



PME 3100 – Mecânica I

Cinemática do Corpo Rígido

Francisco J. Profito

fprofito@usp.br

Departamento de Engenharia Mecânica (PME)
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP)



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetores e Referenciais
7. Diferenciação de Vetores de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos

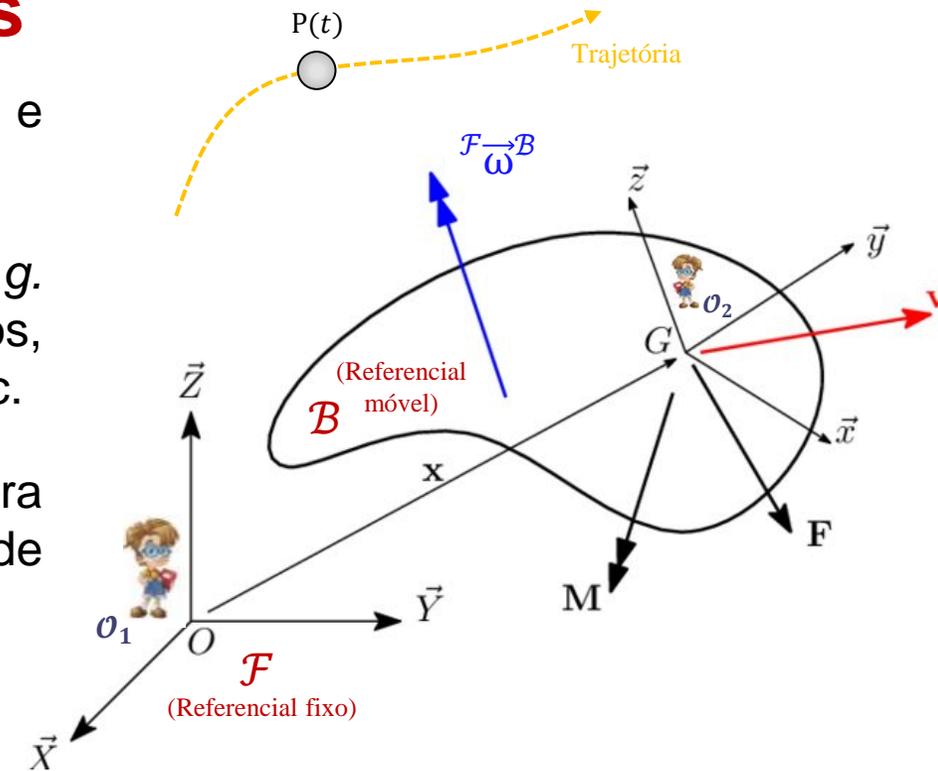


Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
- 2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas**
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetores e Referenciais
7. Diferenciação de Vetores de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos

Referenciais e Sistemas de Coordenadas

- **Cinemática:** estudo da descrição **geométrica** do movimento e independente das causas do movimento.
- **Referencial:** objeto rígido a partir do qual eventos físicos (e.g. movimento de uma partícula no espaço) são observados, “percebidos” ou descritos por um observador. Notação: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, etc.
- **Sistema de Coordenadas:** ferramenta analítica utilizada para **representar a descrição** de eventos físicos (e.g. movimento de uma partícula no espaço) a partir de um dado referencial.
 - Um dado sistema de coordenadas é **fixo a um único** referencial
 - Definição de sistema de coordenadas:
 - Origem (e.g., G); ponto pertencente a um dado referencial;
 - Eixos coordenados (e.g., G_x, G_y, G_z);
 - Base de versores alinhados aos eixos coordenados (e.g., $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$);
 - Notação: $\mathbb{B} = G_{xyz}(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$
- Referencial \neq Sistema de coordenadas



- ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P$ e ${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_P$: velocidade e aceleração do ponto P em relação a \mathcal{F} , isto é, a velocidade e aceleração de P **medidas** por um observador **fixo** ao referencial \mathcal{F} .
- A velocidade e aceleração de um ponto em relação a um dado referencial podem ser **representadas** (ou expressas) em um sistema de coordenadas fixo a **outro** referencial.



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
- 3. Definição de Corpo Rígido**
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetores e Referenciais
7. Diferenciação de Vetores de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos



❑ Definição de Corpo Rígido

- Sólido contínuo cujas distâncias relativas entre quaisquer de suas partículas são admitidas **constantes** sob condições especiais de carregamentos. Admitiremos que partículas \equiv pontos materiais.
- O conceito de corpo rígido é uma idealização, uma vez que todos os sólidos são **deformáveis até certo ponto** quando sujeitos a estímulos externos (e.g. carregamentos termomecânicos).
- Se os deslocamentos associados com as deformações são **pequenos quando comparados com o movimento global** do corpo e os esforços internos não são de interesse, a hipótese de rigidez é geralmente aceitável.
- Exemplos:
 - Vibração da asa de um avião: não afeta a trajetória do avião como um todo, mas influencia as tensões locais, importantes para a resistência e durabilidade da asa.
 - Deformações de dentes de engrenagens: não afetam o movimento global do sistema de engrenamento, mas influenciam as tensões locais, importantes para a eficiência, resistência e durabilidade das engrenagens.



Exemplos de sistemas em que a hipótese de corpo rígido é aceitável para a análise dos movimentos globais associados. Fonte [1].



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
- 4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido**
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetores e Referenciais
7. Diferenciação de Vetores de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos

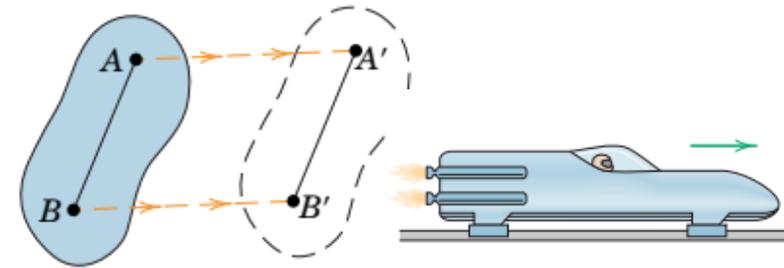
□ Tipos de Movimento de um Corpo Rígido

➤ **Ato de movimento instantâneo:** condição de movimento de um corpo rígido (CR) num dado instante de tempo (“*foto do movimento*”).

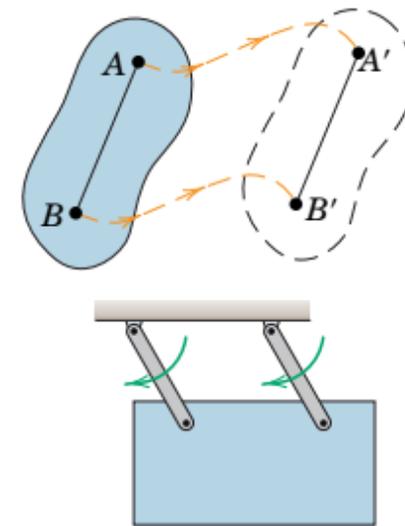
➤ O movimento de um CR pode ser classificado em três tipos:

▪ Translação Pura:

- Qualquer reta definida entre dois pontos do corpo mantém a **mesma direção** ao longo do movimento.
- O corpo possui **3 GLs de translação no espaço**, e seu movimento pode ser especificado completamente pelo movimento de um único ponto do corpo (todos os pontos possuem o mesmo movimento).
- Todos os pontos do corpo possuem a **mesma velocidade e aceleração** vetoriais;
- Todos os pontos do corpo descrevem a **mesma trajetória** ao longo do movimento:
 - *Translação retilínea:* a trajetória percorrida é retilínea
 - *Translação curvilínea:* a trajetória percorrida é curvilínea



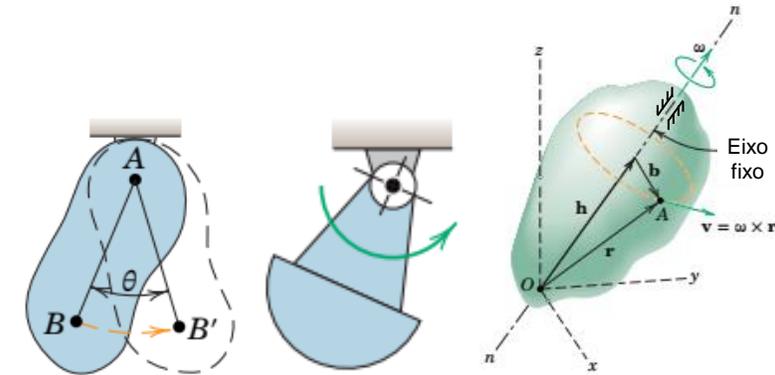
Translação retilínea. Fonte [1].



Translação curvilínea. Fonte [1,2].

□ Tipos de Movimento de um Corpo Rígido

- **Ato de movimento instantâneo:** condição de movimento de um corpo rígido (CR) num dado instante de tempo (“*foto do movimento*”).
- O movimento de um CR pode ser classificado em três tipos:
 - Rotação pura em torno de um eixo fixo:
 - O corpo possui **1 GL de rotação** e sua velocidade angular não varia em direção.
 - Todos os pontos do corpo pertencentes ao eixo de rotação possuem velocidades e acelerações nulas.
 - Se dois pontos do corpo possuem velocidades nulas, então a reta que liga tais pontos constitui o eixo de rotação pura do corpo.
 - Todos os **pontos do corpo não pertencentes ao eixo** de rotação se deslocam em planos paralelos e ortogonais ao eixo, descrevendo **trajetórias circulares concêntricas**.
 - Os **módulos** das velocidades e acelerações dos **pontos não pertencentes ao eixo de rotação** são proporcionais à distância perpendicular entre os pontos e o eixo de rotação.



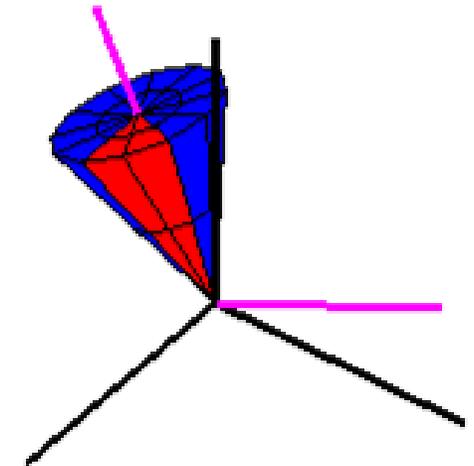
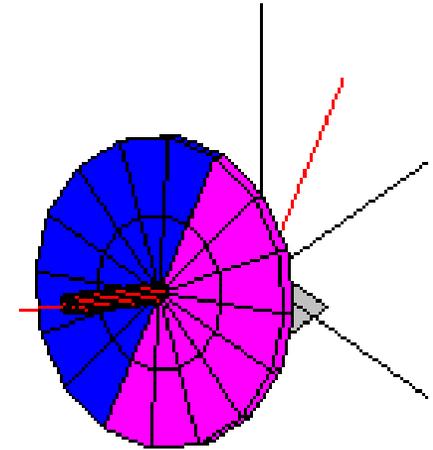
Rotação pura em torno de um eixo fixo. Fonte: adaptado de [1].



Exemplos de componentes com rotação pura em torno de um eixo fixo. Fonte [1].

□ Tipos de Movimento de um Corpo Rígido

- **Ato de movimento instantâneo:** condição de movimento de um corpo rígido (CR) num dado instante de tempo (“*foto do movimento*”).
- O movimento de um CR pode ser classificado em três tipos:
 - Rotação pura em torno de um ponto fixo:
 - O corpo possui **3 GLs de rotação** e sua velocidade angular pode variar em **módulo e direção**.
 - A direção da velocidade angular instantânea do corpo e o ponto fixo em torno do qual o movimento de rotação ocorre determinam o **Eixo Instantâneo de Rotação (EIR)** do corpo.
 - O ato de movimento do corpo consiste em um movimento de rotação pura em torno do EIR.

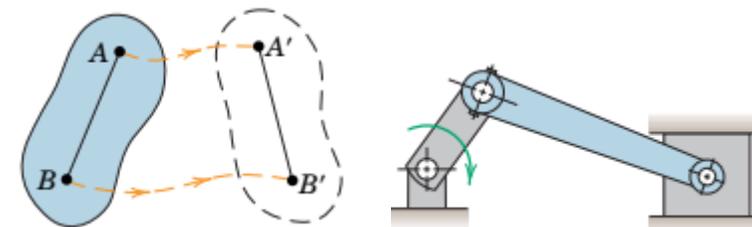


Exemplos de corpos em rotação pura em torno de um ponto fixo. Fonte [3].

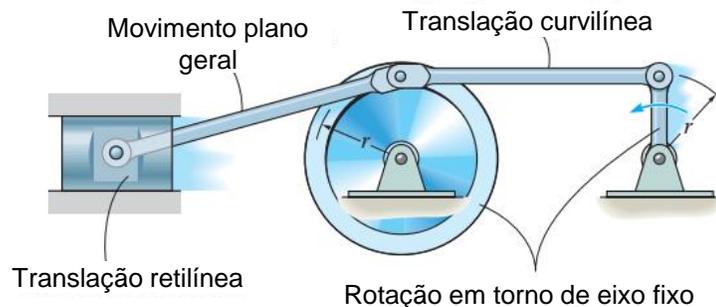
□ Tipos de Movimento de um Corpo Rígido

- **Ato de movimento instantâneo:** condição de movimento de um corpo rígido (CR) num dado instante de tempo (“foto do movimento”).
- O movimento de um CR pode ser classificado em três tipos:
 - Movimento Geral (Translação + Rotação):

- Em geral, um corpo rígido possui 6 GLs (3 de translação + 3 de rotação). A aplicação de vínculos reduz o número de GLs do corpo.
- **Teorema de Chasles:** o movimento mais geral de um corpo rígido em um dado instante é equivalente à **translação de um ponto** arbitrário do corpo, mais uma **rotação pura em torno de um eixo que contém este ponto**.



Movimento geral de um corpo rígido. Fonte: adaptado de [1].



Exemplo de sistema mecânico com componentes com diferentes tipos de movimento de corpo rígido. Fonte: adaptado de [2].



Sistema pistão-biela-manivela de um motor de combustão interna. Fonte [3].



Conteúdo

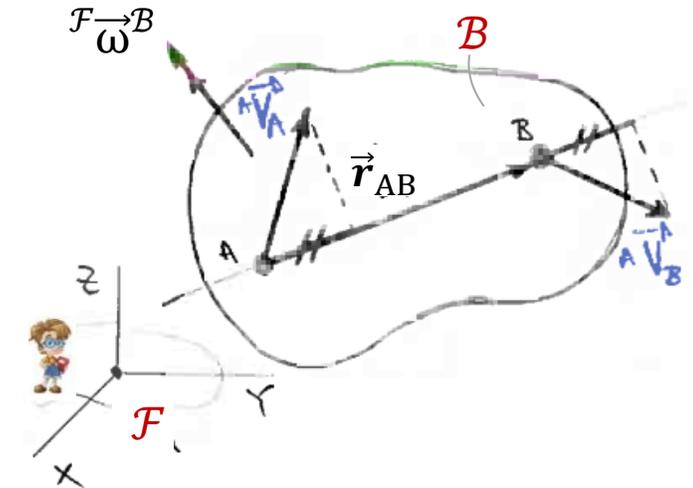
1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
- 5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos**
6. Diferenciação de Vetores e Referenciais
7. Diferenciação de Vetores de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos

❑ Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos

- Considere o corpo rígido \mathcal{B} que se move arbitrariamente no espaço em relação a um referencial fixo \mathcal{F} .
- Seja $\vec{r}_{AB} = (B - A)$ o vetor que define a distância relativa entre dois pontos arbitrários A e B do corpo. Pela propriedade de rigidez de corpos rígidos, tem-se que $\|\vec{r}_{AB}\| = \text{cte}$. Portanto:

$\|\vec{r}_{AB}\|^2 = \vec{r}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB} = \text{cte}$ Derivando ambos os lados em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \cdot \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{AB} \cdot \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \cdot \vec{r}_{AB} = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \perp \vec{r}_{AB}} \quad (1)$$

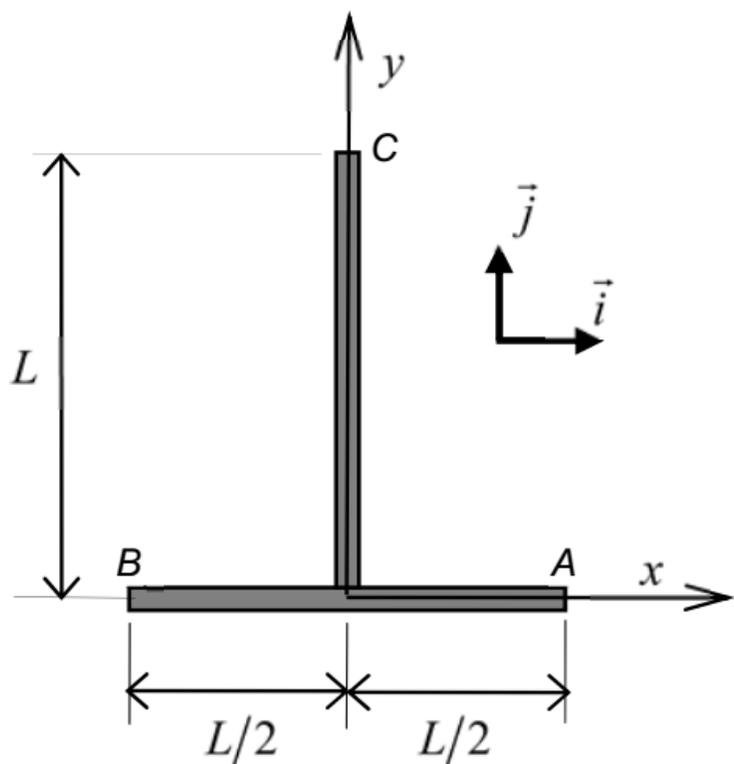


- Pela definição do versor tangente do Triedro de Frenet-Serret, **um vetor de módulo constante é sempre ortogonal à sua derivada**. Sendo $\vec{r}_{AB} = (B - A)$, tem-se:

$$\frac{d(B - A)}{dt} \cdot (B - A) = \left(\frac{dB}{dt} - \frac{dA}{dt} \right) \cdot (B - A) = (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot (B - A) = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\vec{v}_B \cdot (B - A) = \vec{v}_A \cdot (B - A)} \quad (2)$$

- As projeções de \vec{v}_A e \vec{v}_B sobre a reta que liga os pontos A e B são **iguais**. Logo, as velocidades de dois pontos arbitrários de um CR **não são independentes**, guardando entre si a relação expressa na Eq. 2.

Exercício (P2-Q1-2014)



QUESTÃO 1 (3,0 pontos). A peça ABC mostrada na figura é formada por dois segmentos ortogonais de comprimento L . Em um dado instante, sabe-se que as velocidades dos pontos A , B e C são:

$$\vec{V}_A = \frac{\omega L}{2} \vec{j} \quad , \quad \vec{V}_B = -\frac{\omega L}{2} \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{V}_C = -\omega L \vec{i} + \omega L \vec{k}$$

Para este instante:

- mostrar que as velocidades dos pontos A e C são compatíveis com a condição de corpo rígido;
- calcular o vetor rotação da peça ABC neste instante.



□ Exercício (P2-Q1-2014)

(a) mostrar que as velocidades dos pontos A e C são compatíveis com a condição de corpo rígido $(C - A) = -\frac{L}{2}\vec{i} + L\vec{j}$

Propriedade fundamental de corpos rígidos:

$$\vec{V}_C \cdot (C - A) = \vec{V}_A \cdot (C - A) \quad \Rightarrow \quad (-\omega L\vec{i} + \omega L\vec{k}) \cdot \left(-\frac{L}{2}\vec{i} + L\vec{j}\right) = \left(\frac{\omega L}{2}\vec{j}\right) \cdot \left(-\frac{L}{2}\vec{i} + L\vec{j}\right) \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega L^2}{2} = \frac{\omega L^2}{2}} \quad (0,5)$$



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
- 6. Diferenciação de Vetor e Referenciais**
7. Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos

❑ Diferenciação de Vetores e Referenciais

- Em geral, tanto o módulo quanto a orientação (direção e sentido) de um vetor podem variar no tempo.
- **A derivada no tempo de um vetor depende do referencial a partir do qual a derivada é calculada.**
- Essa dependência se deve à possibilidade de variação da **orientação** do vetor no tempo. Portanto, o referencial a partir do qual a derivada é calculada influencia o valor da derivada.
- O exemplo a seguir ilustra a dependência do referencial no cálculo da derivada de vetores no tempo.

The diagram illustrates two coordinate systems, Oxy and $O'x'y'$, sharing a common origin O . The fixed system Oxy has axes X and Y , with unit vectors \hat{i} and \hat{j} . The rotating system $O'x'y'$ has axes x and y , with unit vectors \hat{e}_1 and \hat{e}_2 . The angle between the X axis and the x axis is labeled $\theta(t)$. A vector \vec{r} is shown originating from O and pointing into the first quadrant of the $O'x'y'$ system. Two points, A and B , are marked on the x axis of the rotating system.

- Sistema Oxy gira no plano em relação ao sistema OXY fixo, segundo $\theta(t)$.
- Os vetores (\hat{e}_1, \hat{e}_2) não ficam ao plano definido pelo sistema Oxy .

Peça-x: Avalie a variação no tempo do vetor " \hat{e}_1 " em relação aos sistemas de referência definidos por OXY e Oxy .



□ Diferenciação de Vetores e Referenciais

- Neste caso, define-se inicialmente os referenciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} A: OXY; (\hat{i}, \hat{j}) \\ B: Oxy; (\hat{i}, \hat{j}) \end{array} \right.$$

- Avaliando, em particular, o vetor " \hat{i} " fixo no referencial B, e de módulo constante, tem-se:

$$\frac{B d\hat{i}}{dt} = \vec{0} \quad // \quad ; \quad \text{Para um observador fixo no referencial B, o vetor "i" não muda em orientação e magnitude ao longo do movimento.}$$

- Decompondo agora o vetor " \hat{i} " no sistema OXY (fixo):

$$\hat{i} = \cos\theta(t) \hat{I} + \sin\theta(t) \hat{J}$$

- Derivando a expressão acima em relação a um observador fixo no referencial A:

$$\frac{A d\hat{i}}{dt} = -\sin\theta \hat{I} + \cos\theta \frac{d\hat{I}}{dt} + \cos\theta \dot{\theta} \hat{J} + \sin\theta \frac{d\hat{J}}{dt} \quad \left(\begin{array}{l} \text{mas pois } \hat{I} \text{ e } \hat{J} \text{ são} \\ \text{fixos em A} \end{array} \right)$$

$$\frac{A d\hat{i}}{dt} = \dot{\theta}(t) (-\sin\theta \hat{I} + \cos\theta \hat{J}) \quad //$$

- Logo, conclui-se que:

$$\boxed{\frac{A d\hat{i}}{dt} \neq \frac{B d\hat{i}}{dt}} \quad //$$

Observa-se claramente que a derivada de um vetor depende dos referenciais em que é avaliada.



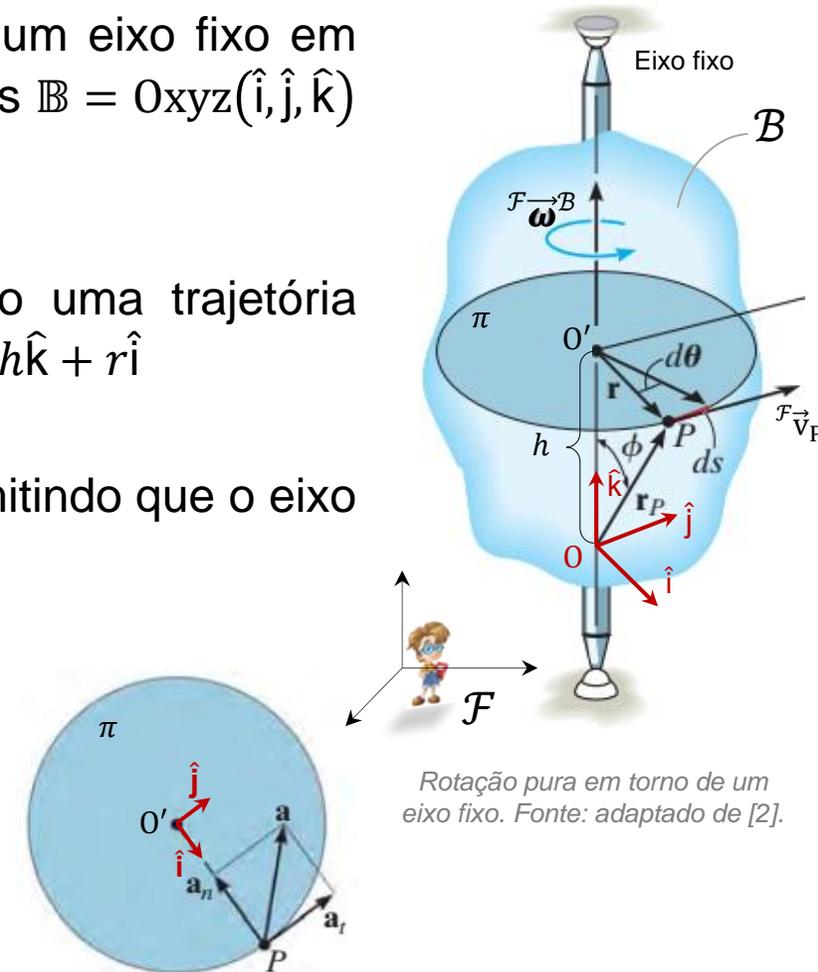
Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetor e Referenciais
- 7. Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular**
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos

❑ Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular

- Seja um corpo rígido \mathcal{B} que se move com rotação pura em torno de um eixo fixo em relação ao referencial \mathcal{F} . Considere também um sistema de coordenadas $\mathbb{B} = Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ **solidário** a \mathcal{B} , tal que \hat{k} seja paralelo ao eixo de rotação do corpo.
- Um ponto arbitrário $P \in \mathcal{B}$ se desloca em um plano π , descrevendo uma trajetória circular. O vetor posição de P expresso em \mathbb{B} é dado por $\vec{r}_P = (P - O) = h\hat{k} + r\hat{i}$
- Derivando o vetor \vec{r}_P no tempo **em relação ao referencial fixo \mathcal{F}** , e admitindo que o eixo de rotação e as distâncias $\overline{O'O}$ e $\overline{PO'}$ **não** variam com o tempo, tem-se:

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_P}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dh}{dt}\hat{k} + \frac{{}^{\mathcal{F}}d\hat{k}}{dt}h \right)}_{\text{Eixo de rotação e distância } \overline{O'O} \text{ não variam no tempo}} + \underbrace{\left(\frac{dr}{dt}\hat{i} + \frac{{}^{\mathcal{F}}d\hat{i}}{dt}r \right)}_{\text{Distância } \overline{PO'} \text{ não varia com o tempo}} = \frac{{}^{\mathcal{F}}d\hat{i}}{dt}r$$



❑ Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular

- Utilizando os resultados do exemplo anterior, é possível mostrar que: $\frac{{}^{\mathcal{F}}d\hat{i}}{dt} = \dot{\theta}\hat{j}$ e $\frac{{}^{\mathcal{F}}d\hat{j}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{i}$
Portanto:

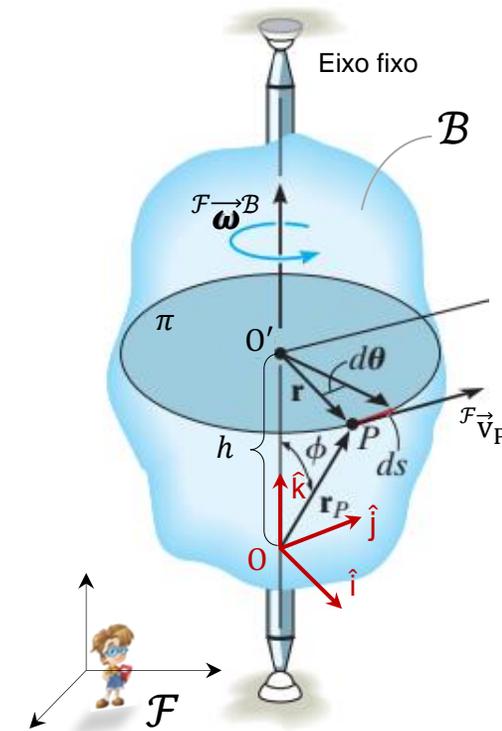
$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_P}{dt} = \dot{\theta}r\hat{j} \quad (3)$$

- Alternativamente, a Eq. 3 pode ser escrita em função de \vec{r}_P , como segue:

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_P}{dt} = \dot{\theta}r\hat{j} = \dot{\theta}r(\hat{k} \wedge \hat{i}) = (\dot{\theta}\hat{k} \wedge r\hat{i}) = \dot{\theta}\hat{k} \wedge \vec{r} = \dot{\theta}\hat{k} \wedge (\vec{r}_P - h\hat{k}) = (\dot{\theta}\hat{k}) \wedge \vec{r}_P$$

- Definindo ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \triangleq \dot{\theta}\hat{k}$ como sendo a **velocidade angular instantânea de B em relação a F**, e admitindo que, em geral, a direção do eixo instantâneo de rotação de um corpo rígido varia com o tempo, tem-se:

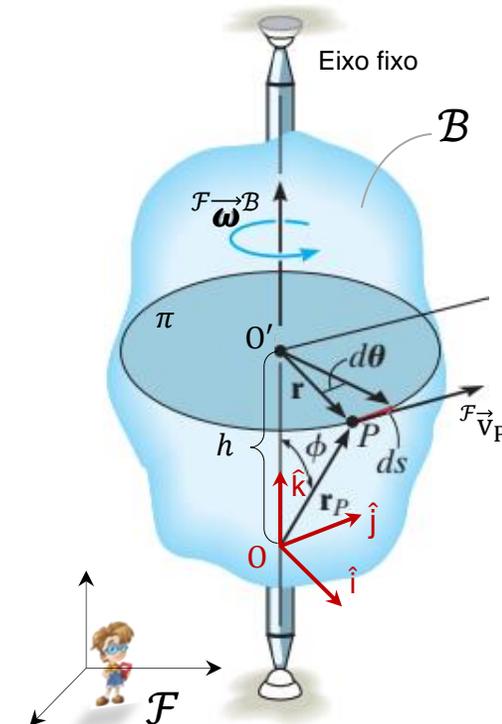
$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_P}{dt} = {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B(t) \wedge \vec{r}_P \quad (4)$$



Rotação pura em torno de um eixo fixo. Fonte: adaptado de [2].

❑ Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular

- A Eq. 4 permite calcular a derivada temporal de vetores **fixos** a um corpo rígido \mathcal{B} em relação a um dado referencial \mathcal{F} .
- Sendo \vec{r}_P um vetor **fixo** a \mathcal{B} , então:
 - Tanto o módulo quanto a orientação de \vec{r}_P **não variam em relação a \mathcal{B}** .
 - Como o **módulo** de \vec{r}_P é constante, ele também não varia em relação a \mathcal{F} . Entretanto, a **orientação** de \vec{r}_P pode variar **em relação a \mathcal{F}** devido à possibilidade de variação da orientação de \mathcal{B} em relação a \mathcal{F} .
- A taxa de variação da orientação de \mathcal{B} em relação a \mathcal{F} é dada pelo vetor velocidade angular instantânea ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$:
 - ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$ é um vetor livre (não possui ponto de aplicação), e é único para um dado par de referenciais (e.g. referencial fixo \mathcal{F} e corpo rígido \mathcal{B}).
 - ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$ é uma grandeza definida, ou seja, ela **não** é obtida a partir da diferenciação de outra grandeza vetorial (não se define vetor deslocamento angular finito).



Rotação pura em torno de um eixo fixo. Fonte: adaptado de [2].



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetor e Referenciais
7. Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular
- 8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial**
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos

Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial

- Considere dois referenciais \mathcal{F} e \mathcal{B} que se movem arbitrariamente no espaço com velocidade angular instantânea ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$. Os referenciais podem ser corpos rígidos.
- Seja um vetor $\vec{u}(t)$ **qualquer livre no espaço**, cujo módulo e orientação podem variar no tempo. Representando esse vetor em um sistema de coordenadas $\mathbb{B} = Bxyz(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ **solidário \mathcal{B}** , tem-se:

$$\vec{u}(t) = u_1(t)\hat{b}_1 + u_2(t)\hat{b}_2 + u_3(t)\hat{b}_3$$

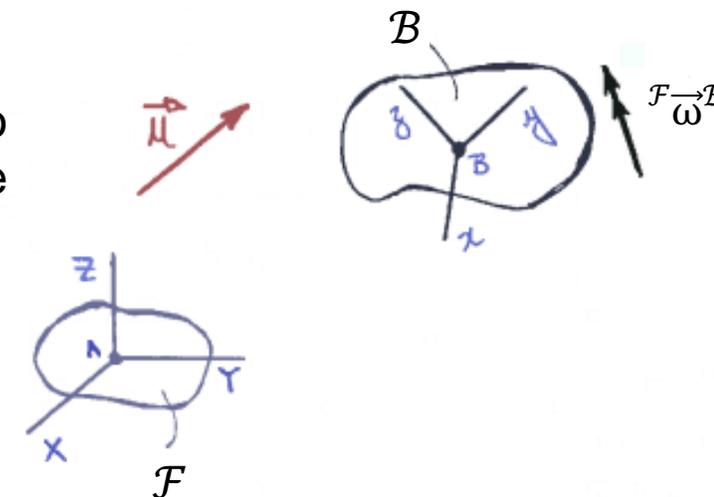
- A derivada temporal de $\vec{u}(t)$ em relação ao referencial \mathcal{F} é dada por:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{F}}\frac{d\vec{u}}{dt} &= \dot{u}_1(t)\hat{b}_1 + u_1(t) {}^{\mathcal{F}}\hat{b}_1 + \dot{u}_2(t)\hat{b}_2 + u_2(t) {}^{\mathcal{F}}\hat{b}_2 + \dot{u}_3(t)\hat{b}_3 + u_3(t) {}^{\mathcal{F}}\hat{b}_3 \\ &= \underbrace{(\dot{u}_1(t)\hat{b}_1 + \dot{u}_2(t)\hat{b}_2 + \dot{u}_3(t)\hat{b}_3)}_{\text{Variação de } \vec{u} \text{ em relação a } \mathcal{B}. \text{ Apenas a derivada temporal das componentes } u_i \text{ é considerada.}} + \underbrace{(u_1(t) {}^{\mathcal{F}}\hat{b}_1 + u_2(t) {}^{\mathcal{F}}\hat{b}_2 + u_3(t) {}^{\mathcal{F}}\hat{b}_3)}_{\text{Variação da orientação de } \vec{u} \text{ em relação a } \mathcal{F}. \text{ Apenas a derivada temporal dos versores } \hat{b}_i \text{ é considerada.}} \end{aligned}$$

Como \hat{b}_i são vetores fixos a \mathcal{B} , utilizando Eq. 4



$$\begin{cases} {}^{\mathcal{F}}\hat{b}_1 = {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_1 \\ {}^{\mathcal{F}}\hat{b}_2 = {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_2 \\ {}^{\mathcal{F}}\hat{b}_3 = {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_3 \end{cases}$$



Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial

Finalmente, a derivada temporal de $\vec{u}(t)$ em relação ao referencial \mathcal{F} é dada por:

Varição de $\vec{u}(t)$ em relação a \mathcal{F}

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{u}}{dt} = \frac{{}^{\mathcal{B}}d\vec{u}}{dt} + \vec{\omega}^{\mathcal{F}\mathcal{B}} \wedge \vec{u} \quad (1)$$

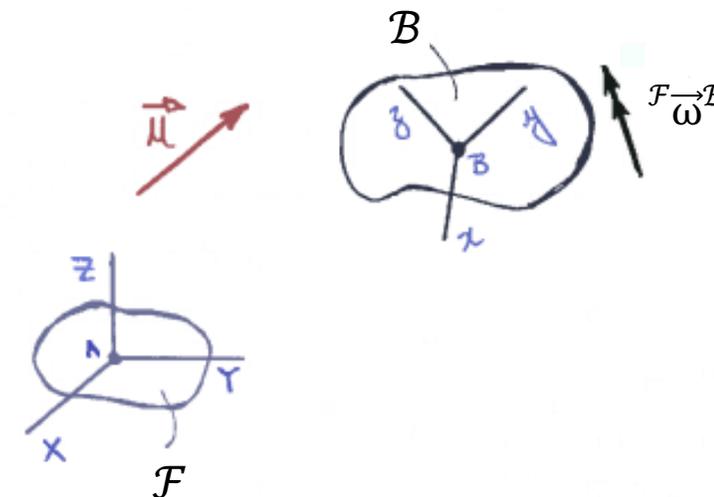
- Variação da **orientação** do sistema de coordenadas $B_{xyz}(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ em relação a \mathcal{F} devido a rotação de \mathcal{B} (arrastamento).
- Como os versores \hat{b}_i são vetores fixos a \mathcal{B} , suas derivadas em relação a \mathcal{F} são consideradas implicitamente:

$${}^{\mathcal{F}}\dot{\hat{b}}_i = \vec{\omega}^{\mathcal{F}\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_i \Rightarrow \begin{cases} {}^{\mathcal{F}}\dot{\hat{b}}_1 = \vec{\omega}^{\mathcal{F}\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_1 \\ {}^{\mathcal{F}}\dot{\hat{b}}_2 = \vec{\omega}^{\mathcal{F}\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_2 \\ {}^{\mathcal{F}}\dot{\hat{b}}_3 = \vec{\omega}^{\mathcal{F}\mathcal{B}} \wedge \hat{b}_3 \end{cases}$$

- Variação de $\vec{u}(t)$ em relação a \mathcal{B} . Apenas a variação temporal das componentes $u_i(t)$ é considerada:

$$\frac{{}^{\mathcal{B}}d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_1\hat{b}_1 + \dot{u}_2\hat{b}_2 + \dot{u}_3\hat{b}_3$$

- Variação relativa de $\vec{u}(t)$ em relação a \mathcal{B} .



- A derivada temporal de um vetor $\vec{u}(t)$ depende do referencial a partir do qual a derivada é calculada.
- A Eq. 5 é especialmente útil quando $\vec{u}(t)$ é expresso em um sistema de coordenadas solidário a \mathcal{B} .
- O vetor $\vec{u}(t)$ pode representar qualquer grandeza física, tais como posição, velocidade, quantidade de movimento, quantidade de movimento angular, etc.



Conteúdo

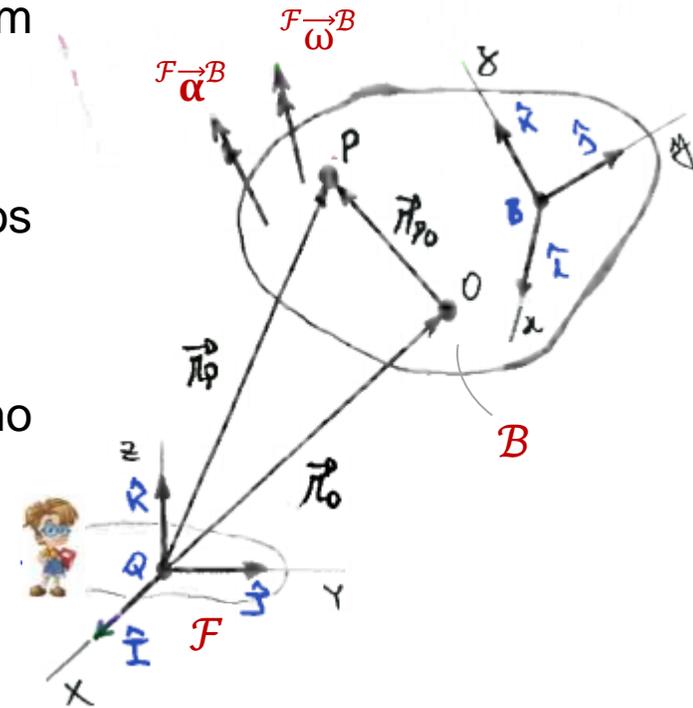
1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetor e Referenciais
7. Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
- 9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos**
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos

❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

- Considere um corpo rígido \mathcal{B} que se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$ e aceleração angular ${}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^{\mathcal{B}}$ em relação a um referencial fixo \mathcal{F} .
- Seja os sistemas de coordenadas $\mathbb{F} = QXYZ(\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$ e $\mathbb{B} = Bxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ solidários aos referenciais \mathcal{F} e \mathcal{B} , respectivamente, e um ponto $O \in \mathcal{B}$ arbitrário.
- O vetor posição de um ponto material qualquer $P \in \mathcal{B}$ pode ser escrito como segue:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_O + \vec{r}_{PO} \quad (6)$$

- $$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_P = \text{vetor posição de } P \in \mathcal{B} \text{ **expresso em } \mathbb{F}. \\ \vec{r}_O = \text{vetor posição de } O \in \mathcal{F} \text{ **expresso em } \mathbb{F}. \\ \vec{r}_{PO} = \text{vetor posição de } P \text{ em relação } O, \text{ **convenientemente expresso em } \mathbb{B}. \end{array} \right.******$$





❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

➤ Campo de Velocidades

- Derivando a Eq. 6 no tempo com relação ao referencial \mathcal{F} , tem-se:

$$\underbrace{\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_P}{dt}}_{= {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P} = \underbrace{\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_O}{dt}}_{= {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O} + \frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_{PO}}{dt}$$

Como \vec{r}_P e \vec{r}_O são, convenientemente, expressos em \mathbb{F} , então: $\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_P}{dt} = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P$ e $\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_O}{dt} = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O$.

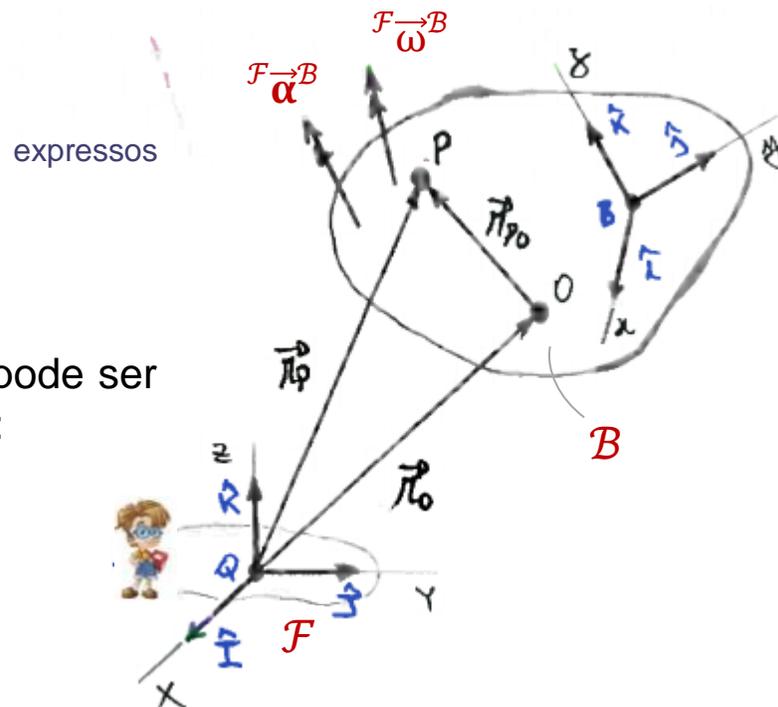
- Como \vec{r}_{PO} é expresso em \mathbb{B} , o segundo termo da direita da equação acima pode ser calculado utilizando o Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial (Eq. 5):

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_{PO}}{dt} = \underbrace{\frac{{}^{\mathcal{B}}d\vec{r}_{PO}}{dt}}_{= \vec{0}} + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \vec{r}_{PO} = {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \vec{r}_{PO}$$

Como \vec{r}_{PO} é um vetor fixo a \mathcal{B} (corpo rígido), então: $\frac{{}^{\mathcal{B}}d\vec{r}_{PO}}{dt} = \vec{0}$.

- Finalmente:

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \vec{r}_{PO} \Rightarrow \boxed{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P - O)} \quad (7)$$

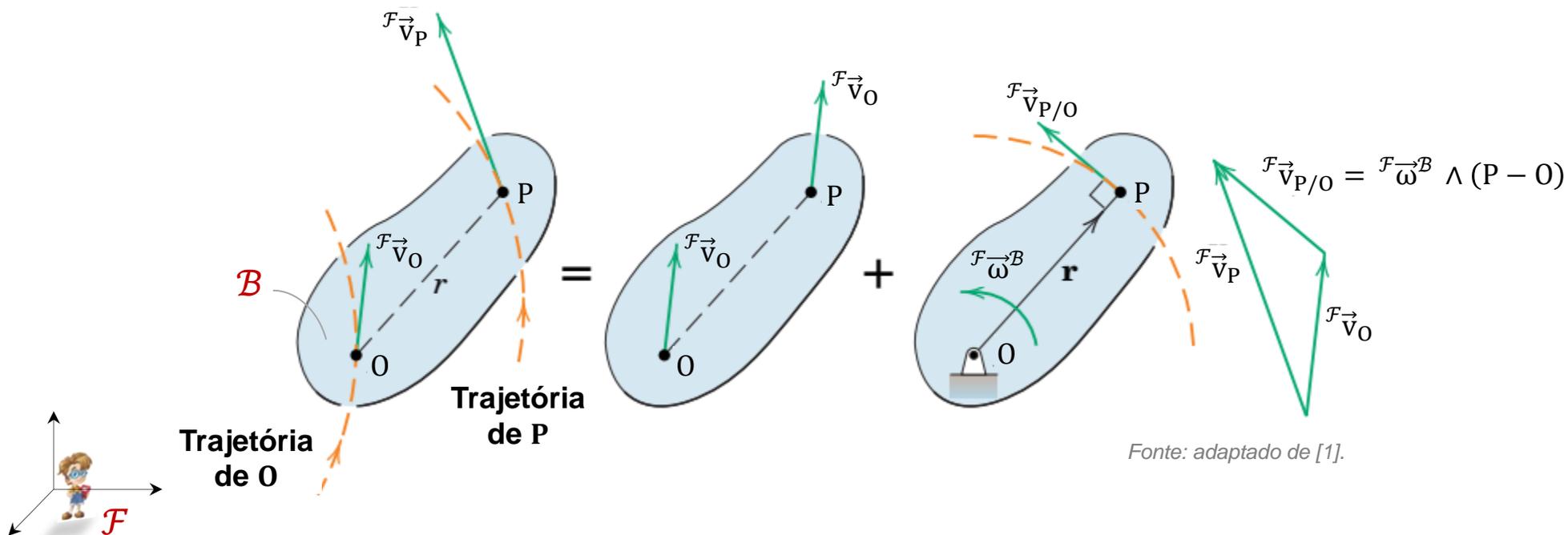


Dados ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O$ e ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$, a Eq. 7 permite calcular a velocidade de **qualquer** ponto $P \in \mathcal{B}$.

❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

➤ Campo de Velocidades

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}^B \wedge (P - O) \quad (7)$$



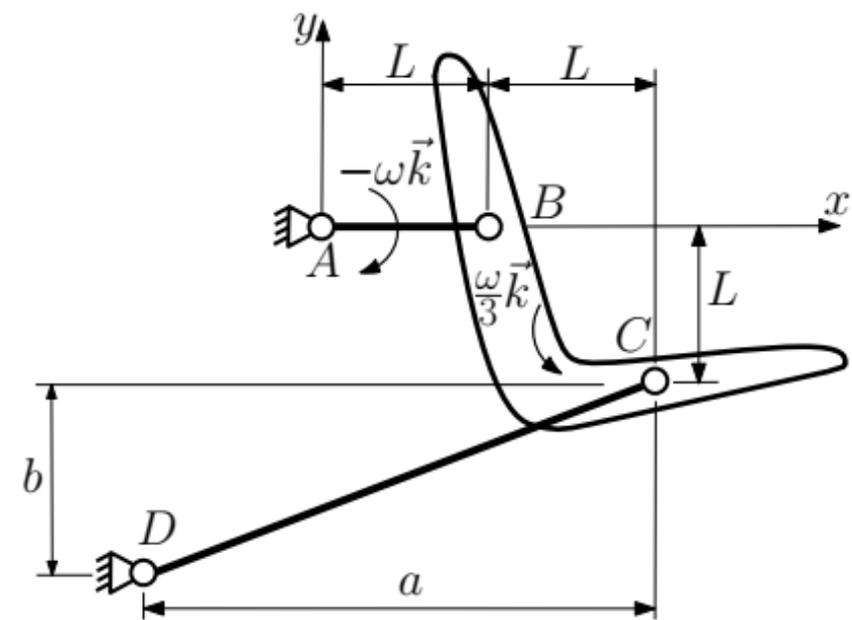
Fonte: adaptado de [1].

Movimento plano = Translação com O + Rotação em torno de O

Exercício (P2-Q1-2018)

Questão 1 (3,0 pontos). A figura ao lado representa, de maneira simplificada, parte do mecanismo de acionamento da pá de um trator/escavadeira, em que as articulações fixas A e D servem de vínculos para duas hastes rígidas AB e CD , ligadas através de articulações em B e C à pá. No instante mostrado, são conhecidas a velocidade angular da barra AB , $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$, a velocidade angular da pá, $\frac{\omega}{3}\vec{k}$ e as dimensões da barra AB e do segmento BC em função do parâmetro L . Com base nestas informações e utilizando o sistema de coordenadas $Axyz$, determine:

- a velocidade do ponto B , \vec{v}_B ;
- a velocidade do ponto C , \vec{v}_C ;
- a relação entre as cotas a e b de modo a garantir a condição de corpo rígido para a barra CD .





□ Exercício (P2-Q1-2018)

a) Da equação fundamental da cinemática do corpo rígido (campo de velocidades) para a barra AB:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) = \vec{0} - \omega \vec{k} \wedge (L\vec{i}) = -\omega L\vec{j} \quad (1,0)$$

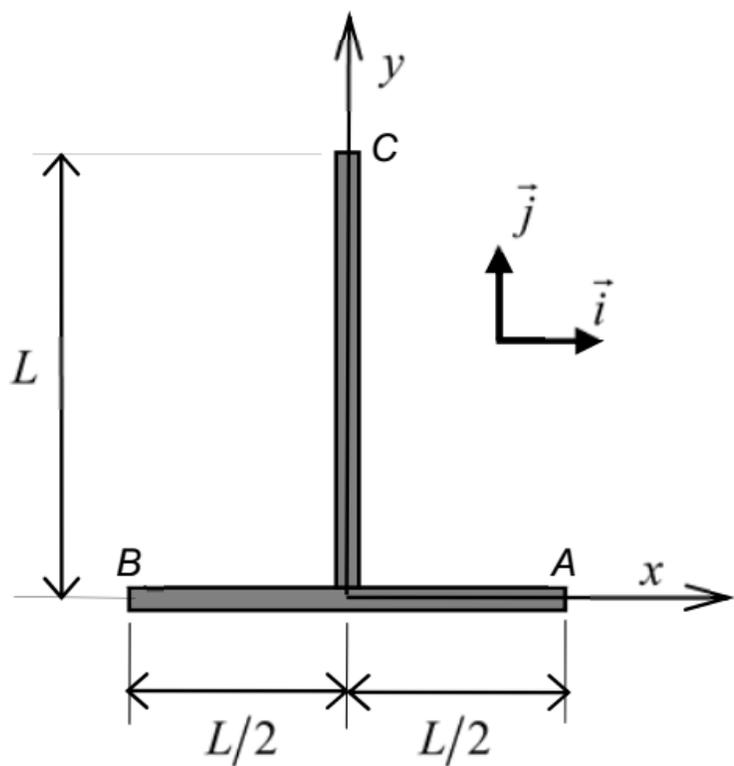
b) Lembrando que o vetor rotação instantânea da pá foi dado:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_B + \frac{\omega}{3} \vec{k} \wedge (C - B) \\ \vec{v}_C &= -\omega L\vec{j} + \frac{\omega}{3} \vec{k} \wedge (L\vec{i} - L\vec{j}) \\ \vec{v}_C &= \frac{\omega L}{3} \vec{i} - \frac{2\omega L}{3} \vec{j} \end{aligned} \quad (1,0)$$

c) A condição de corpo rígido é satisfeita quando as projeções das velocidades de dois pontos quaisquer de um corpo rígido na direção do segmento de reta que os une é idêntica. Portanto, para os pontos C e D , pertencentes à barra CD , tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C \cdot (C - D) &= \vec{v}_D \cdot (C - D) \\ \left(\frac{\omega L}{3} \vec{i} - \frac{2\omega L}{3} \vec{j} \right) \cdot (a\vec{i} + b\vec{j}) &= \vec{0} \cdot (a\vec{i} + b\vec{j}) \\ a \frac{\omega L}{3} - b \frac{2\omega L}{3} &= 0 \\ \therefore a &= 2b \end{aligned} \quad (1,0)$$

Exercício (P2-Q1-2014)



QUESTÃO 1 (3,0 pontos). A peça ABC mostrada na figura é formada por dois segmentos ortogonais de comprimento L . Em um dado instante, sabe-se que as velocidades dos pontos A , B e C são:

$$\vec{V}_A = \frac{\omega L}{2} \vec{j} \quad , \quad \vec{V}_B = -\frac{\omega L}{2} \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{V}_C = -\omega L \vec{i} + \omega L \vec{k}$$

Para este instante:

- mostrar que as velocidades dos pontos A e C são compatíveis com a condição de corpo rígido;
- calcular o vetor rotação da peça ABC neste instante.



□ Exercício (P2-Q1-2014)

(b) calcular o vetor rotação $\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$ da peça ABC neste instante: condição de corpo rígido para pontos A e B :

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= \vec{V}_B + \vec{\Omega} \wedge (A-B) \quad \Rightarrow \frac{\omega L}{2} \vec{j} = -\frac{\omega L}{2} \vec{j} + (\Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}) \wedge (L\vec{i}) \\ \Rightarrow \omega L \vec{j} &= -\Omega_y L \vec{k} + \Omega_z L \vec{j} \quad \Rightarrow \boxed{\Omega_z = \omega} \quad \text{e} \quad \boxed{\Omega_y = 0} \quad (1,0) \end{aligned}$$

Condição de corpo rígido para pontos A e C :

$$\begin{aligned} \vec{V}_C &= \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge (C-A) \quad \Rightarrow -\omega L \vec{i} + \omega L \vec{k} = \frac{\omega L}{2} \vec{j} + (\Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}) \wedge \left(-\frac{L}{2} \vec{i} + L \vec{j}\right) \\ \Rightarrow -\omega L \vec{i} - \frac{\omega L}{2} \vec{j} + \omega L \vec{k} &= \Omega_x L \vec{k} + \Omega_y \frac{L}{2} \vec{k} - \Omega_z \frac{L}{2} \vec{j} - \Omega_z L \vec{i} \\ \Rightarrow \begin{cases} -\omega L = -\Omega_z L \Rightarrow \Omega_z = \omega & OK \\ -\frac{\omega L}{2} = -\frac{\Omega_z L}{2} \Rightarrow \Omega_z = \omega & OK \\ \omega L = \Omega_x L + \Omega_y \frac{L}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $\Omega_y = 0$, então da última equação tem-se que $\boxed{\Omega_x = \omega}$

Portanto $\boxed{\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_z \vec{k} = \omega \vec{i} + \omega \vec{k}}$ (1,0)

❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

➤ Campo de Acelerações

- Derivando a Eq. 7 no tempo com relação ao referencial \mathcal{F} , tem-se:

$$\underbrace{\frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{v}_P \right)}_{= \mathcal{F} \vec{a}_P} = \underbrace{\frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{v}_O \right)}_{= \mathcal{F} \vec{a}_O} + \frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO} \right)$$

Como \vec{v}_P e \vec{v}_O são expressos, convenientemente, em \mathcal{F} , então: $\frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{v}_P \right) = \mathcal{F} \vec{a}_P$ e $\frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{v}_O \right) = \mathcal{F} \vec{a}_O$.

- Desenvolvendo o segundo termo da direita da equação acima, tem-se:

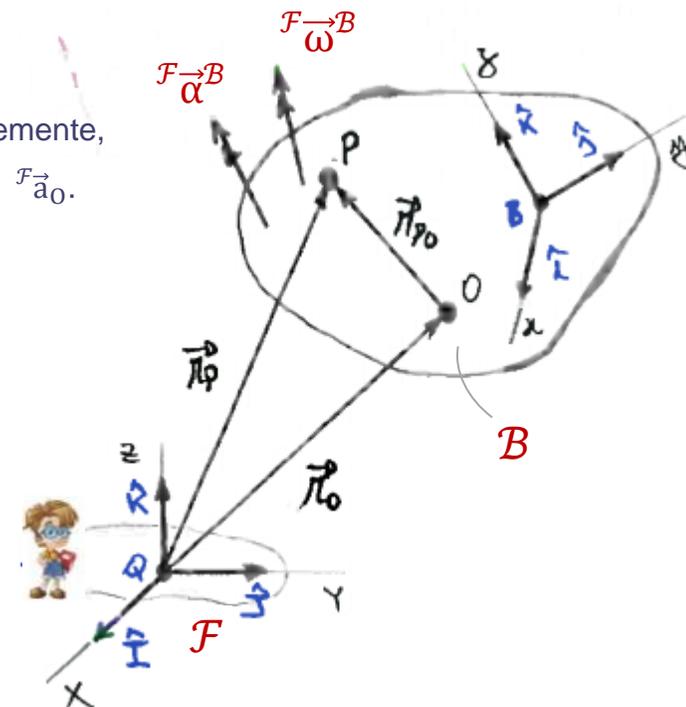
$$\frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO} \right) = \frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{\omega}^B \right) \wedge \vec{r}_{PO} + \vec{\omega}^B \wedge \frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{r}_{PO} \right)$$

- Aplicando o Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial (Eq. 5) às derivadas remanescentes, tem-se:

$$\frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{\omega}^B \right) = \underbrace{\frac{B}{dt} \left(\vec{\omega}^B \right)}_{= \vec{\alpha}^B} + \underbrace{\vec{\omega}^B \wedge \vec{\omega}^B}_{= \vec{0}} = \vec{\alpha}^B$$

$$\frac{\mathcal{F}}{dt} \left(\vec{r}_{PO} \right) = \vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO}$$

(calculado no slide anterior)



❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

➤ Campo de Acelerações

- Rearranjando os termos das equações anteriores, obtém-se finalmente:

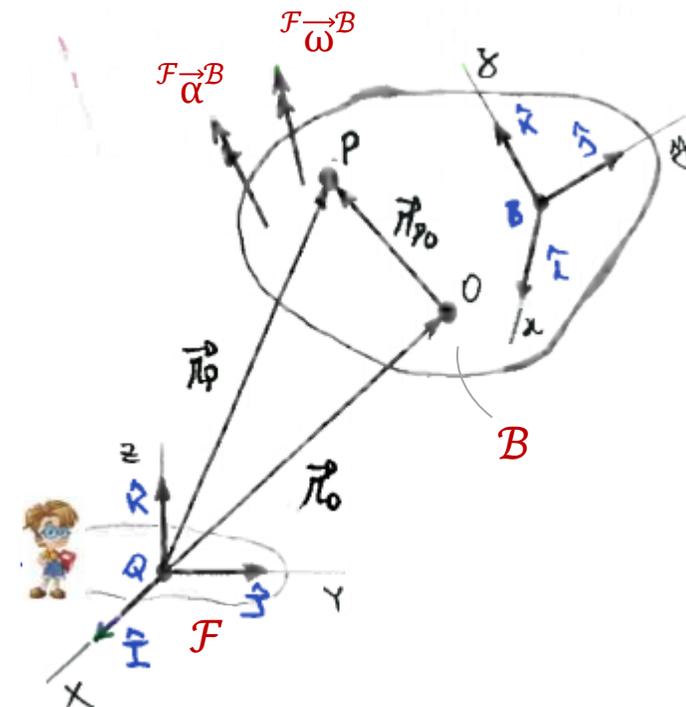
$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_P = {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^B \wedge \vec{r}_{PO} + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO}]$$



$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_P = {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^B \wedge (P - O) + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (P - O)] \quad (8)$$

➤ Observações:

- As Eq. (7-8) são **equações vetoriais**, e, como tal, **invariantes com o sistema de coordenadas** utilizado para expressar algebricamente os vetores envolvidos.
- Dessa forma, para efeito de cálculo, os vetores presentes nessas equações podem ser expressos em qualquer sistema de coordenadas conveniente.

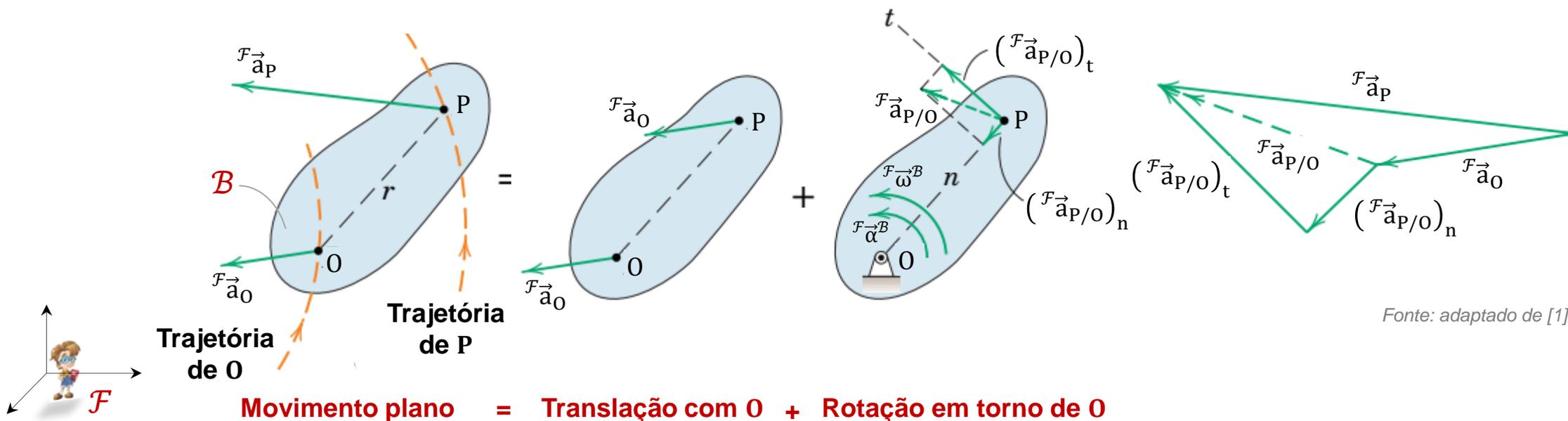


Dados ${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O$, ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B$ e ${}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^B$, a Eq. 8 permite calcular a velocidade de **qualquer** ponto $P \in B$.

❑ Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos

➤ Campo de Acelerações

$$\mathcal{F}\vec{a}_P = \mathcal{F}\vec{a}_O + \underbrace{\mathcal{F}\vec{\alpha}^B \wedge (P - O)}_{(\mathcal{F}\vec{a}_{P/O})_t} + \underbrace{\mathcal{F}\vec{\omega}^B \wedge [\mathcal{F}\vec{\omega}^B \wedge (P - O)]}_{(\mathcal{F}\vec{a}_{P/O})_n} \quad (8)$$

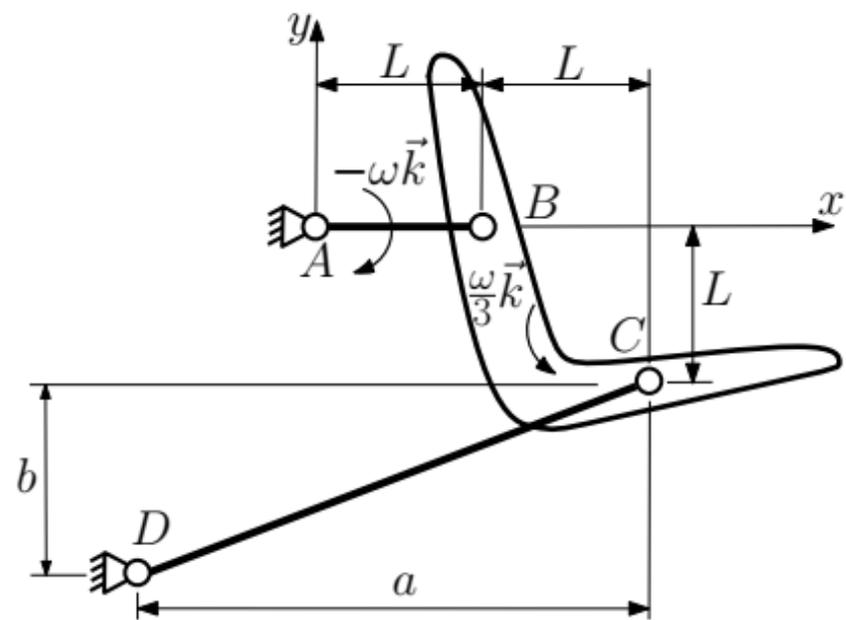


Exercício (P2-Q1-2018)

Questão 1 (3,0 pontos). A figura ao lado representa, de maneira simplificada, parte do mecanismo de acionamento da pá de um trator/escavadeira, em que as articulações fixas A e D servem de vínculos para duas hastes rígidas AB e CD , ligadas através de articulações em B e C à pá. No instante mostrado, são conhecidas a velocidade angular da barra AB , $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$, a velocidade angular da pá, $\frac{\omega}{3}\vec{k}$ e as dimensões da barra AB e do segmento BC em função do parâmetro L . Com base nestas informações e utilizando o sistema de coordenadas $Axyz$, determine:

- a velocidade do ponto B , \vec{v}_B ;
- a velocidade do ponto C , \vec{v}_C ;
- a relação entre as cotas a e b de modo a garantir a condição de corpo rígido para a barra CD .

Calcular \vec{a}_B e \vec{a}_C



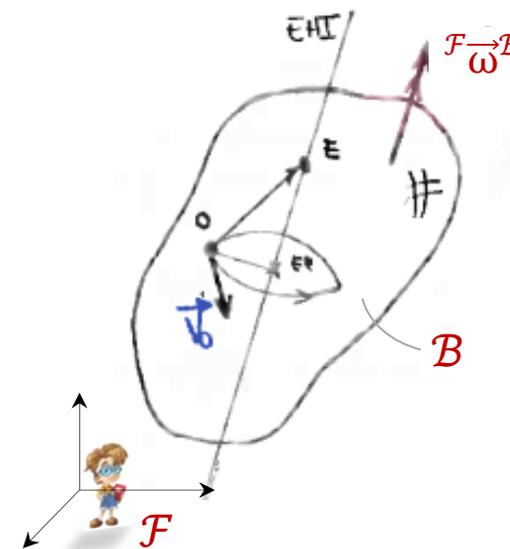


Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetor e Referenciais
7. Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
- 10. Eixo Helicoidal Instantâneo**
11. Movimento Plano
12. Composição de Movimentos

□ Eixo Helicoidal Instantâneo

- O Eixo Helicoidal Instantâneo (EHI) corresponde ao lugar geométrico dos pontos de um corpo rígido com **velocidade mínima num dado instante de tempo**.
- Considere um corpo rígido \mathcal{B} que se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$ em relação a um referencial fixo \mathcal{F} .
- A determinação do EHI pode ser realizada por analogia com a definição de Eixo Central, considerando a similaridade algébrica entre a fórmula de mudança de polo e a expressão do campo de velocidades de um corpo rígido.



$$\begin{aligned} \vec{M}_P &= \vec{M}_O + \vec{R} \wedge (P - O) \\ {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P &= {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P - O) \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \vec{M} \leftrightarrow \vec{v} \\ \hline \vec{R} \leftrightarrow \vec{\omega} \\ \hline \end{array}$$

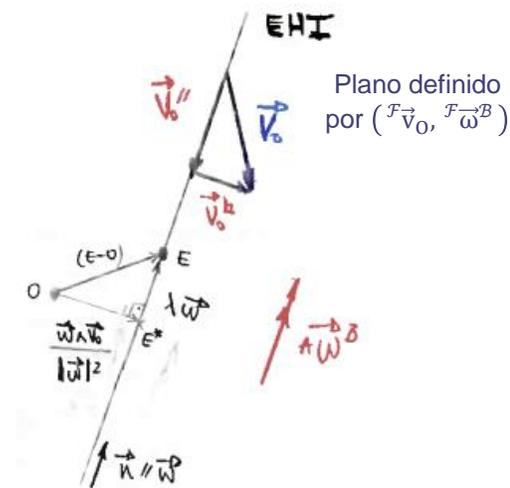
- Por analogia com as expressões do eixo central, para $E \in \text{EHI}$:

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_E = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{\min} = \left(\frac{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}}{\|{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}\|} \right) \frac{{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}}{\|{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}\|}$$

(9)

$$E = O + \frac{{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O}{\|{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}\|^2} + \lambda {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(10)



❑ Eixo Helicoidal Instantâneo

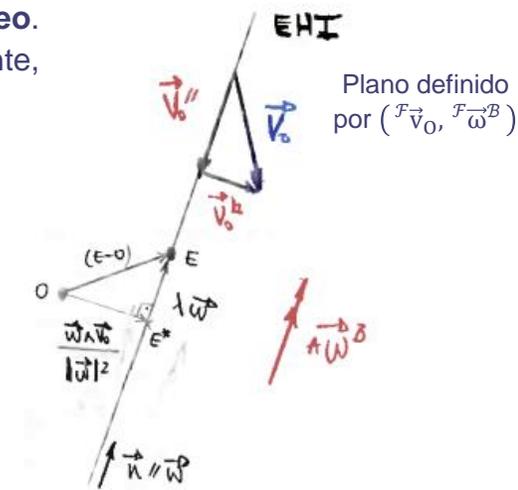
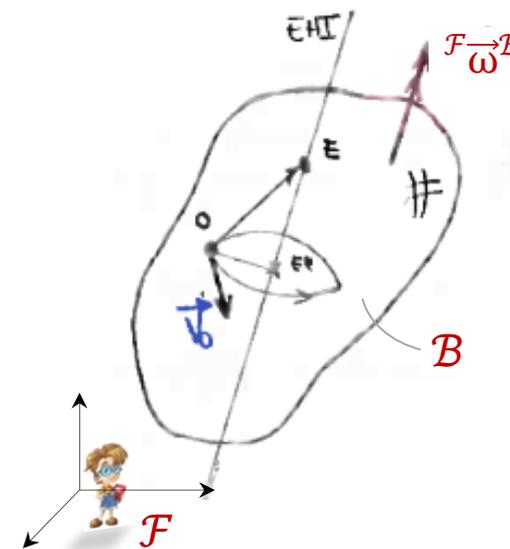
- Fisicamente, em cada instante de tempo (ato de movimento instantâneo), os diferentes pontos de um corpo rígido executam os seguintes movimentos:
 - $P \in \text{EHI}$: movimento de translação pura igual a ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{\min}$ na direção do EHI;
 - $P \notin \text{EHI}$: movimento de translação na direção do EHI + rotação em torno do EHI.



$$\boxed{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{\min} + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (P - E), \quad E \in \text{EHI}} \quad (11)$$

Ato de movimento helicoidal instantâneo.
 Se a direção de ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B$ permanece constante, o CR realiza movimento de hélice.

- O EHI é paralelo a ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B$, logo sua direção em geral varia no tempo.
- Em geral, tanto o módulo quanto a orientação de ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{\min}$ variam no tempo.

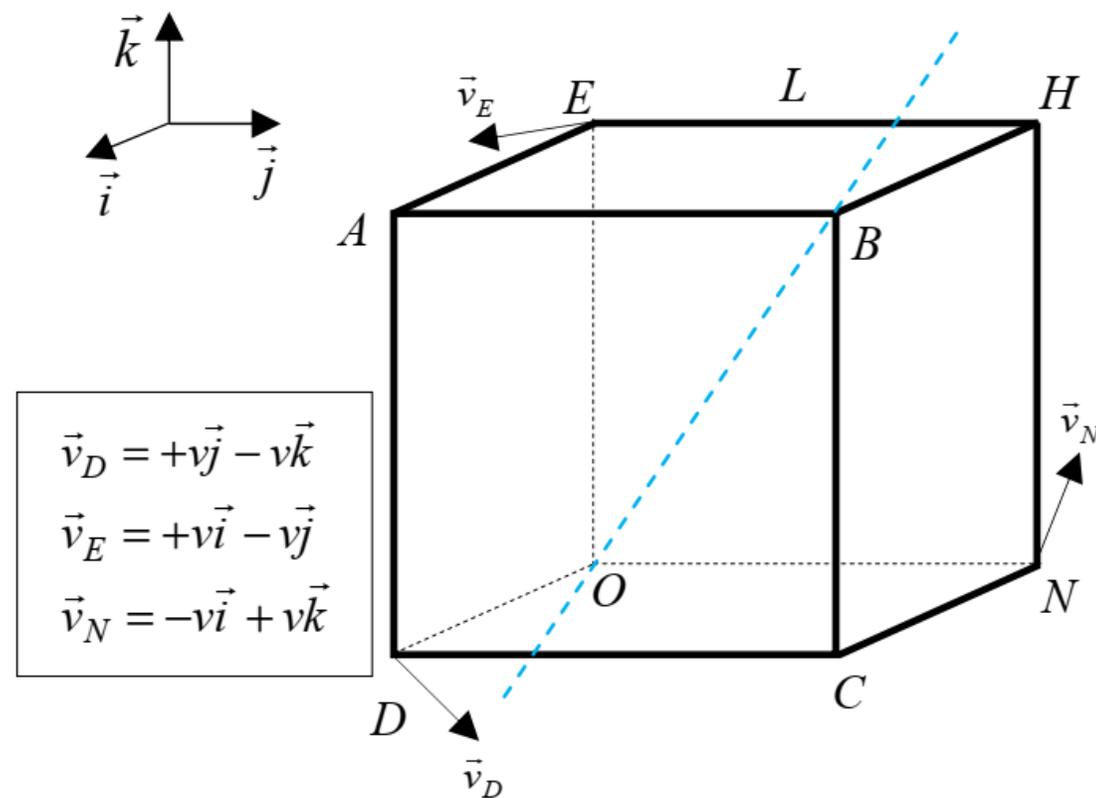


Exercício (P2-Q1-2012)

QUESTÃO 1 (3,5 pontos) – No instante mostrado na figura, a posição do cubo de aresta L é tal que \overline{OD} é paralelo a \vec{i} , \overline{ON} é paralelo a \vec{j} e \overline{OE} é paralelo a \vec{k} . Nesse mesmo instante são conhecidas as velocidades dos vértices D , E e N (ver quadro ao lado da figura). Os versores \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} são fixos.

Para o instante mostrado na figura:

- Usando somente a propriedade fundamental da cinemática do corpo rígido, determine a velocidade \vec{v}_O do ponto O .
- Determine o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do cubo.
- Localize graficamente o eixo helicoidal instantâneo e diga qual é o ato de movimento do cubo.





□ Exercício (P2-Q1-2012)

a)

$$\vec{v}_O \cdot (D-O) = \vec{v}_D \cdot (D-O) \Rightarrow (v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + v_{Oz}\vec{k}) \cdot L\vec{i} = (+v\vec{j} - v\vec{k}) \cdot L\vec{i} \Rightarrow v_{Ox} = 0$$

$$\vec{v}_O \cdot (N-O) = \vec{v}_N \cdot (N-O) \Rightarrow (v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + v_{Oz}\vec{k}) \cdot L\vec{j} = (-v\vec{i} + v\vec{k}) \cdot L\vec{j} \Rightarrow v_{Oy} = 0$$

$$\vec{v}_O \cdot (E-O) = \vec{v}_E \cdot (E-O) \Rightarrow (v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + v_{Oz}\vec{k}) \cdot L\vec{k} = (+v\vec{i} - v\vec{j}) \cdot L\vec{k} \Rightarrow v_{Oz} = 0$$

Portanto: $\boxed{\vec{v}_O = \vec{0}}$ (1,0)

b)

$$\vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (D-O) \Rightarrow (+v\vec{j} - v\vec{k}) = \vec{0} + (\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}) \wedge L\vec{i} \Rightarrow v\vec{j} - v\vec{k} = -\omega_y L\vec{k} + \omega_z L\vec{j}$$

Portanto:

$$\omega_y = \frac{v}{L} \quad (0,5)$$

$$\omega_z = \frac{v}{L}$$

$$\vec{v}_N = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (N-O) \Rightarrow (-v\vec{i} + v\vec{k}) = \vec{0} + \left(\omega_x\vec{i} + \frac{v}{L}\vec{j} + \frac{v}{L}\vec{k}\right) \wedge L\vec{j} \Rightarrow -v\vec{i} + v\vec{k} = \omega_x L\vec{k} - v\vec{i} \Rightarrow \omega_x = \frac{v}{L} \quad (0,5)$$

Resultando em: $\boxed{\vec{\omega} = \frac{v}{L}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}$ (0,5)

c)

Como a velocidade do ponto O é nula nesse instante, ele pertence ao eixo helicoidal instantâneo. Como esse eixo é paralelo ao vetor de rotação, observa-se que o eixo helicoidal instantâneo passa pelos pontos O e B (reta azul desenhada na figura). Observa-se também que o cubo tem ato de movimento de rotação. (0,5 - localização gráfica)

+ (0,5 - ato de movimento)



Conteúdo

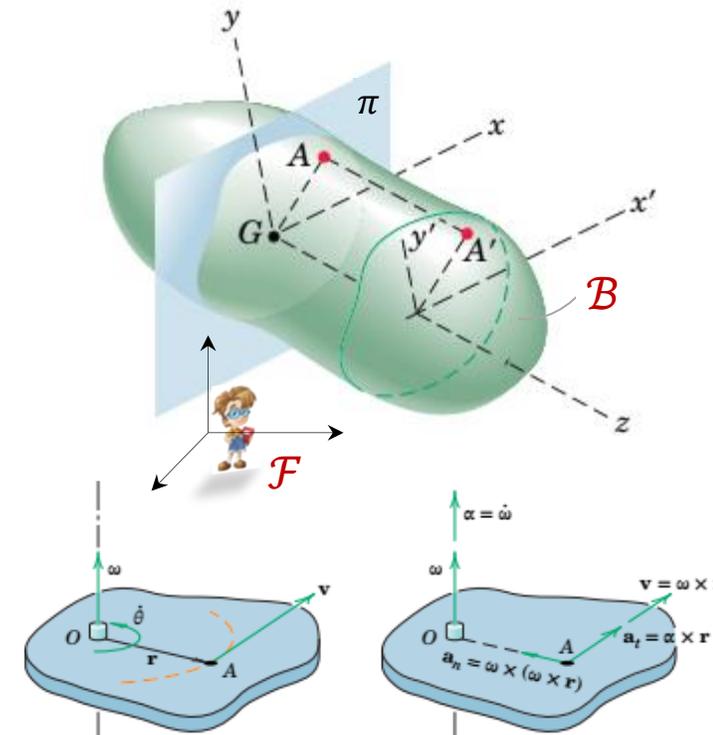
1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetor e Referenciais
7. Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
- 11. Movimento Plano**
12. Composição de Movimentos

□ Movimento Plano

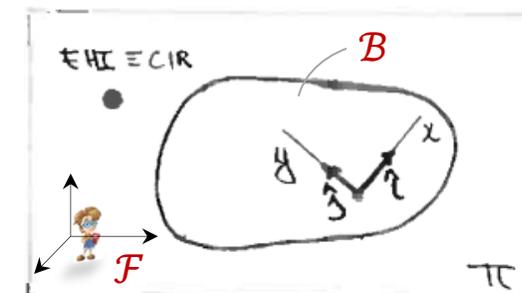
- Considere um corpo rígido \mathcal{B} cujos pontos se movem em planos paralelos a um plano fixo π , com velocidade angular ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$ e aceleração angular ${}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^{\mathcal{B}}$ em relação a um referencial fixo \mathcal{F} .
- Como cada ponto (A') do corpo possui um movimento **idêntico** ao ponto correspondente (A) no plano π , então a cinemática do corpo pode ser analisada a partir do movimento dos pontos no plano π .
- Características do movimento plano:
 - ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} = \omega \hat{k}$ (outras componentes removeriam o corpo do plano).
 - EHI é **sempre ortogonal** ao plano do movimento, pois ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \parallel \text{EHI}$.
 - ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_E = \vec{0}$ para $E \in \text{EHI}$, caso contrário o ponto não permaneceria no plano.

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_E = \left(\frac{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}}{\|{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}\|} \right) \frac{{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}}{\|{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}\|} = \vec{0}$$

= $\vec{0}$, pois, no movimento plano, ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O \perp {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$ para todos os pontos do corpo (${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O \parallel \pi$)

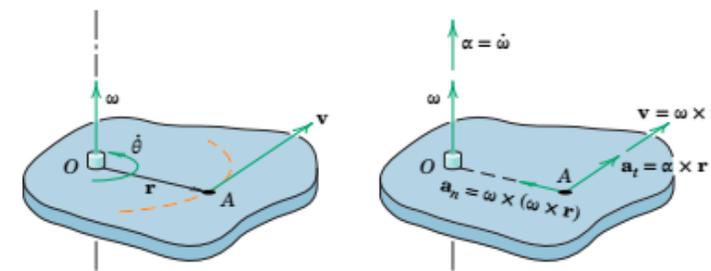


Movimento plano geral de um corpo rígido. Fonte: adaptado de [1].

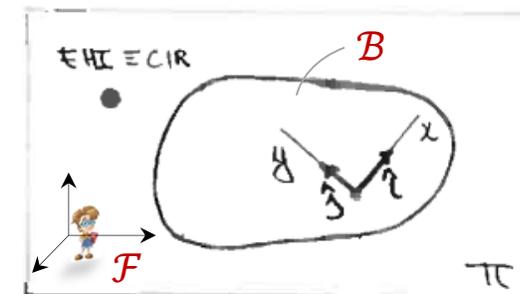


□ Movimento Plano

- Portanto, o ponto de intersecção do EHI com o plano do movimento possui **velocidade instantânea nula**, e recebe o nome de “**Centro Instantâneo de Rotação**” (CIR), *i.e.* ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{\text{CIR}} = \vec{0}$.
- O CIR corresponde a um ponto do plano do movimento em torno do qual **todos os pontos do corpo** realizam movimento de **rotação pura em um dado instante** (ato de movimento instantâneo).
- Em um dado instante de tempo (ato de movimento instantâneo), todos os pontos do corpo realizam movimento de rotação pura em torno do CIR com velocidade angular ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B = \omega \hat{k}$.
- Propriedades do CIR:
 - Não coincide, necessariamente, com algum ponto do corpo (o CIR não é um ponto material);
 - Sua velocidade é sempre nula, *i.e.* ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{\text{CIR}} = \vec{0}$;
 - Sua aceleração não é, necessariamente, nula;
 - Em geral, sua posição no plano varia com o tempo;
 - Definido **apenas** para movimento plano (2D) com rotação.



Movimento plano geral de um corpo rígido.
Fonte: adaptado de [1].



□ Movimento Plano

➤ Determinação do CIR (método analítico)

- O CIR pode ser determinado analiticamente através da aplicação direta da equação do campo de velocidades de um corpo rígido:

$$\vec{v}_P = \overbrace{\vec{v}_{CIR}}^{= \vec{0}, \text{ pela definição de CIR}} + \vec{\omega}^B \wedge (P - CIR)$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}^B \wedge (P - CIR)$$

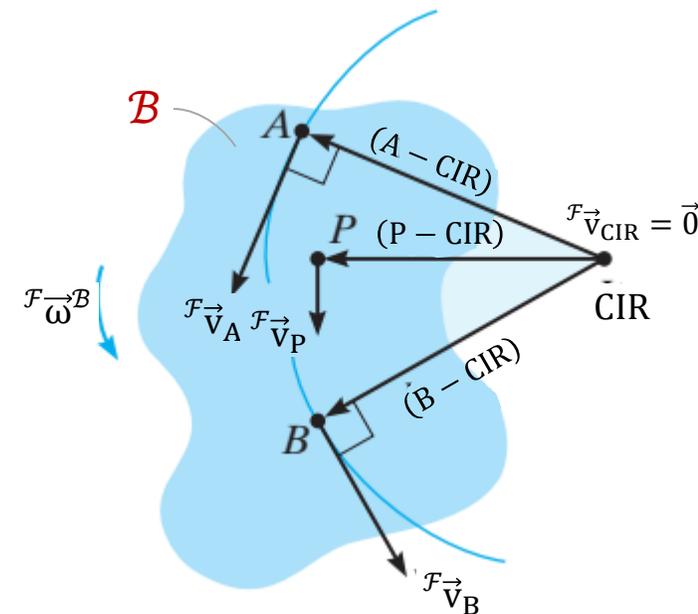
Rotação pura em torno do CIR



$$\vec{v}_P \perp (P - CIR)$$

$$\|\vec{v}_P\| \propto \text{distância de P até o CIR}$$

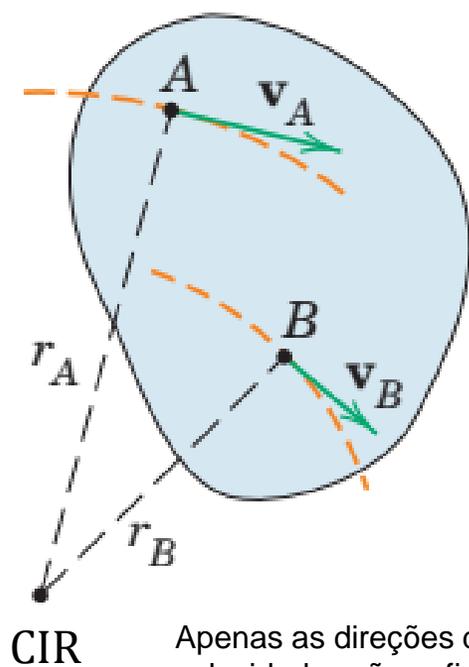
- Portanto, conhecendo-se $(\vec{v}_P, \vec{\omega}^B)$ ou $(\vec{v}_{P_1}, \vec{v}_{P_2})$, é possível determinar algebricamente a posição do CIR.
- Entretanto, o CIR pode ser determinado mais facilmente através de métodos geométricos.



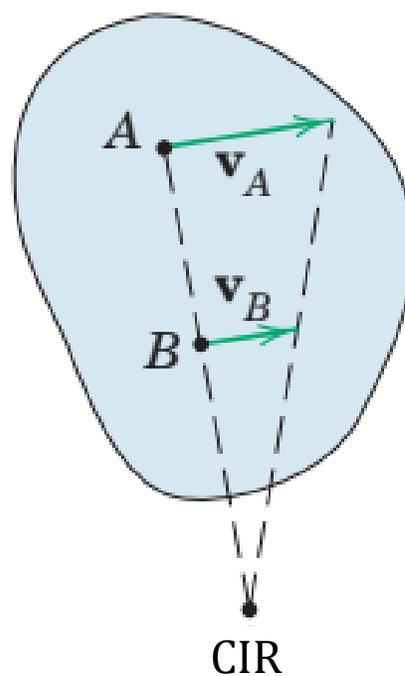
Determinação analítica do CIR e ilustração de que todos os pontos do corpo realizam movimento de rotação pura com velocidade angular $\vec{\omega}^B$ em torno do CIR. Fonte: adaptado de [2].

□ Movimento Plano

➤ Determinação do CIR (método geométrico)



Apenas as direções das
velocidades são suficientes

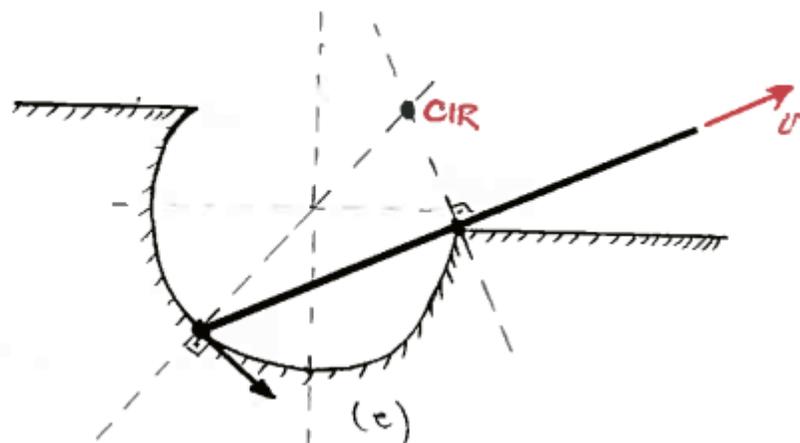
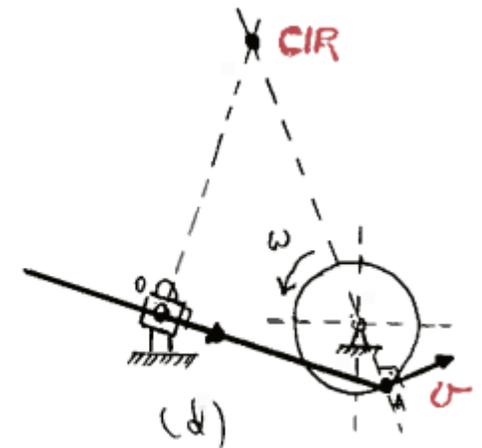
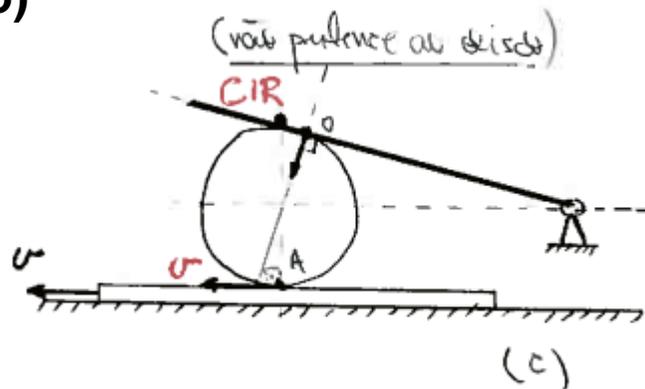
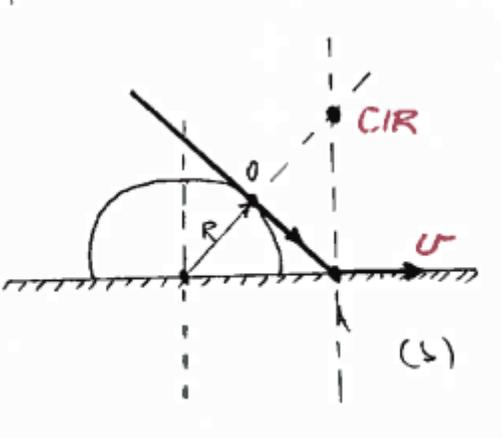
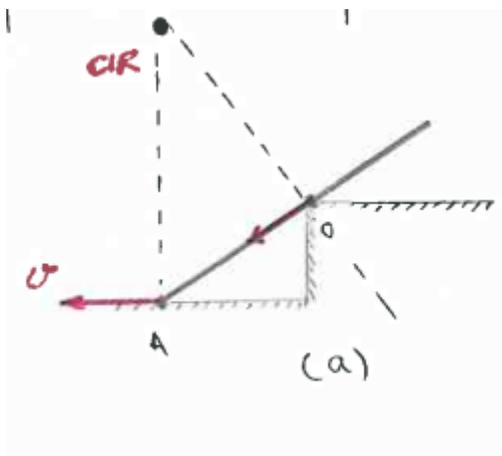


As direções e magnitudes das
velocidades são necessárias

Casos de determinação geométrica do CIR. Fonte: [1].

□ Movimento Plano

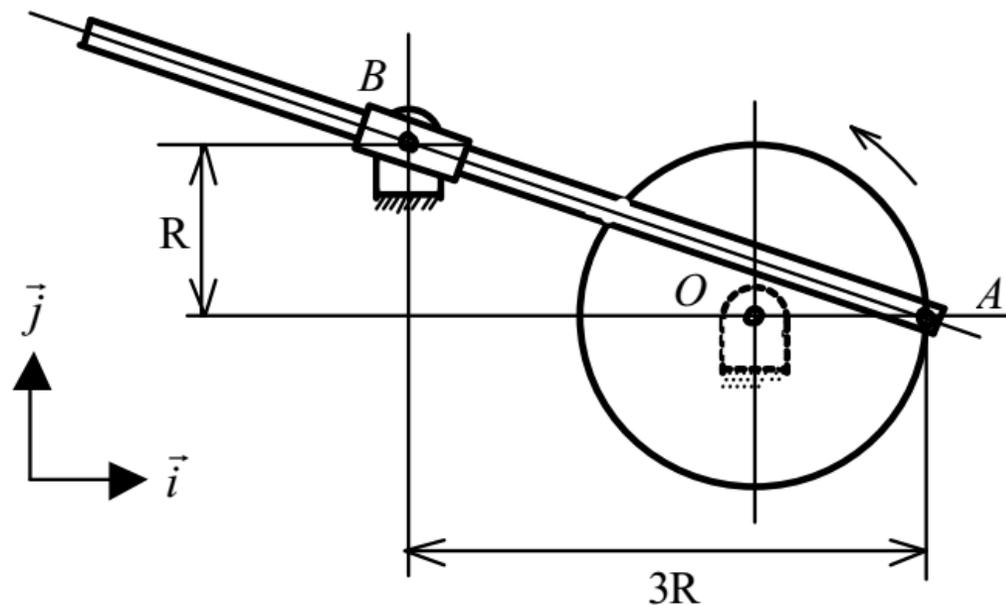
➤ Determinação do CIR (método geométrico)



Exercício (P2-Q1-2006)

1ª Questão (3,0 pontos) O disco de raio R gira em torno de seu centro fixo O , com velocidade angular ω constante. A barra está articulada ao disco em A . No ponto B existe um cursor pivotado que envolve a barra. Para o instante representado na figura:

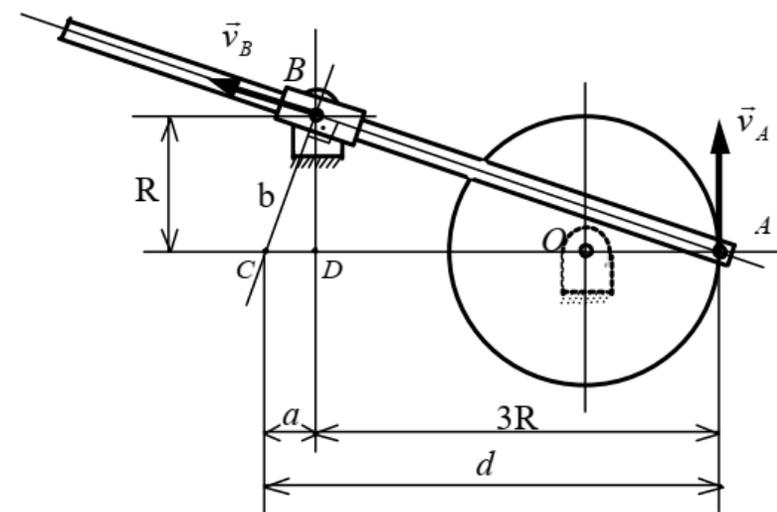
- determine, graficamente, o centro instantâneo de rotação da barra;
- calcule a velocidade e a aceleração vetoriais do ponto A ;
- determine o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra.



Exercício (P2-Q1-2006)

Solução:

- a) Notar que, devido ao cursor, a velocidade do ponto da barra em B é na direção do eixo da barra. Considerando a direção da velocidade do ponto A , observa-se que o ponto C é o CIR da barra. (1,0)



- b) Cálculo da velocidade do ponto A :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (A-O) \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge R \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \omega R \vec{j}} \quad (0,5)$$

Cálculo da aceleração do ponto A :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A-O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (A-O)) \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{0} + \vec{0} \wedge R \vec{i} + \omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge R \vec{i})$$

$$\boxed{\vec{a}_A = -\omega^2 R \vec{i}} \quad (0,5)$$

- c) O ponto A também pertence à barra, e usando o CIR temos:

$$v_A = \Omega d = \omega R, \text{ onde } d = a + 3R$$

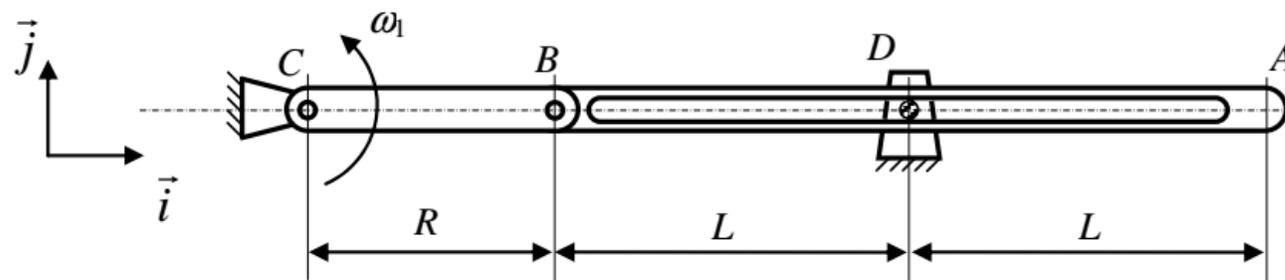
Pela semelhança entre os triângulos ABD e BCD , temos que $\frac{a}{R} = \frac{R}{3R} \Rightarrow a = \frac{R}{3}$, logo:

$$\Omega \left(\frac{R}{3} + 3R \right) = \omega R \Rightarrow \Omega = \frac{3}{10} \omega, \text{ e, observando a figura, } \boxed{\vec{\Omega} = \frac{3}{10} \omega \vec{k}} \quad (1,0)$$

Exercício (P2-Q2-2008)

Considere o mecanismo mostrado na figura. A barra BC está articulada em C . A barra AB está articulada à barra BC no ponto B e possui um rasgo por onde pode deslizar sobre o pino fixo D . O vetor de rotação da barra BC é $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$, com ω_1 constante. No instante mostrado na figura, determine:

- O CIR da barra AB , usando o método gráfico.
- O vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ da barra AB e a velocidade \vec{v}_A do ponto A .
- A aceleração \vec{a}_B do ponto B .

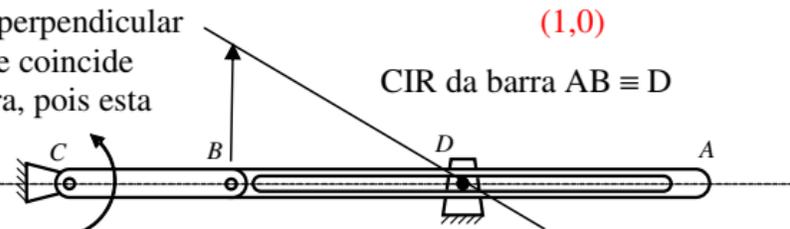


Em um instante posterior ao mostrado na figura, onde o vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ da barra AB é nulo, determine:

- O ângulo φ formado entre o segmento AB e a horizontal. Desenhe o mecanismo nesta posição.

Exercício (P2-Q2-2008)

Como na posição indicada a velocidade de B é perpendicular à barra AB e a velocidade do ponto da barra que coincide com o pino deveria ter a direção da própria barra, pois esta desliza sobre o pino, a única condição que não viola a propriedade fundamental de corpo rígido da barra é que a velocidade do ponto da barra que coincide com o pino, na posição mostrada na figura, deve ser nula e assim este é CIR da barra.



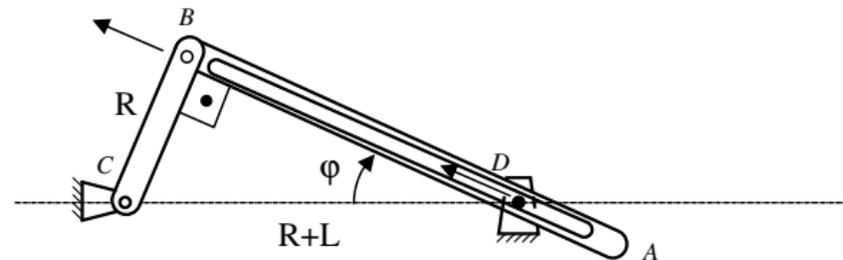
$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge (B-D) \Rightarrow \omega_1 R \vec{j} = \omega_2 \vec{k} \wedge (-L \vec{i}) \Rightarrow \omega_2 = -\omega_1 \frac{R}{L} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_2 = -\omega_1 \frac{R}{L} \vec{k}} \quad (0,5)$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_2 \wedge (A-D) = -\omega_1 \frac{R}{L} \vec{k} \wedge (L \vec{i}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = -\omega_1 R \vec{j}} \quad (0,5)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}_1 \wedge (B-C) + \omega_1^2 \vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge (B-C)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1^2 \vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge R \vec{i}] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = -\omega_1^2 R \vec{i}} \quad (0,5)$$

Quando $\vec{\omega}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_D$. Sabendo conforme acima que $\vec{v}_B \perp \overline{CB}$ e que $\vec{v}_D \parallel \overline{BA}$, graficamente:

$$\boxed{\varphi = \arcsen \frac{R}{R+L}} \quad (0,5)$$



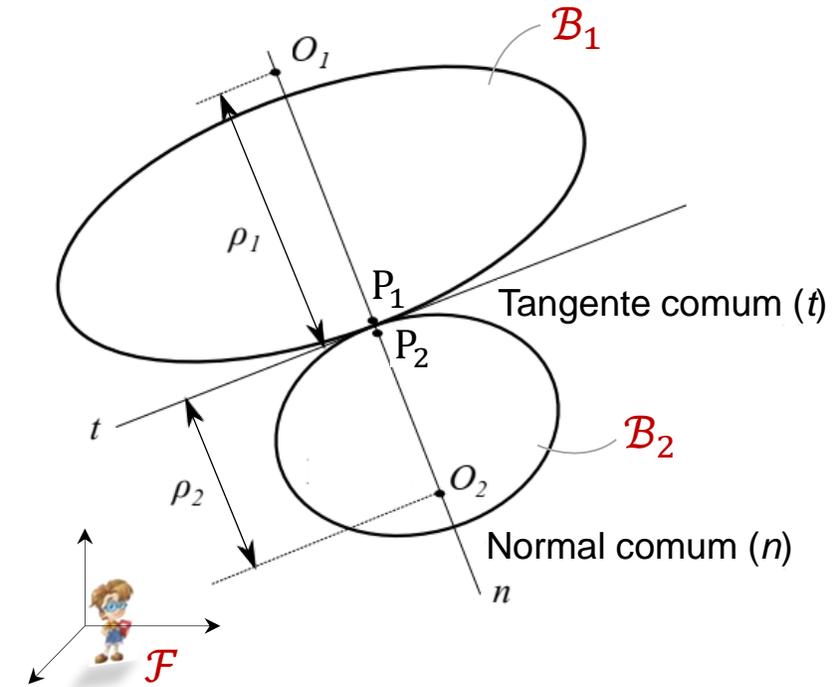
□ Movimento Plano

➤ Rolamento sem escorregamento (ou rolamento puro)

- Dois corpos rígidos \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 rolam entre si quando uma sequência contínua de pontos de um corpo está em contato permanente com uma sequência contínua de pontos do outro corpo.
- Nestas condições, **a cada instante de tempo**, um ponto P_1 da superfície de \mathcal{B}_1 está em contato com um dado ponto P_2 da superfície de \mathcal{B}_2 .
- Condição de rolamento puro:

$$\mathcal{F}\vec{v}_{P_2} = \mathcal{F}\vec{v}_{P_1} \Rightarrow \mathcal{F}\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{0} \quad (12)$$

- Em geral, a **aceleração relativa** entre os pontos em contato **não é nula**. Como os pontos em contato variam continuamente, a aceleração relativa entre eles deve ser não nula para que tal variação seja possível.



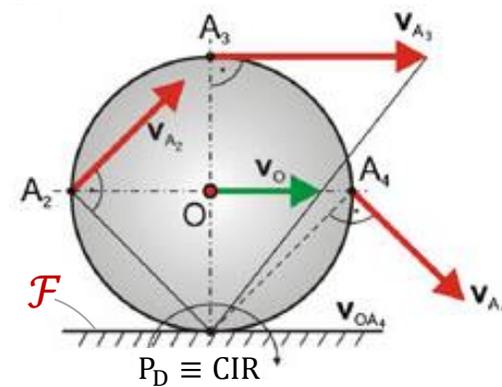
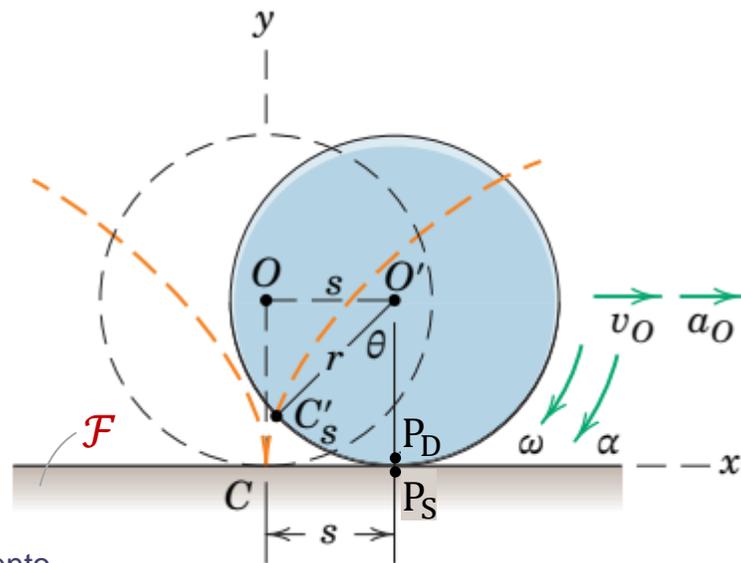
□ Movimento Plano

➤ Rolamento sem escorregamento (ou rolamento puro)

- Um caso especial de rolamento puro é o de um disco/cilindro que **rola sem escorregar** sobre uma superfície horizontal fixa.
- De acordo com a condição de rolamento puro, é possível afirmar que o CIR do disco/cilindro coincide com o ponto de contato do mesmo com a superfície horizontal fixa:

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{P_D} = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{P_S} = \vec{0} \quad \therefore P_D \equiv \text{CIR} \quad \begin{array}{l} \text{- Condição válida para cada instante do movimento} \\ \text{- O CIR do disco varia com o movimento} \end{array}$$

- Fisicamente, a cada instante, todos os pontos do disco/cilindro realizam movimento de rotação pura em torno do ponto de contato (CIR).
- Em outras palavras, é como se o disco/cilindro “instantaneamente tombasse” em torno do ponto de contato.
- Portanto, o que permite o rolamento puro é a existência de uma **força de atrito estático** entre o disco/cilindro e a superfície na interface de contato que **impede a ocorrência do deslizamento**.



□ Movimento Plano

➤ Rolamento sem escorregamento (ou rolamento puro)

- A **velocidade do centro** do disco/cilindro é obtida diretamente pela expressão do campo de velocidades de corpo rígido:

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O = \overbrace{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{CIR}}^{= \vec{0}, \text{ pela definição de CIR}} + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^D \wedge (O - CIR) = -\omega \hat{k} \wedge R \hat{j} \quad \therefore \quad \boxed{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O = \omega R \hat{i}} \quad (13)$$

- A **aceleração do centro** do disco/cilindro é obtida derivando no tempo a equação acima, e considerando que o versor \hat{i} não muda de direção:

$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O = \frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{v}_O}{dt} = \dot{\omega} R \hat{i} \quad \therefore \quad \boxed{{}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O = \dot{\omega} R \hat{i}} \quad (14)$$

- Por fim, a **aceleração do CIR do disco/cilindro** é obtida pela expressão do campo de acelerações de corpo rígido:

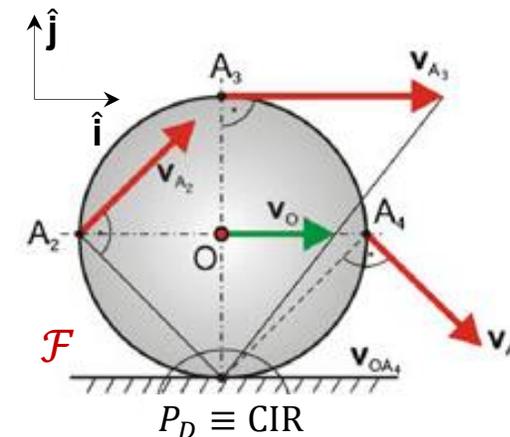
$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_{CIR} = {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{a}^B \wedge (CIR - O) + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^D \wedge [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^D \wedge (CIR - O)]$$

$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_{CIR} = \dot{\omega} R \hat{i} + (-\dot{\omega} \hat{k} \wedge -R \hat{j}) - \omega \hat{k} \wedge [-\omega \hat{k} \wedge -R \hat{j}] = \dot{\omega} R \hat{i} - \dot{\omega} R \hat{i} + \omega^2 R \hat{j} \quad \therefore \quad \boxed{{}^{\mathcal{F}}\vec{a}_{CIR} = \omega^2 R \hat{j}} \quad (15)$$

$$\boxed{\begin{aligned} {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{CIR} &= \vec{0} \\ {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_{CIR} &\neq \vec{0} \end{aligned}}$$



Centro instantâneo de rotação de campo de velocidades de uma roda de bicicleta. Fonte: [2]



Exercício (P2-Q2-2004)

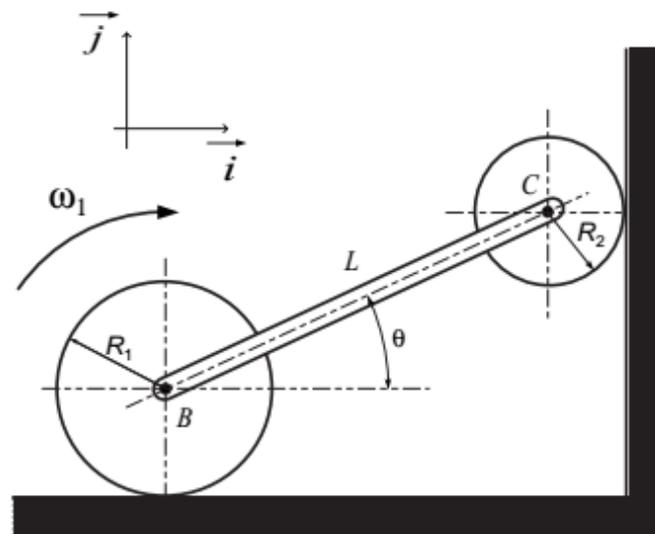


Figura 3: Sistema composto de uma barra AB e dois discos

Os discos de raios R_1 e R_2 rolam sem escorregar e o disco de raio R_2 está sempre em contato com a parede. É conhecida a velocidade angular ω_1 (constante) do disco de raio R_1 . Em função de ω_1 , θ , L , R_1 e R_2 , calcule:

- A velocidade \vec{v}_B do ponto B .
- A velocidade angular ω_{BC} da barra BC e a velocidade \vec{v}_C do ponto C .
- A velocidade angular ω_2 e a aceleração angular $\dot{\omega}_2$ do disco de raio R_2 .
- As acelerações \vec{a}_C do ponto C e \vec{a}_{CIR} do CIR do disco de raio R_2 .

Exercício (P2-Q2-2004)

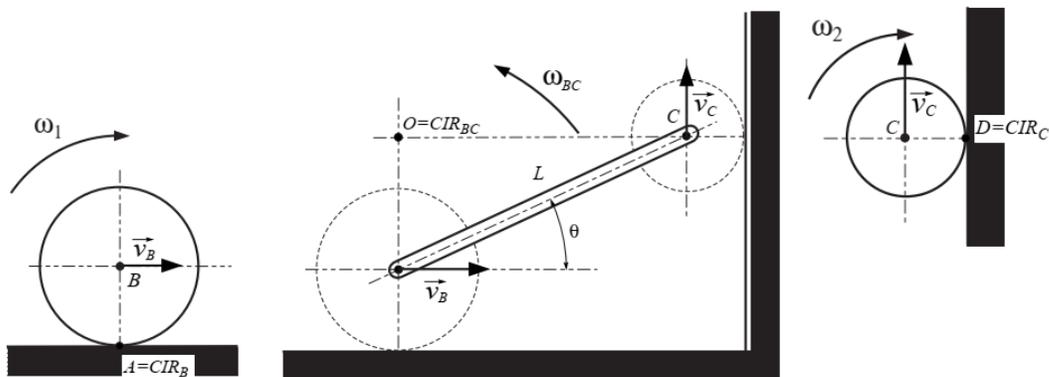


Figura 4: Movimento dos três sólidos

b) Barra AB

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge (C - B) \Rightarrow v_C \vec{j} = \omega_1 R_1 \vec{i} + \omega_{BC} \vec{k} \wedge L (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

$$\begin{cases} 0 = \omega_1 R_1 - \omega_{BC} L \sin \theta \\ v_C = \omega_{BC} L \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\omega_{BC} = \frac{\omega_1 R_1}{L \sin \theta}} \quad (0,5)$$

a) Disco B

$$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_A}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\omega}_1}_{-\omega_1 \vec{k}} \wedge \underbrace{(B - A)}_{R_1 \vec{j}} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \omega_1 R_1 \vec{i}} \quad (0,5)$$

$$\boxed{v_C = \frac{\omega_1 R_1 \cos \theta}{\sin \theta}} \quad (0,5)$$



□ Exercício (P2-Q2-2004)

c) Disco C

$$\vec{v}_C = \underbrace{\vec{v}_D}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\omega}_2}_{-\omega_2 \vec{k}} \wedge \underbrace{(C-D)}_{-R_2 \vec{i}} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1 \cos \theta}{R_2 \sin \theta}} \quad (0,5)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{-\omega_1 R_1 \dot{\theta}}{R_2 \sin^2 \theta}$$

como

$$\dot{\theta} = \omega_{BC} \Rightarrow \boxed{\dot{\omega}_2 = \frac{-\omega_1^2 R_1^2}{R_2 L \sin^3 \theta}} \quad (0,5)$$

d) Disco C

$$\boxed{\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{-\omega_1^2 R_1^2}{L \sin^3 \theta} \vec{j}} \quad (0,5)$$

e

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (D-C) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (D-C)]$$

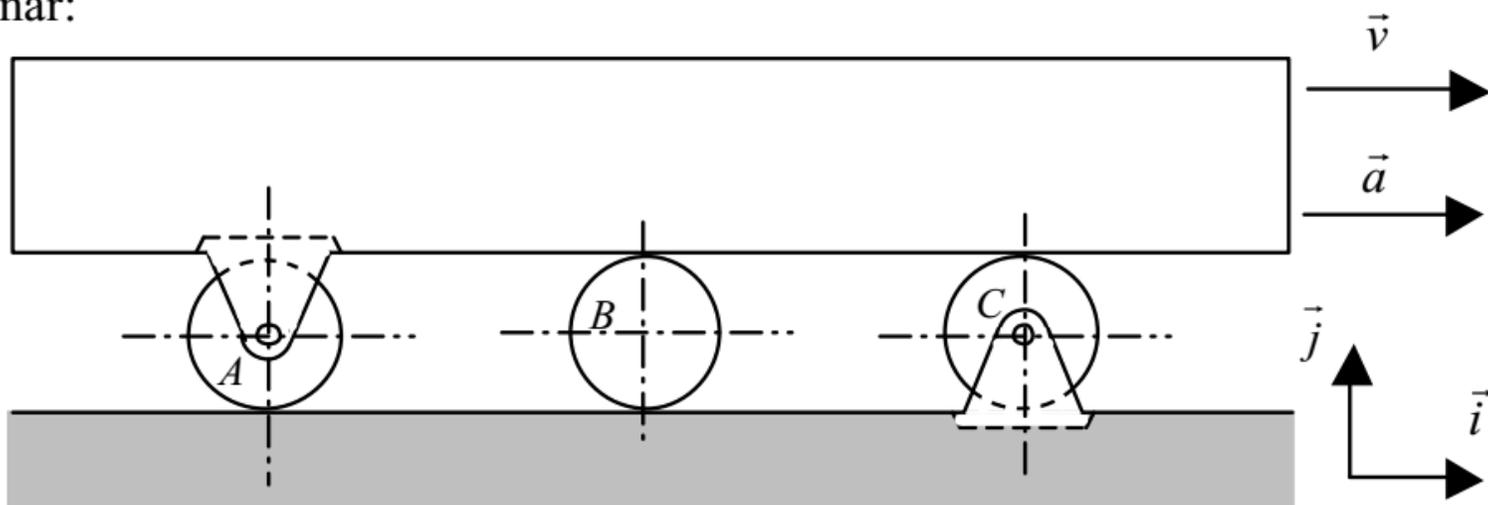
$$\vec{a}_D = \frac{-\omega_1^2 R_1^2}{L \sin^3 \theta} \vec{j} + \frac{\omega_1^2 R_1^2}{R_2 L \sin^3 \theta} \vec{k} \wedge R_2 \vec{i} + \frac{\omega_1 R_1 \cos \theta}{R_2 \sin \theta} \vec{k} \wedge \left[\frac{\omega_1 R_1 \cos \theta}{R_2 \sin \theta} \vec{k} \wedge R_2 \vec{i} \right]$$

$$\boxed{\vec{a}_D = -\frac{\omega_1^2 R_1^2 \cos^2 \theta}{R_2 \sin^2 \theta} \vec{i}} \quad (0,5)$$

Exercício (P2-Q1-2000)

(3,0 pontos) **Questão 1** - O vagonete da figura tem velocidade $v\vec{i}$ e aceleração $a\vec{i}$, e é sustentado por três discos de raio r . O disco B está em contato com o chão e o vagonete. Todos os discos rodam sem escorregar sobre as respectivas superfícies de contato. Determinar:

- O CIR dos discos A , B e C .
- Os vetores de rotação dos discos A , B e C .
- Os vetores acelerações angulares dos discos A , B e C .
- As acelerações dos pontos A , B e C , que são os centros geométricos dos discos A , B e C .





Exercício (P2-Q1-2000)

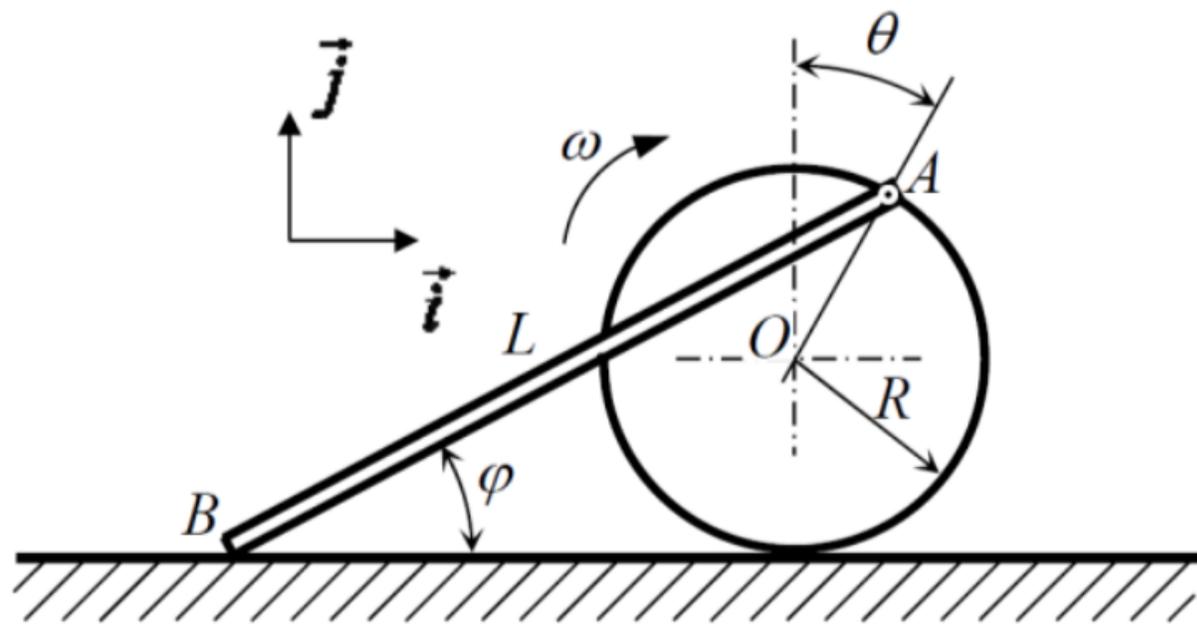
	Disco A	Disco B	Disco C
a)			
b)	$\left. \begin{aligned} \vec{v}_A &= v \vec{i} \\ \vec{v}_A &= \omega_A \vec{k} \times r \vec{j} = -\omega_A r \vec{i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\vec{\omega}_A = -\frac{v}{r} \vec{k}$	$\left. \begin{aligned} \vec{v}_D &= v \vec{i} \\ \vec{v}_D &= \omega_B \vec{k} \times 2r \vec{j} = -\omega_B 2r \vec{i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\vec{\omega}_B = -\frac{v}{2r} \vec{k}$	$\left. \begin{aligned} \vec{v}_E &= v \vec{i} \\ \vec{v}_E &= \omega_C \vec{k} \times r \vec{j} = -\omega_C r \vec{i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\vec{\omega}_C = -\frac{v}{r} \vec{k}$
c)	$\vec{\omega}_A = -\frac{v}{r} \vec{k} \Rightarrow$ $\dot{\vec{\omega}}_A = -\frac{a}{r} \vec{k}$	$\vec{\omega}_B = -\frac{v}{2r} \vec{k} \Rightarrow$ $\dot{\vec{\omega}}_B = -\frac{a}{2r} \vec{k}$	$\vec{\omega}_C = -\frac{v}{r} \vec{k} \Rightarrow$ $\dot{\vec{\omega}}_C = -\frac{a}{r} \vec{k}$
d)	$\vec{v}_A = v \vec{i} \Rightarrow$ $\vec{a}_A = a \vec{i}$	$\vec{v}_B = \omega_B \vec{k} \times r \vec{j} = \frac{v}{2r} r \vec{i} = \frac{v}{2} \vec{i} \Rightarrow$ $\vec{a}_B = \frac{a}{2} \vec{i}$	$\vec{v}_C = \vec{0} \text{ (constante) } \Rightarrow$ $\vec{a}_C = \vec{0}$

□ Exercício (P2–Q3–2014)

QUESTÃO 3 (3,5 pontos). A barra AB é articulada em A e o ponto B escorrega sobre o plano. O disco de centro O e raio R rola sem escorregar sobre o plano, com velocidade angular $\vec{\omega} = -\omega \vec{k}$ constante. Pede-se determinar:

- graficamente o CIR do disco e o da barra;
- a relação entre os ângulos φ e θ ;
- o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra;
- a velocidade vetorial do ponto B ;
- a aceleração vetorial do ponto A ;
- os valores de θ para os quais a barra tem um ato de movimento de translação.

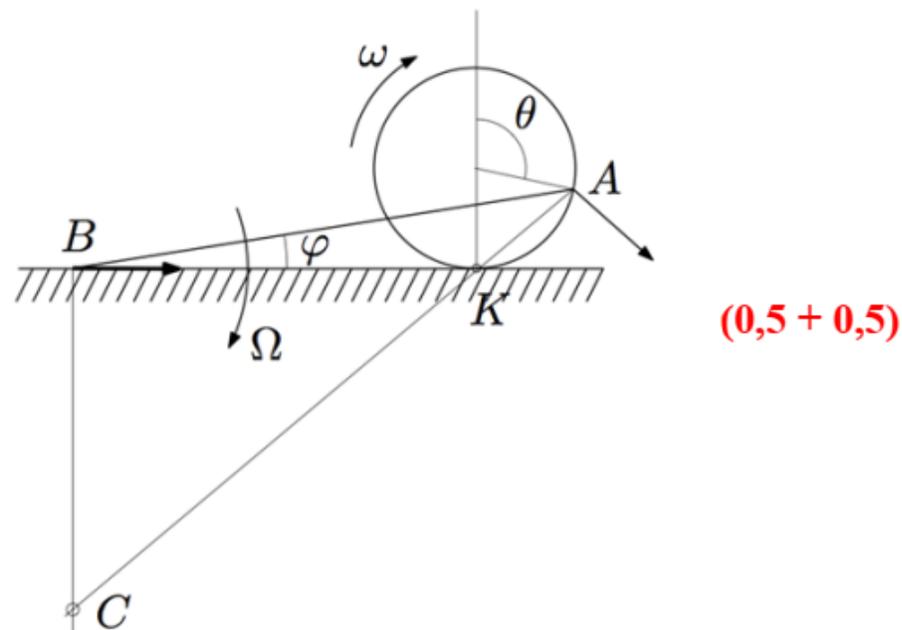
Obs.: utilize os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ indicados.





Exercício (P2-Q3-2014)

- a) graficamente o CIR do disco e o da barra: (0,5 ponto para cada CIR)
O ponto C da figura abaixo indica o CIR da barra.
O CIR do disco é o ponto de contato K.



- b) a relação entre os ângulos φ e θ :
A relação entre $\sin\varphi$ e $\cos\theta$ é encontrada por inspeção da figura.

$$\boxed{L\sin\varphi = R + R\cos\theta} \quad (0,5)$$



□ Exercício (P2–Q3–2014)

c) o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra:

Pela figura, $\vec{\Omega} = -\dot{\theta}\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$. Derivamos a relação geométrica obtida no item b, para obter

$$L\dot{\varphi}\cos\varphi = -\dot{\theta}R\sin\theta$$

Também da figura, $\omega = +\dot{\theta}$. Daí:
$$\dot{\varphi} = \frac{-\omega R\sin\theta}{L\cos\varphi}, \vec{\Omega} = \frac{-\omega R\sin\theta}{L\cos\varphi}\vec{k} \quad (0,5)$$

d) a velocidade vetorial do ponto B:

A velocidade do ponto B ($\vec{v}_B = v_B\vec{i}$) pode ser encontrada usando-se a propriedade fundamental dos sólidos. Note que a direção e sentido do vetor A – B é $(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j})$.

$$\vec{v}_A \circ (\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) = v_B\vec{i} \circ (\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \quad (1)$$

A velocidade do ponto A é calculada pela Fórmula Fundamental da Cinemática (Poisson):

$$\vec{v}_A = -\omega\vec{k} \wedge (A - K) \Rightarrow \vec{v}_A = -R\omega\sin\theta\vec{j} + R\omega(1 + \cos\theta)\vec{i} \quad (2)$$

De (1) e (2), obtemos:

$$v_B = R(1 + \cos\theta)\omega - R\omega\sin\theta\tan\varphi$$

Daí:
$$\vec{v}_B = R\omega[(1 + \cos\theta) - \sin\theta\tan\varphi]\vec{i} \quad (0,5)$$



□ Exercício (P2–Q3–2014)

e) a aceleração vetorial do ponto A;

Como a aceleração do ponto O é nula e a velocidade angular do disco é constante, a aceleração do ponto A é obtida simplesmente por

$$\vec{a}_A = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)] = -\omega^2 R(\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) \quad (0,5)$$

f) os valores de θ para os quais a barra tem um ato de movimento de translação.

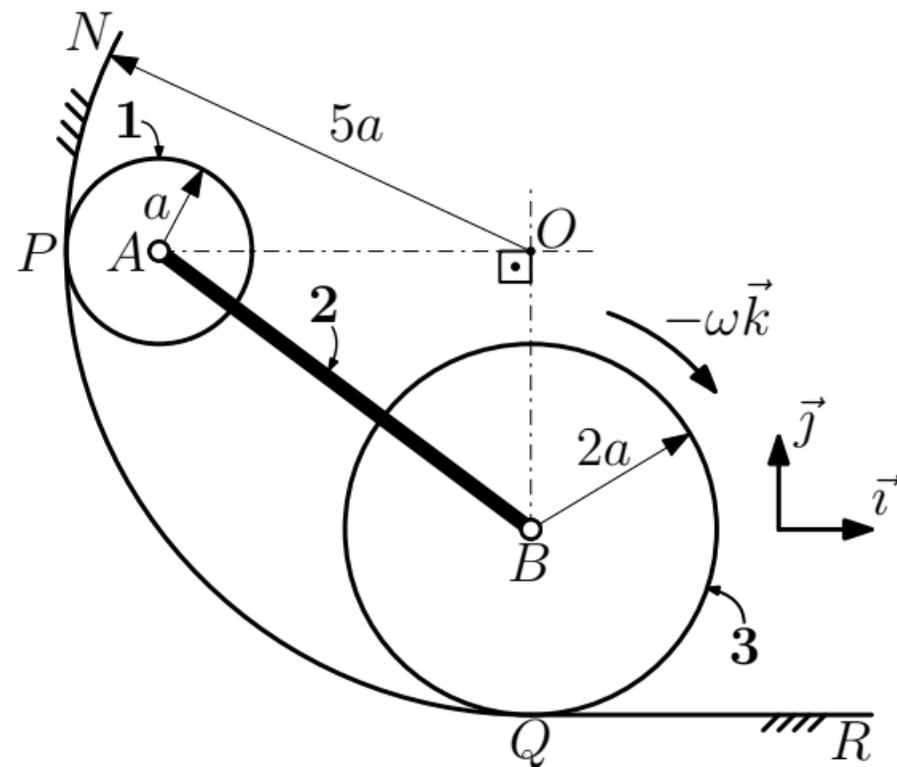
Para translação, basta encontrar $\theta \in [0, 2\pi[$ que satisfaz $\vec{v}_A = \vec{v}_B$.

Imediatamente vemos que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. (0,5)

□ P2-Q2-2018

Questão 2 (3,5 pontos). Considere o sistema da figura, em que dois discos rígidos (corpos **1** e **3**), de raios a e $2a$, estão articulados, em seus respectivos centros A e B , a uma barra rígida (corpo **2**). Os discos *rodam sem escorregar* sobre uma pista fixa $NPQR$. Nesta pista, o trecho circular NPQ , de centro O e raio $5a$, tangencia o trecho retilíneo QR , paralelo ao versor \vec{i} . Sabendo que a velocidade angular do disco de centro B é $\vec{\omega}_3 = -\omega\vec{k}$, com $\omega > 0$ constante, pede-se, *para a configuração indicada na figura*, em que a linha PA está paralela ao versor \vec{i} e a linha QB está paralela ao versor \vec{j} :

- Determinar a posição do centro instantâneo de rotação da barra, indicando claramente a construção gráfica utilizada.
- As velocidades angulares $\vec{\omega}_1$, do disco de centro A , e $\vec{\omega}_2$, da barra.
- As componentes intrínsecas da aceleração \vec{a}_A , do ponto A .
- A aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}_2$, da barra.



□ P2-Q2-2018

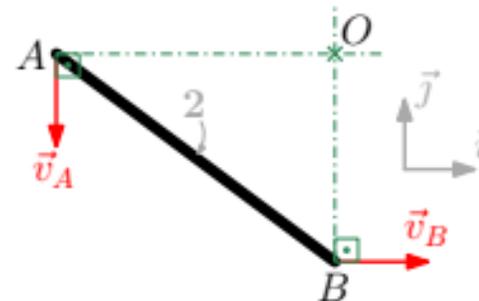
- a) Da condição de rolamento sem escorregamento, no disco de centro B , $\vec{v}_Q = \vec{0}$ e:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_Q + \vec{\omega}_3 \wedge (B - Q) = -\omega \vec{k} \wedge (2a\vec{j}) = 2a\omega\vec{i}$$

Para o disco de centro A , denote-se $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$. Da condição de rolamento sem escorregamento, $\vec{v}_P = \vec{0}$ e:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega}_1 \wedge (A - P) = \omega_1\vec{k} \wedge (a\vec{i}) = a\omega_1\vec{j}$$

Conhecidas as direções de \vec{v}_A e \vec{v}_B , determina-se que o centro instantâneo de rotação da barra é o ponto O , conforme indicado na figura (1,0).



- b) A partir da construção gráfica acima, pode-se afirmar que:

$$|\vec{\omega}_2| = \frac{|\vec{v}_A|}{|A - O|} = \frac{|\vec{v}_B|}{|B - O|} \Leftrightarrow |\vec{\omega}_2| = \frac{|\vec{\omega}_1|}{4} = \frac{2\omega}{3}$$

Assim, considerando os sentidos de \vec{v}_A e \vec{v}_B :

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{8\omega}{3}\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_2 = +\frac{2\omega}{3}\vec{k} \quad (1,0)$$

- c) Sabe-se que $\vec{v}_A = -\frac{8}{3}a\omega\vec{j}$, de onde se pode afirmar que:

$$v_A = |\vec{v}_A| = \frac{8}{3}a\omega \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_A = \frac{\vec{v}_A}{v_A} = -\vec{j}$$



□ P2-Q2-2018

Ainda, sabendo que o ponto A descreve um arco de circunferência plano, de centro O e raio $\rho_A = 4a$, tem-se:

$$\vec{n}_A = \frac{O - A}{|O - A|} = \vec{i} \quad \text{e} \quad a_{An} = \frac{v_A^2}{\rho_A} = \frac{(8a\omega/3)^2}{4a} = \frac{16}{9}a\omega^2 \quad (0,5)$$

Assim:

$$\vec{a}_A = a_{At}\vec{r}_A + a_{An}\vec{n}_A = -a_{At}\vec{j} + \frac{16}{9}a\omega^2\vec{i}$$

Sabe-se que o ponto B realiza um movimento retilíneo com $\vec{v}_B = 2a\omega\vec{i}$ constante, então $\vec{a}_B = \vec{0}$. Portanto, adotando a notação $\vec{\omega}_2 = \alpha_2\vec{k}$ e aplicando a equação do campo de acelerações para a barra:

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (A - B) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (A - B)] \\ \frac{16}{9}a\omega^2\vec{i} - a_{At}\vec{j} &= \alpha_2\vec{k} \wedge (-4a\vec{i} + 3a\vec{j}) + \frac{2\omega}{3}\vec{k} \wedge \left[\frac{2\omega}{3}\vec{k} \wedge (-4a\vec{i} + 3a\vec{j}) \right] \\ \frac{16}{9}a\omega^2\vec{i} - a_{At}\vec{j} &= \left(\frac{16}{9}a\omega^2 - 3a\alpha_2 \right) \vec{i} + \left(-\frac{4}{3}a\omega^2 - 4a\alpha_2 \right) \vec{j} \end{aligned}$$

De onde se obtêm $\alpha_2 = 0$ e:

$$a_{At} = \frac{4}{3}a\omega^2 \quad (0,5)$$

- d) A partir da solução do sistema de equações do item anterior, $\vec{\omega}_2 = \alpha_2\vec{k} = \vec{0}$ (0,5). *Observação:* Na ausência de uma expressão geral para o vetor velocidade angular $\vec{\omega}_2$ não é possível obter o valor instantâneo $\vec{\omega}_2 = \vec{0}$ associado à referida configuração do sistema a partir do cálculo de uma derivada temporal.



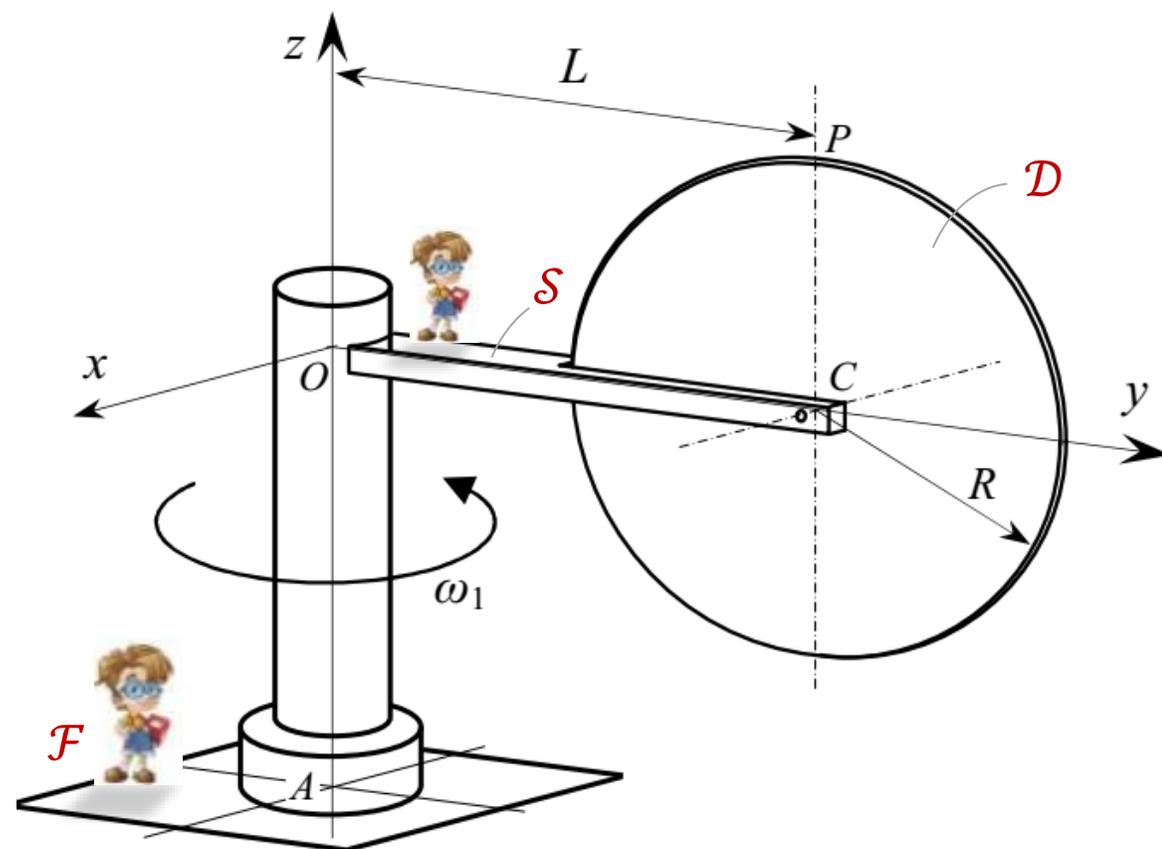
Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Referenciais e Sistemas de Coordenadas
3. Definição de Corpo Rígido
4. Tipos de Movimentos de Corpo Rígido
5. Propriedade Fundamental da Cinemática de Corpos Rígidos
6. Diferenciação de Vetor e Referenciais
7. Diferenciação de Vetor de Módulo Constante e Velocidade Angular
8. Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial
9. Velocidade e Aceleração de Corpos Rígidos
10. Eixo Helicoidal Instantâneo
11. Movimento Plano
- 12. Composição de Movimentos**

□ Composição de Movimentos

➤ Motivação

- Inicialmente, o suporte \mathcal{S} e o disco \mathcal{D} constituem um **corpo rígido único** que se move em relação a \mathcal{F} . Ou seja, \mathcal{D} **não** rotaciona em relação a \mathcal{S} .
- O sistema de coordenadas $Oxyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ é solidário a \mathcal{S} .
- A velocidade e aceleração do ponto $P \in \mathcal{D}$ em relação a \mathcal{F} podem ser calculadas diretamente utilizando as expressões dos campos de velocidade e aceleração de corpo rígido já apresentadas (Eqs. 7-8).
- **Se o disco passa a rotacionar em relação a \mathcal{S} , como a velocidade e aceleração do ponto $P \in \mathcal{D}$ em relação a \mathcal{F} podem ser calculadas?**

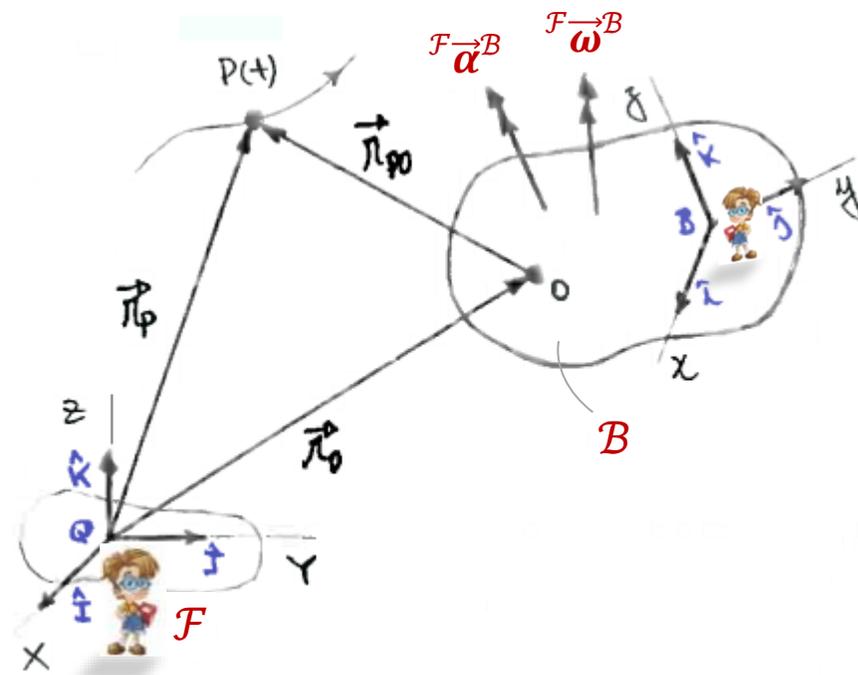


□ Composição de Movimentos

- Considere um corpo rígido \mathcal{B} que se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular ${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}$ e aceleração angular ${}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^{\mathcal{B}}$ em relação a um referencial fixo \mathcal{F} .
- Seja os sistemas de coordenadas $\mathbb{F} = \{Q; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ e $\mathbb{B} = \{B; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ solidários aos referenciais \mathcal{F} e \mathcal{B} , respectivamente, e um ponto $O \in \mathcal{B}$ arbitrário.
- O vetor posição de uma partícula $P(t)$ que se move no espaço, **independentemente** de \mathcal{F} e \mathcal{B} , pode ser escrito como segue:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_O + \vec{r}_{PO} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \vec{r}_P &= \text{vetor posição de } P(t) \text{ expresso em } \mathbb{F} \\ \vec{r}_O &= \text{vetor posição de } O \in \mathcal{F} \text{ expresso em } \mathbb{F} \\ \vec{r}_{PO} &= \text{vetor posição de } P(t) \text{ em relação } O \text{ expresso em } \mathbb{B} \end{cases}$$



❑ Composição de Movimentos

➤ Composição de Velocidades

- Derivando a Eq. 16 no tempo em relação ao referencial \mathcal{F} , tem-se:

$$\underbrace{\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_P}{dt}}_{= {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P} = \underbrace{\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_O}{dt}}_{= {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O} + \frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_{PO}}{dt}$$

Como \vec{r}_P e \vec{r}_O são, convenientemente, expressos em \mathbb{F} , então: $\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_P}{dt} = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P$ e $\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_O}{dt} = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O$.

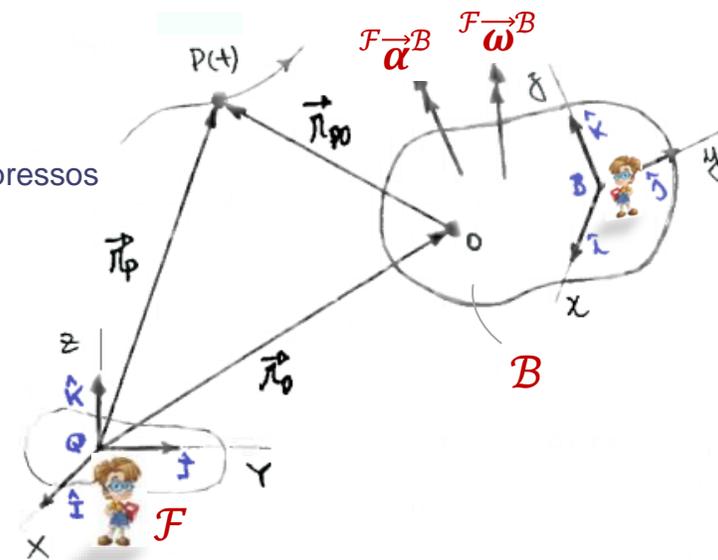
- Como \vec{r}_{PO} é expresso em \mathbb{B} , o segundo termo da direita pode ser calculado utilizando o Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial (Eq. 5):

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{r}_{PO}}{dt} = \underbrace{\frac{{}^{\mathcal{B}}d\vec{r}_{PO}}{dt}}_{= {}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P} + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \vec{r}_{PO} = {}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \vec{r}_{PO} \quad (17)$$

$\frac{{}^{\mathcal{B}}d\vec{r}_{PO}}{dt} \neq \vec{0}$, pois a partícula $P(t)$ **pode se mover** em relação a \mathcal{B} .

- Finalmente:

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P = {}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P + {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \vec{r}_{PO} \quad \longrightarrow \quad \boxed{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P = {}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P + {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P - O)} \quad (18)$$



Composição de Movimentos

Composição de Velocidades

$$\mathcal{F}\vec{v}_P = \mathcal{B}\vec{v}_P + \mathcal{F}\vec{v}_O + \mathcal{F}\vec{\omega}^B \wedge (P - O) \quad (18)$$

Velocidade Absoluta

Velocidade de $P(t)$ em relação a um observador solidário a \mathcal{F} .

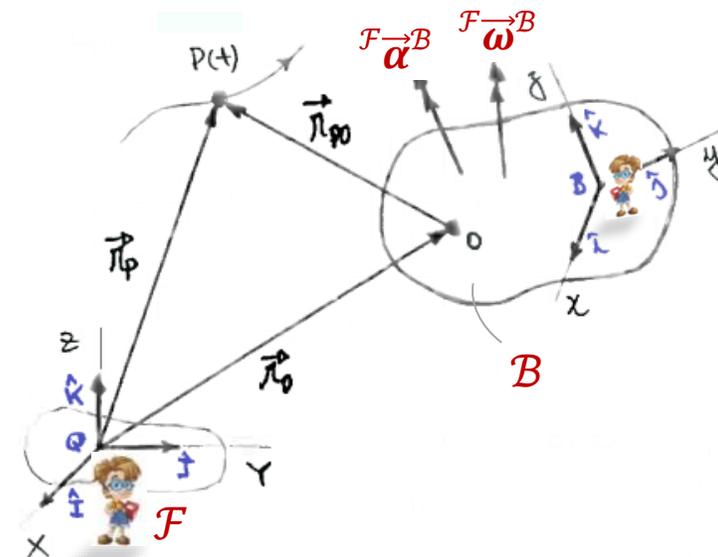
Velocidade Relativa

Velocidade de $P(t)$ em relação a um observador solidário a \mathcal{B} .

Velocidade de Arrastamento

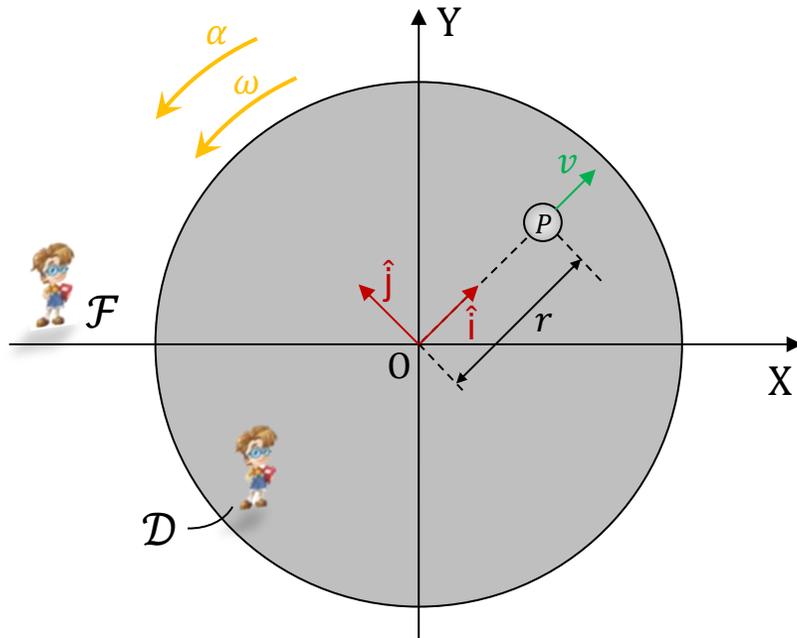
Velocidade de $P(t)$ em relação a um observador solidário a \mathcal{F} , como se $P(t)$ estivesse rigidamente fixo a \mathcal{B} .

$$\vec{v}_{P_{abs}} = \vec{v}_{P_{rel}} + \vec{v}_{P_{arr}}$$



□ Composição de Movimentos

➤ Exercício



- Disco \mathcal{D} rotaciona com velocidade e aceleração angulares ω e α em relação ao referencial fixo \mathcal{F} .
- Partícula P se move com velocidade $v\hat{i}$ em relação ao disco \mathcal{D} .
- Calcule a **velocidade** e aceleração absolutas de P .

Referenciais: Fixo (\mathcal{F}) e disco (\mathcal{D})

Sistemas de coordenadas: $\mathbb{F} = \{O; \hat{i}, \hat{j}\}$, solidário a \mathcal{F}
 $\mathbb{B} = \{O; \hat{i}, \hat{j}\}$, solidário a \mathcal{D}

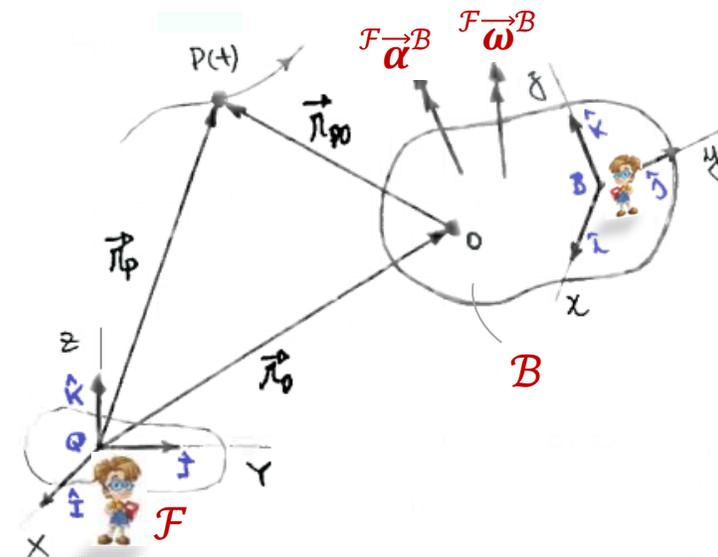
□ Composição de Movimentos

➤ Composição de Acelerações

- Derivando a Eq. 18 no tempo em relação ao referencial \mathcal{F} , tem-se:

$$\underbrace{\frac{{}^{\mathcal{F}}d}{{dt}}({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P)}_{= {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_P} = \underbrace{\frac{{}^{\mathcal{F}}d}{{dt}}({}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P)}_{(I)} + \underbrace{\frac{{}^{\mathcal{F}}d}{{dt}}({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O)}_{= {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O} + \underbrace{\frac{{}^{\mathcal{F}}d}{{dt}}({}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge \vec{r}_{PO})}_{(II)} \quad (19)$$

- $\frac{{}^{\mathcal{F}}d}{{dt}}({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P) = {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_P$ e $\frac{{}^{\mathcal{F}}d}{{dt}}({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O) = {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O$, pois ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_P$ e ${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O$ são expressos em \mathcal{F} .



- Aplicando o Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial (Eq. 5) ao termo (I), tem-se:

$$(I) \quad \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{{dt}}({}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P) = \underbrace{\frac{{}^{\mathcal{B}}d}{{dt}}({}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P)}_{= {}^{\mathcal{B}}\vec{a}_P} + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge {}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P = {}^{\mathcal{B}}\vec{a}_P + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge {}^{\mathcal{B}}\vec{v}_P \quad (20)$$

□ Composição de Movimentos

➤ Composição de Acelerações

- Desenvolvendo o termo (II), tem-se:

$$(III) \quad \frac{{}^F d}{dt}({}^F \vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO}) = \frac{{}^F d}{dt}({}^F \vec{\omega}^B) \wedge \vec{r}_{PO} + {}^F \vec{\omega}^B \wedge \frac{{}^F d}{dt}(\vec{r}_{PO})$$

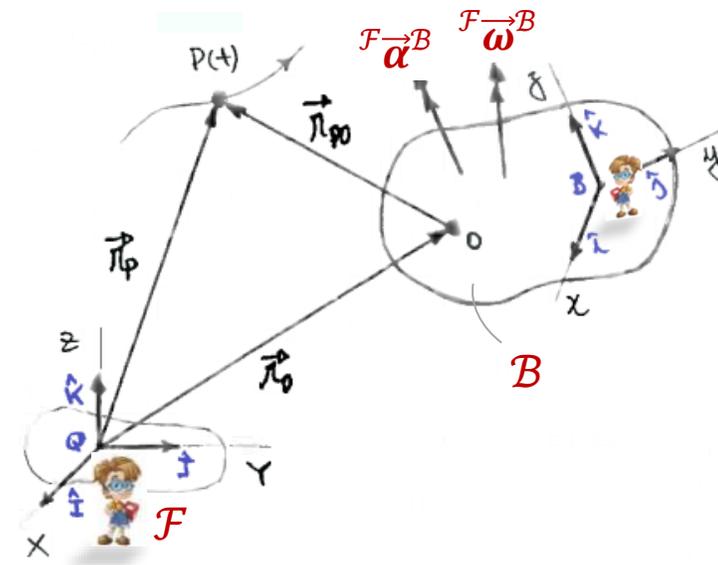
- Aplicando o Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial (Eq. 5) às derivadas remanescentes, tem-se:

$$\frac{{}^F d}{dt}({}^F \vec{\omega}^B) = \underbrace{{}^B \frac{d}{dt}({}^F \vec{\omega}^B)}_{= {}^F \vec{\alpha}^B} + \underbrace{{}^F \vec{\omega}^B \wedge {}^F \vec{\omega}^B}_{= \vec{0}} = {}^F \vec{\alpha}^B$$

$$\frac{{}^F d}{dt}(\vec{r}_{PO}) = {}^B \vec{v}_P + {}^F \vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO} \quad (\text{ver Eq. 17})$$

- Substituindo as derivadas acima no termo (II), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{{}^F d}{dt}({}^F \vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO}) &= {}^F \vec{\alpha}^B \wedge \vec{r}_{PO} + {}^F \vec{\omega}^B \wedge [{}^B \vec{v}_P + {}^F \vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO}] = {}^F \vec{\alpha}^B \wedge \vec{r}_{PO} + {}^F \vec{\omega}^B \wedge {}^B \vec{v}_P + {}^F \vec{\omega}^B \wedge [{}^F \vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO}] \\ &= {}^F \vec{\alpha}^B \wedge \vec{r}_{PO} + {}^F \vec{\omega}^B \wedge {}^B \vec{v}_P + {}^F \vec{\omega}^B \wedge [{}^F \vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO}] \quad (21) \end{aligned}$$



❑ Composição de Movimentos

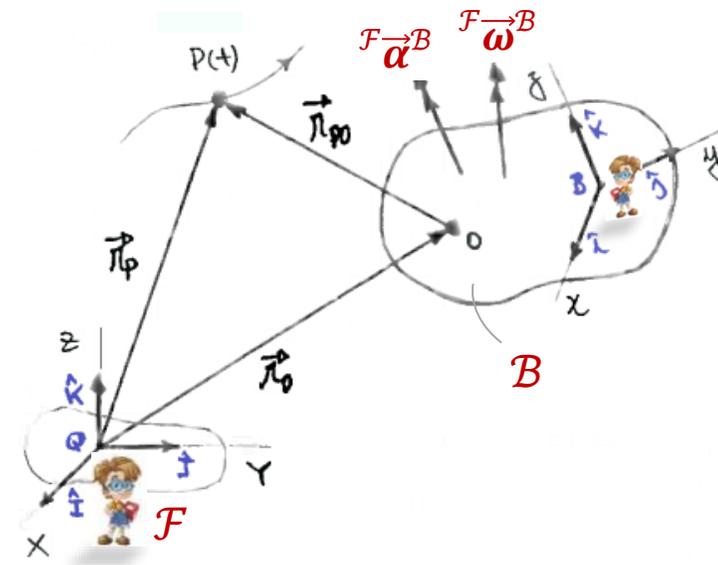
➤ Composição de Acelerações

- Finalmente, substituindo as equações (20) e (21) em (19), tem-se:

$${}^F\vec{a}_P = {}^B\vec{a}_P + {}^F\vec{a}_O + {}^F\vec{\alpha}^B \wedge \vec{r}_{PO} + {}^F\vec{\omega}^B \wedge [{}^F\vec{\omega}^B \wedge \vec{r}_{PO}] + 2({}^F\vec{\omega}^B \wedge {}^B\vec{v}_P)$$



$${}^F\vec{a}_P = {}^B\vec{a}_P + {}^F\vec{a}_O + {}^F\vec{\alpha}^B \wedge (P - O) + {}^F\vec{\omega}^B \wedge [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P - O)] + 2({}^F\vec{\omega}^B \wedge {}^B\vec{v}_P) \quad (22)$$

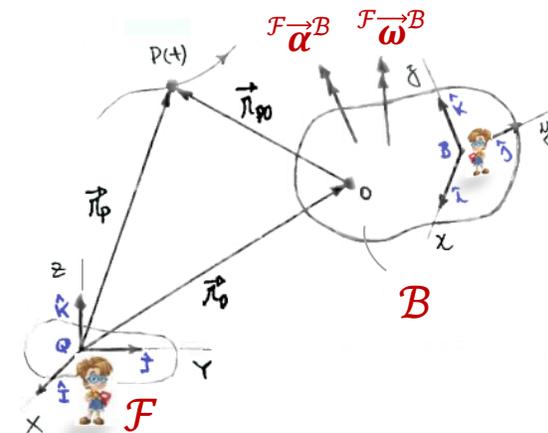


➤ Observações:

- As Eq. (18-22) são **equações vetoriais**, e, como tal, **invariantes com a base de vetores** utilizada para expressar algebricamente os vetores envolvidos.
- Dessa forma, para efeito de cálculo, os vetores que compõem essas equações podem ser expressos em qualquer base vetorial conveniente.
- A velocidade e aceleração de um ponto com relação a um dado referencial podem ser **representadas** (ou expressas) em uma base vetorial fixa em **outro** referencial.

Composição de Movimentos

Composição de Acelerações



$${}^F\vec{a}_P = {}^B\vec{a}_P + {}^F\vec{a}_O + {}^F\vec{\alpha}^B \wedge (P - O) + {}^F\vec{\omega}^B \wedge [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P - O)] + 2({}^F\vec{\omega}^B \wedge {}^B\vec{v}_P) \quad (22)$$

Aceleração Absoluta
Aceleração de $P(t)$ em relação a um **observador solidário a \mathcal{F}**

Aceleração Relativa
Aceleração de $P(t)$ em relação a um **observador solidário a \mathcal{B}**

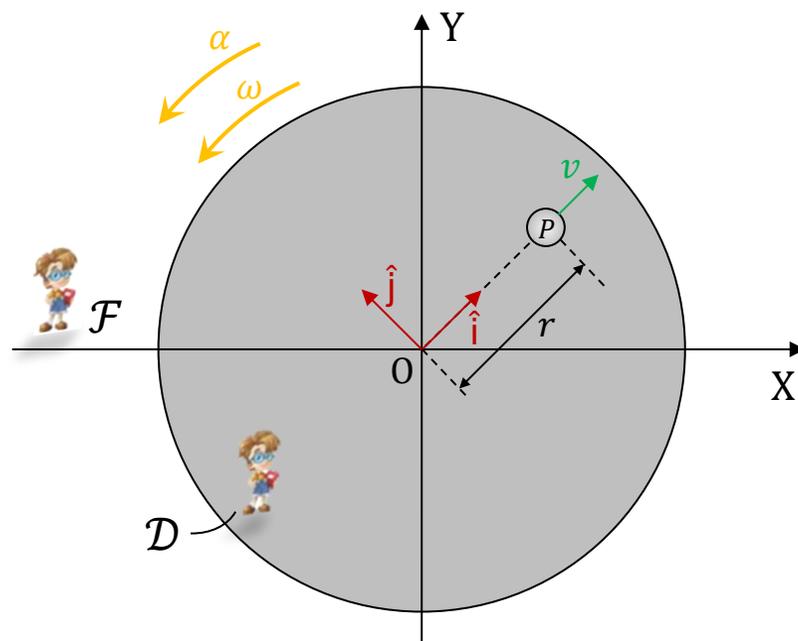
Aceleração de Arrastamento
Aceleração de $P(t)$ em relação a um observador solidário a \mathcal{F} , **como se $P(t)$ estivesse rigidamente fixo a \mathcal{B}**

Aceleração de Coriolis
Componente da aceleração de $P(t)$ associada à variação da magnitude e direção de $(P - O)$ em relação a \mathcal{F} .

$$\vec{a}_{P_{abs}} = \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{arr}} + \vec{a}_{P_{Cor}}$$

□ Composição de Movimentos

➤ Exercício



- Disco \mathcal{D} rotaciona com velocidade e aceleração angulares ω e α em relação ao referencial fixo \mathcal{F} .
- Partícula P se move com velocidade $v\hat{\mathbf{i}}$ em relação ao disco \mathcal{D} .
- Calcule a velocidade e **aceleração** absolutas de P .

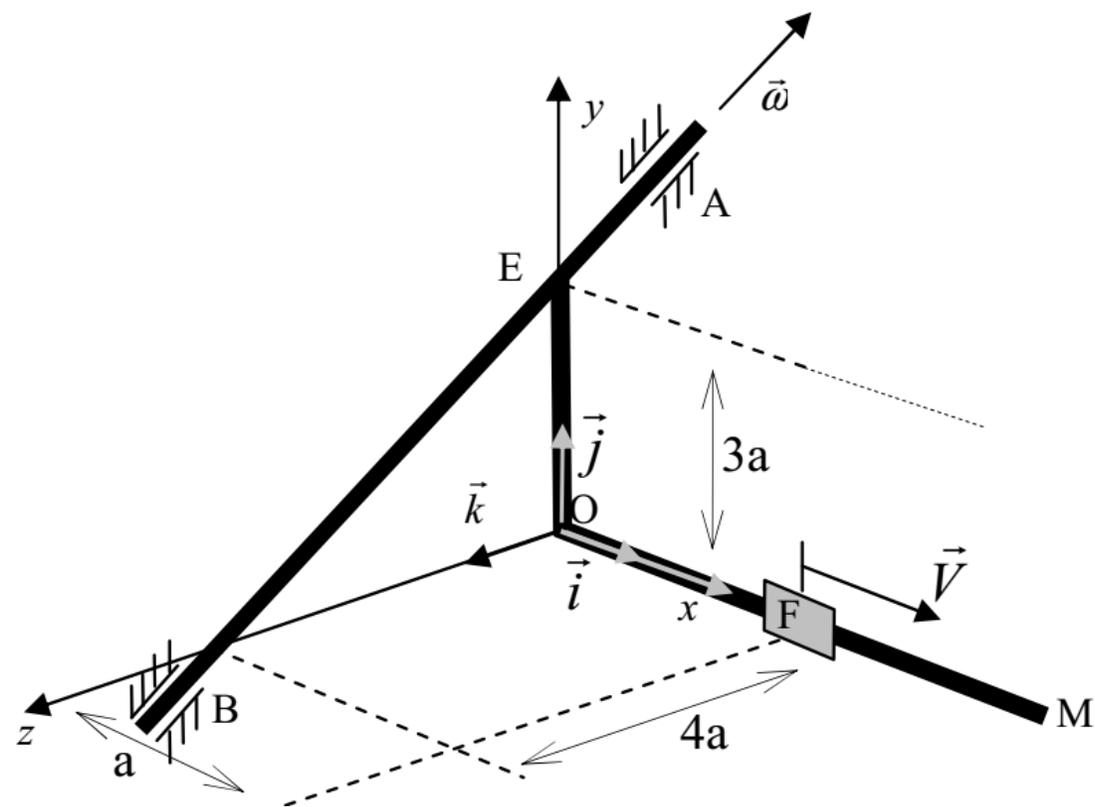
Referenciais: Fixo (\mathcal{F}) e disco (\mathcal{D})

Sistemas de coordenadas: $\mathbb{F} = \{O; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$, solidário a \mathcal{F}
 $\mathbb{B} = \{O; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$, solidário a \mathcal{D}

Exercício (P2-Q3-2012Reof)

QUESTÃO 3 (3,0 pontos): Uma peça rígida é formada pelas barras AB, EO e OM, sendo sustentada por mancais em A e B. No instante mostrado, é conhecido o módulo da velocidade angular, ω (constante), e sua orientação espacial, conforme a figura. No mesmo instante, a luva F desliza em relação à barra OM com velocidade de módulo constante V . São conhecidas todas as dimensões indicadas. Utilizando o sistema de coordenadas Oxyz solidário à peça pedem-se, para este instante:

- expressar o vetor velocidade angular, $\vec{\omega}$, em função dos parâmetros fornecidos;
- as velocidades absoluta, relativa e de arrastamento de F;
- as acelerações relativa, de arrastamento e de Coriolis de F.





□ Exercício (P2–Q3–2012Reof)

(a) 0,5 pontos

De acordo com a figura,

$$\vec{\omega} = \frac{1}{5} \omega (3\vec{j} - 4\vec{k})$$

(b) 1 ponto

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{F,r} + \vec{v}_{F,a}$$

$$\vec{v}_{F,r} = V\vec{i};$$

$$\vec{v}_{F,a} = \vec{v}_E + \vec{\omega} \wedge (F - E) = \vec{0} + \frac{1}{5} \omega (3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge [a\vec{i} - 3a\vec{j}]$$

$$\vec{v}_{F,a} = -\frac{\omega a}{5} (12\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$$

(c) 1,5 pontos

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{F,r} + \vec{a}_{F,a} + \vec{a}_{F,C}$$

$$\vec{a}_{F,r} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{F,a} = \vec{a}_E + \dot{\vec{\omega}} \wedge (F - E) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (F - E)]$$

$$\vec{a}_{F,a} = \vec{0} + \vec{0} + \frac{1}{5} \omega (3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge \left[\frac{1}{5} \omega (3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge (a\vec{i} - 3a\vec{j}) \right]$$

$$\vec{a}_{F,a} = \frac{1}{5} \omega (3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge \left[-\frac{\omega a}{5} (12\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) \right] = \frac{\omega^2 a}{25} [-25\vec{i} + 48\vec{j} + 36\vec{k}]$$

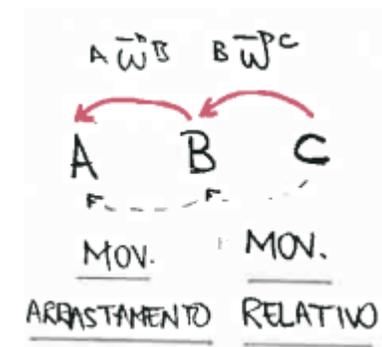
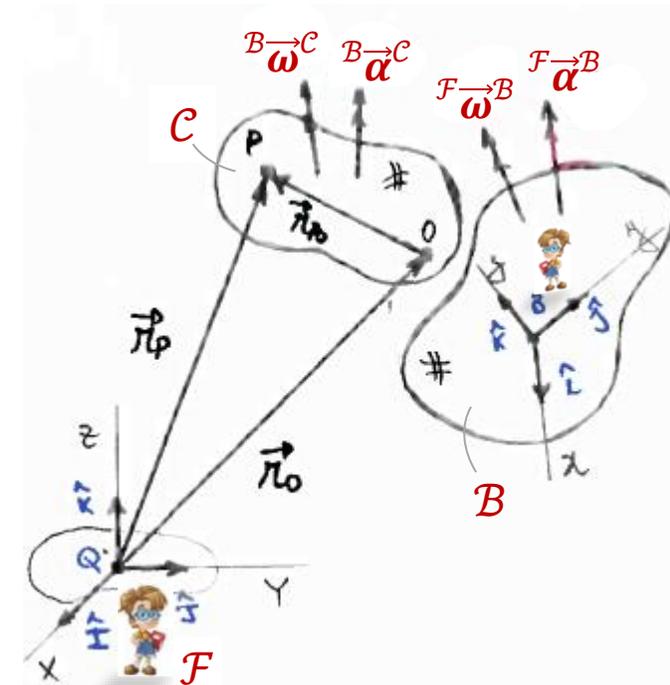
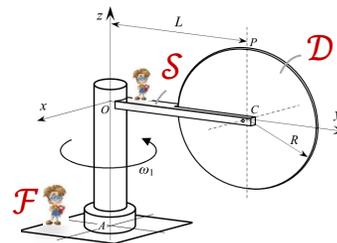
$$\vec{a}_{F,C} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{F,r} = 2\frac{1}{5} \omega (3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge V\vec{i}$$

$$\vec{a}_{F,C} = \frac{2\omega V}{5} (-4\vec{j} - 3\vec{k})$$

❑ Composição de Movimentos

➤ Composição envolvendo dois corpos rígidos

- Considere agora que **P** é um ponto rigidamente fixo a um outro corpo rígido **C** que se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular ${}^B\vec{\omega}^C$ e aceleração angular ${}^B\vec{\alpha}^C$ em relação ao corpo rígido **B**.
- O corpo rígido **B**, por sua vez, se move arbitrariamente no espaço com velocidade angular ${}^F\vec{\omega}^B$ e aceleração angular ${}^F\vec{\alpha}^B$ em relação ao referencial fixo **F**.
- O vetor $\vec{r}_{PO} = (P - O)$ é um **vetor fixo a C**, sendo que o ponto **O** não precisa, necessariamente, pertencer a ambos os corpos. Note que, em geral, ${}^F\vec{\omega}^C$ e ${}^F\vec{\alpha}^C$ **não são conhecidos a priori**.
- Nestas condições, o corpo rígido **B** é denominado **referencial móvel** (ou intermediário) e, em geral, **todas as grandezas vetoriais são expressas no sistema de referência $\mathbb{B} = \{B; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ solidário a B**.
- Os campos de velocidades e acelerações podem ser calculados utilizando as Eqs. (18) e (22), com **atenção especial para as definições de movimento relativo e de arrastamento**.



❑ Composição de Movimentos

➤ Composição envolvendo dois corpos rígidos

- **Movimento relativo:** movimento de P em relação a B .

$$\vec{v}_{P_{rel}} = {}^B\vec{v}_P = {}^B\vec{v}_O + {}^B\vec{\omega}^C \wedge (P - O) \quad \boxed{O \in C}$$

$$\vec{a}_{P_{rel}} = {}^B\vec{a}_P = {}^B\vec{a}_O + {}^B\vec{\alpha}^C \wedge (P - O) + {}^B\vec{\omega}^C \wedge [{}^B\vec{\omega}^C \wedge (P - O)]$$

- **Movimento de arrastamento:** movimento de P em relação a \mathcal{F} , como se B e C fossem um corpo rígido único que se movesse em relação a \mathcal{F} .

$$\vec{v}_{P_{arr}} = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{O'} + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (P - O') \quad \boxed{O' \in B}$$

$$\vec{a}_{P_{arr}} = {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_{O'} + {}^{\mathcal{F}}\vec{\alpha}^B \wedge (P - O') + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (P - O')]$$

- **“Acoplamento” dos movimentos:**

$$\vec{a}_{P_{Cor}} = 2({}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge {}^B\vec{v}_P) = 2(\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P_{rel}})$$

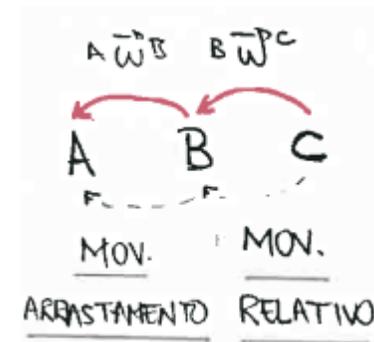
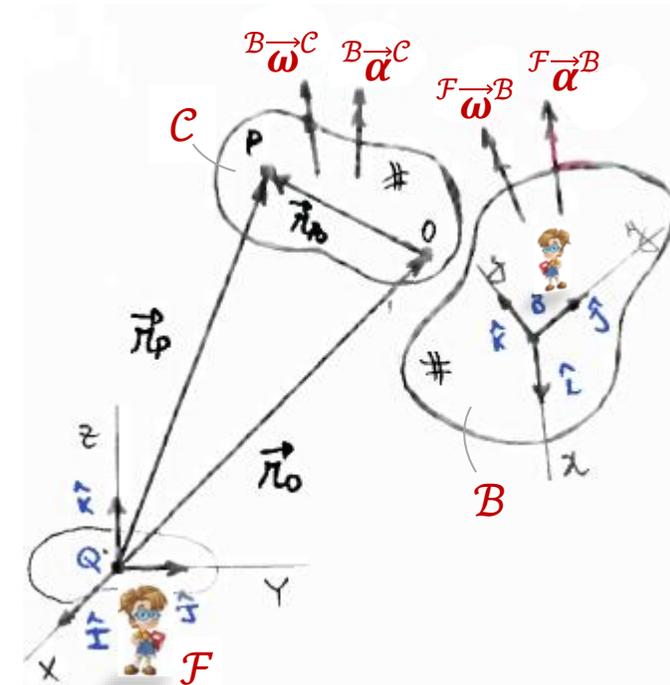
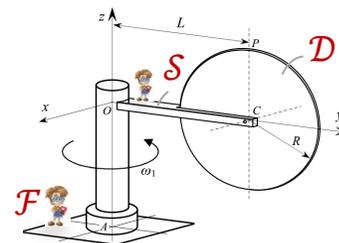
No caso de $O = O'$,
atenção que:

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O \neq {}^B\vec{v}_O$$

$${}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O \neq {}^B\vec{a}_O$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{P_{abs}} &= \vec{v}_{P_{rel}} + \vec{v}_{P_{arr}} \\ \vec{a}_{P_{abs}} &= \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{arr}} + \vec{a}_{P_{Cor}} \end{aligned}$$

(23)



❑ Composição de Movimentos

➤ Composição envolvendo dois corpos rígidos

▪ Composição de velocidades angulares

$$\boxed{\overset{F}{\vec{\omega}}^C = \overset{B}{\vec{\omega}}^C + \overset{F}{\vec{\omega}}^B} \quad (24)$$

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr}$$

▪ Composição de acelerações angulares

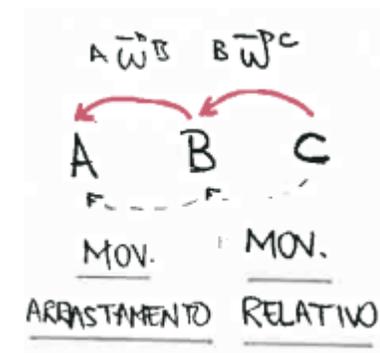
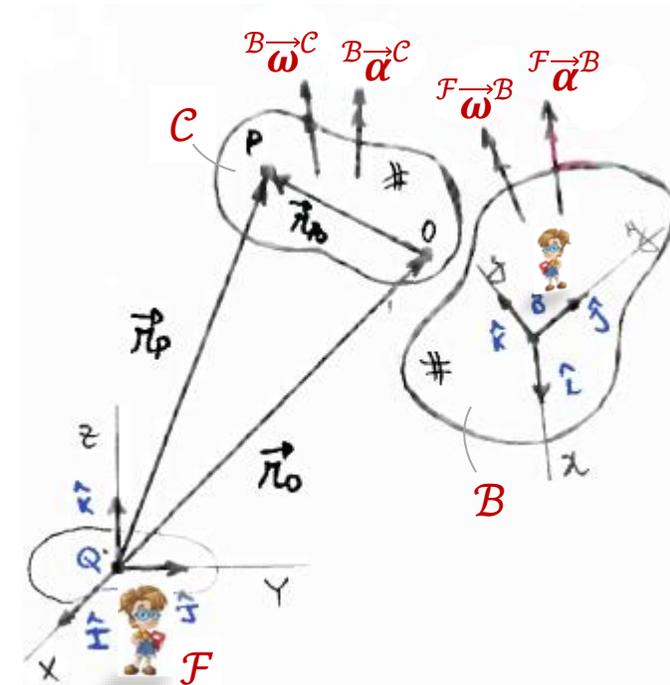
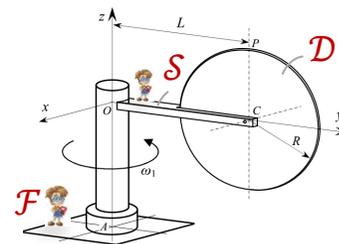
$$\overset{F}{\vec{\alpha}}^C = \overset{F}{\frac{d}{dt}}(\overset{F}{\vec{\omega}}^C) = \overset{F}{\frac{d}{dt}}(\overset{B}{\vec{\omega}}^C) + \overset{F}{\frac{d}{dt}}(\overset{F}{\vec{\omega}}^B)$$

$$= \left[\overset{B}{\frac{d}{dt}}(\overset{B}{\vec{\omega}}^C) + \overset{F}{\vec{\omega}}^B \wedge \overset{B}{\vec{\omega}}^C \right] + \left[\overset{F}{\frac{d}{dt}}(\overset{F}{\vec{\omega}}^B) + \overset{F}{\vec{\omega}}^B \wedge \overset{F}{\vec{\omega}}^B \right]$$

$$= \overset{B}{\vec{\alpha}}^C + \overset{F}{\vec{\alpha}}^B + \vec{0}$$

$$\boxed{\overset{F}{\vec{\alpha}}^C = \overset{B}{\vec{\alpha}}^C + \overset{F}{\vec{\alpha}}^B + \overset{F}{\vec{\omega}}^B \wedge \overset{B}{\vec{\omega}}^C} \quad (25)$$

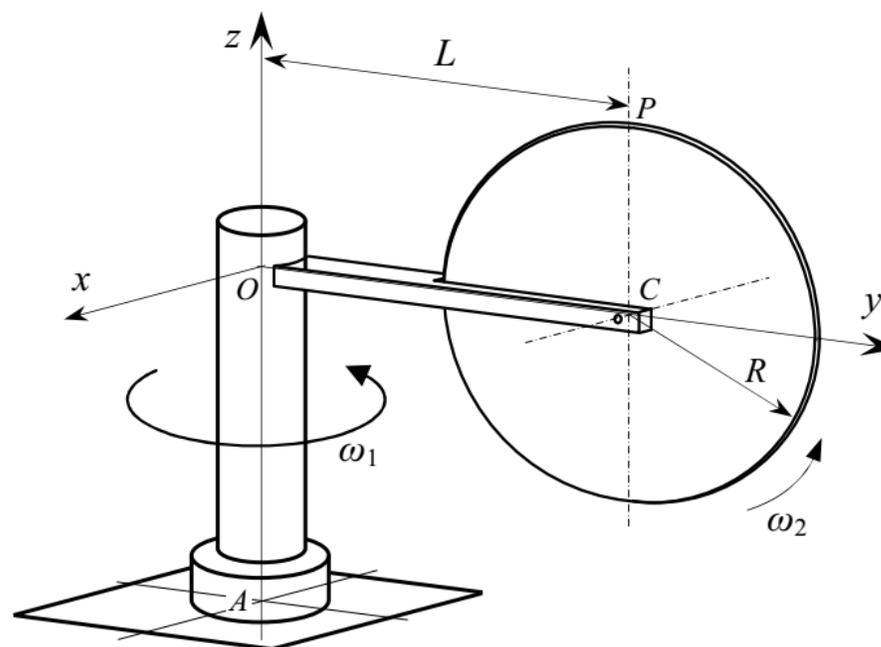
$$\vec{\alpha}_{abs} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$$



Exercício (P2–Q3–2012)

QUESTÃO 3 (3,0 pontos) – No mecanismo mostrado na figura, o segmento \overline{OA} é fixo, e a barra OC , de comprimento L e perpendicular a \overline{OA} , possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo no solo. O disco, de centro C e raio R , contido no plano Oyz , possui um vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i}$ em relação à barra OC , sendo ω_2 constante. O sistema de coordenadas $Oxyz$ é fixo na barra OC . Considerando a barra OC como referencial móvel, e o instante mostrado na figura, quando \overline{CP} é paralelo ao eixo Oz , determine:

- as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$) do ponto P .
- as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$) do ponto P .
- o vetor de rotação absoluto ($\vec{\omega}_{D,abs}$) e o vetor aceleração angular absoluto ($\vec{\alpha}_{D,abs}$) do disco.





Exercício (P2-Q3-2012)

a)

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - C) = \vec{0} + \omega_2 \vec{i} \wedge R \vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} = -\omega_2 R \vec{j}}$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge (L \vec{j} + R \vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\omega_1 L \vec{i}}$$

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,abs} = -\omega_1 L \vec{i} - \omega_2 R \vec{j}} \quad (0,5)$$

b)

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P - C) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P - C)]$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_2 \vec{i} \wedge [\omega_2 \vec{i} \wedge R \vec{k}] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\omega_2^2 R \vec{k}}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)]$$

$$\vec{a}_{P,a} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge [\omega_1 \vec{k} \wedge (L \vec{j} + R \vec{k})] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,a} = -\omega_1^2 L \vec{j}}$$

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor}$$

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2 \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2 \omega_1 \vec{k} \wedge (-\omega_2 R \vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,Cor} = 2 \omega_1 \omega_2 R \vec{i}} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,abs} = 2 \omega_1 \omega_2 R \vec{i} - \omega_1^2 L \vec{j} - \omega_2^2 R \vec{k}}$$

c)

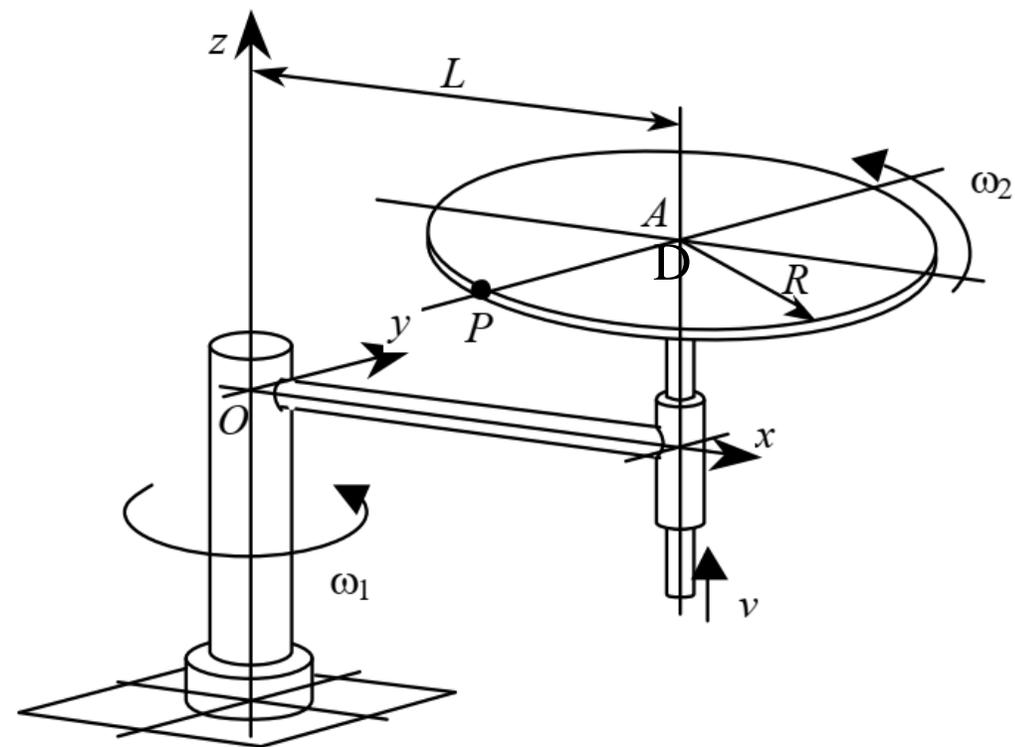
$$\vec{\omega}_{D,abs} = \vec{\omega}_{D,rel} + \vec{\omega}_{D,arr} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{D,abs} = \omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{i}} \quad (0,5)$$

$$\vec{\alpha}_{D,abs} = \vec{\alpha}_{D,rel} + \vec{\alpha}_{D,arr} + \vec{\omega}_{D,arr} \wedge \vec{\omega}_{D,rel} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge \omega_2 \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_{D,abs} = \omega_1 \omega_2 \vec{j}} \quad (0,5)$$

Exercício (P2-Q3-2006)

3ª Questão (4,0 pontos) No mecanismo mostrado na figura, o ponto O é fixo, e a barra OD , de comprimento L , possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo. O disco de centro A e raio R possui vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$ e vetor aceleração angular $\vec{\alpha}_2 = \alpha_2 \vec{k}$ em relação à barra OD . O ponto A possui velocidade $\vec{v} = v \vec{k}$ (constante) em relação à barra OD . O sistema de coordenadas $Oxyz$ é fixo na barra OD e o vetor $(P-A)$ é paralelo ao eixo Oy . Considerando a barra OD como referencial móvel, determine, para o instante da figura,

- as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P ;
- as acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P ;
- o vetor de rotação absoluto e o vetor aceleração angular absoluto do disco de centro A .





Exercício (P2-Q3-2006)

Solução:

a) Velocidade relativa do ponto P: $\vec{v}_{P_{rel}} = \vec{v}_{A_{rel}} + \vec{\omega}_2 \wedge (P - A)$, onde $\vec{v}_{A_{rel}} = v\vec{k}$
 $\Rightarrow \vec{v}_{P_{rel}} = \omega_2 R \vec{i} + v\vec{k}$ (0,5)

Velocidade de arrastamento do ponto P:

Definindo $(A - D) = z\vec{k}$, e observando que $z\vec{k} \parallel \vec{\omega}_1$,

$$\vec{v}_{P_{arr}} = \vec{v}_{O_{arr}} + \vec{\omega}_1 \wedge (P - O), \text{ onde } \vec{v}_{O_{arr}} = \vec{0} \text{ e } (P - O) = L\vec{i} - R\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_{P_{arr}} = \omega_1 R \vec{i} + \omega_1 L \vec{j} \quad (0,5)$$

Velocidade absoluta do ponto P: $\vec{v}_{P_{abs}} = \vec{v}_{P_{arr}} + \vec{v}_{P_{rel}} \Rightarrow \vec{v}_{P_{abs}} = (\omega_1 + \omega_2)R\vec{i} + \omega_1 L\vec{j} + v\vec{k}$ (0,5)

b) Aceleração relativa do ponto P: $\vec{a}_{P_{rel}} = \vec{a}_{A_{rel}} + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (P - A) + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge (P - A))$,
 onde $\vec{a}_{A_{rel}} = \vec{0}$ e $\dot{\vec{\omega}}_2 = \alpha_2 \vec{k} \Rightarrow \vec{a}_{P_{rel}} = \alpha_2 R \vec{i} + \omega_2^2 R \vec{j}$ (0,5)

Aceleração de arrastamento do ponto P:

$$\vec{a}_{P_{arr}} = \vec{a}_{O_{arr}} + \dot{\vec{\omega}}_1 \wedge (P - O) + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge (P - O)), \text{ onde } \vec{a}_{O_{arr}} = \vec{0} \text{ e } \dot{\vec{\omega}}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{P_{arr}} = -\omega_1^2 L \vec{i} + \omega_1^2 R \vec{j} \quad (0,5)$$

Aceleração absoluta do ponto P:

$$\vec{a}_{P_{abs}} = \vec{a}_{P_{arr}} + \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{Cor}}, \text{ onde } \vec{a}_{P_{Cor}} = 2\vec{\omega}_{Arr} \wedge \vec{V}_{P_{rel}} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge (\omega_2 R \vec{i} + v\vec{k}) = 2\omega_1 \omega_2 R \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{P_{abs}} = (\alpha_2 R - \omega_1^2 L) \vec{i} + (\omega_1^2 R + \omega_2^2 R + 2\omega_1 \omega_2 R) \vec{j} \quad (0,5)$$

c) Vetor de rotação absoluto do disco com centro em A:

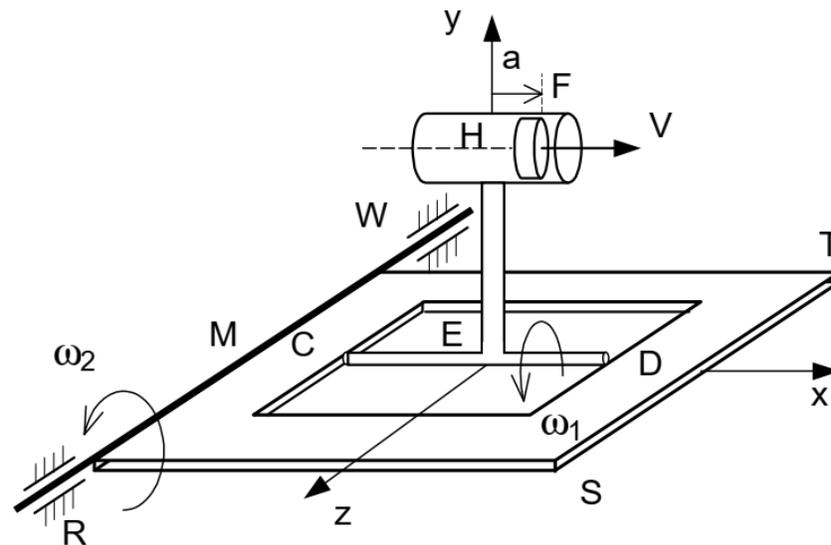
$$\vec{\omega}_{Abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{Arr} \Rightarrow \vec{\omega}_{Abs} = (\omega_1 + \omega_2) \vec{k} \quad (0,5)$$

Vetor aceleração angular absoluto do disco com centro em A:

$$\dot{\vec{\omega}}_{Abs} = \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \dot{\vec{\omega}}_{Arr} + \vec{\omega}_R, \text{ onde } \vec{\omega}_R = \vec{\omega}_{Arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}}_{Abs} = \dot{\vec{\omega}}_{rel} = \alpha_2 \vec{k} \quad (0,5)$$

Exercício (P2-Q2-2009)

2ª Questão (3,5 pontos) A placa $RSTW$ gira em torno do eixo RW com vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ de módulo constante. Sustentado por mancais solidários à placa em C e D , o eixo CE possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1$ de módulo constante em relação a placa. A barra EH é soldada ao eixo CE e sustenta, em H , um tubo paralelo ao eixo CE . No interior do tubo o êmbolo F de um cilindro hidráulico desloca-se com velocidade de módulo V , constante em relação ao tubo. Determinar, para o instante mostrado na figura e representando os vetores na base vetorial solidária a placa $RSTW$:



- O vetor rotação absoluta $\vec{\Omega}$ da peça $CDEH$;
 - O vetor aceleração rotacional absoluta $\dot{\vec{\Omega}}$ da peça $CDEH$;
 - O vetor velocidade absoluta do ponto F do êmbolo;
 - O vetor aceleração absoluta do ponto F do êmbolo;
- Dados: $\overline{ME} = 5a$; $\overline{EH} = 3a$; $(F - H) = a\vec{i}$

Exercício (P2-Q2-2009)

Resolução da 2ª Questão

Utilizando composição de movimento, sendo a placa o referencial móvel:

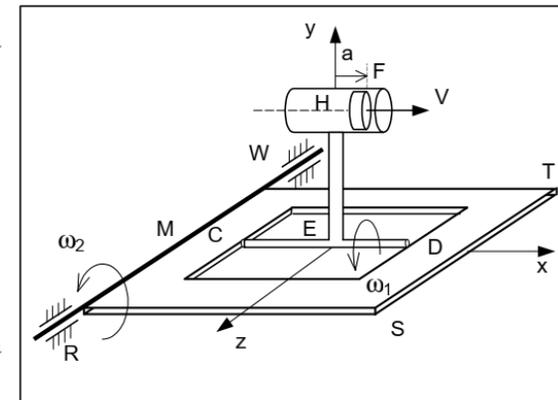
$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_2 \vec{k} + \omega_1 \vec{i} \quad (0,5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\Omega}} &= \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} \\ \dot{\vec{\Omega}} &= \vec{0} + \vec{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge \omega_1 \vec{i} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\Omega}} = \omega_1 \omega_2 \vec{j}} \quad (1,0) \end{aligned}$$

Utilizando composição de movimento, sendo a peça CEDH o referencial móvel:

$$\begin{aligned} \vec{v}_F &= \vec{v}_{F,arr} + \vec{v}_{F,rel} \\ \vec{v}_{F,arr} &= \vec{v}_M + \vec{\Omega} \wedge (F - M) = \vec{0} + (\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}) \wedge (6a \vec{i} + 3a \vec{j}) = 3a\omega_1 \vec{k} + 6a\omega_2 \vec{j} - 3a\omega_2 \vec{i} \\ \vec{v}_{F,rel} &= v \vec{i} \\ \boxed{\vec{v}_F} &= (v - 3a\omega_2) \vec{i} + 6a\omega_2 \vec{j} + 3a\omega_1 \vec{k} \quad (1,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{F,arr} &= \vec{a}_M + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (F - M) + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (F - M)] \\ \vec{a}_{F,arr} &= \vec{0} + \omega_1 \omega_2 \vec{j} \wedge (6a \vec{i} + 3a \vec{j}) + (\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}) \wedge [(\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}) \wedge (6a \vec{i} + 3a \vec{j})] \\ \vec{a}_{F,arr} &= -6a\omega_1 \omega_2 \vec{k} + (\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}) \wedge [3a\omega_1 \vec{k} + 6a\omega_2 \vec{j} - 3a\omega_2 \vec{i}] \\ \vec{a}_{F,arr} &= -6a\omega_1 \omega_2 \vec{k} + (-3a\omega_1^2 \vec{j} + 6a\omega_1 \omega_2 \vec{k} - 6a\omega_2^2 \vec{i} - 3a\omega_2^2 \vec{j}) \\ \vec{a}_{F,arr} &= -6a\omega_2^2 \vec{i} - 3a(\omega_1^2 + \omega_2^2) \vec{j} \\ \vec{a}_{F,rel} &= \vec{0} \\ \vec{a}_{F,cor} &= 2(\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}) \wedge v \vec{i} = 2\omega_2 v \vec{j} \\ \boxed{\vec{a}_F} &= -6a\omega_2^2 \vec{i} + (2\omega_2 v - 3a\omega_1^2 - 3a\omega_2^2) \vec{j} \quad (1,0) \end{aligned}$$





□ Referências

- [1] Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Dynamics**, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.
- [2] Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 2 Dynamics**, 14th edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2016.
- [3] Tenenbaum, R. A. **Fundamentals of Applied Dynamics** (additional material), Springer-Verlag New York, Inc. 2004.