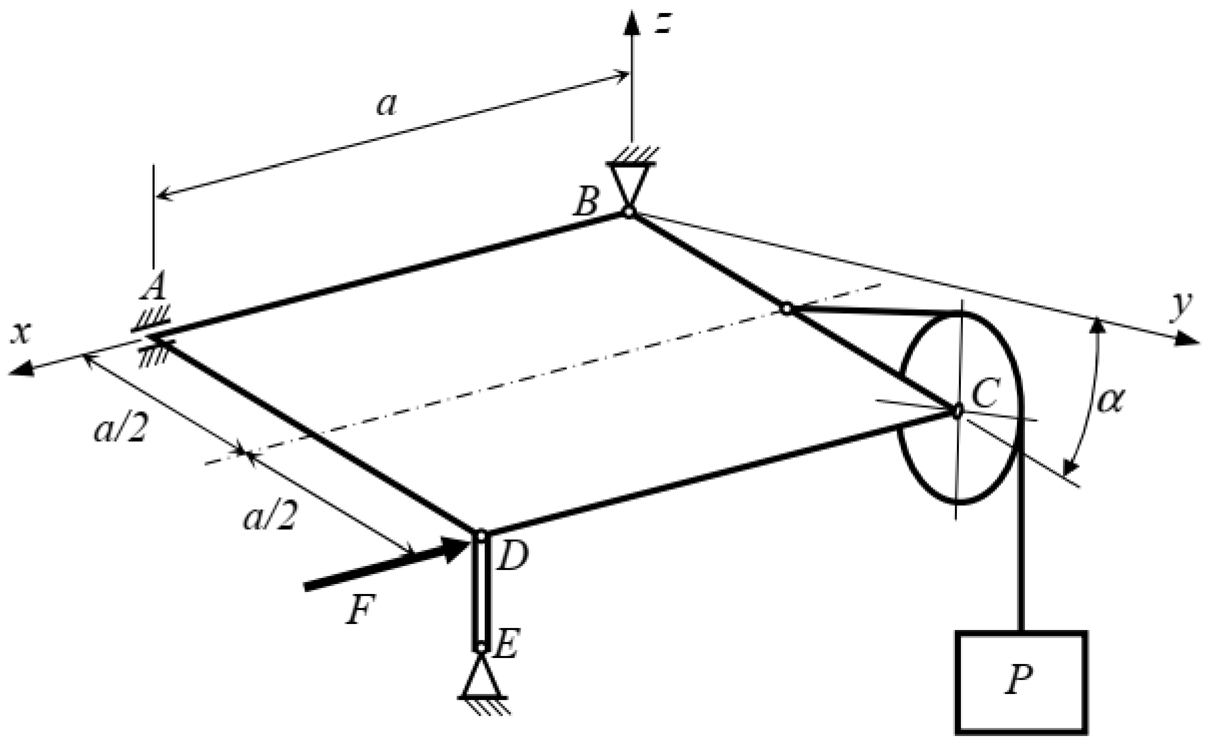
Resposta: $F_{at} = P$ (0,5)

(c) Aplicando a Lei de Coulomb para o bloco e considerando que na situação de equilíbrio estático $N = Q$ e $F_{at} = P$, obtém-se:

$$F_{at} \le \mu N \quad \Rightarrow \quad P \le \mu Q \qquad \text{Portanto: } \mu \ge \frac{P}{Q}$$

Resposta: $\boldsymbol{\mu_{min} = \frac{P}{Q}}$ (0,5)

❑ Exercício (Lista da Equipe #26)



26) A placa quadrada *ABCD*, homogênea de peso *Q*, está presa em *A* por um anel pequeno e articulado em *B* e *D*. A barra *DE* está articulada em *E*. O raio da polia é *r*. Sendo aplicada ao sistema a força *F*, como mostrado na figura, pede-se determinar as forças de reação em *A*, *B* e *D*.