PME 3100 – Mecânica I

Cinemática da Partícula

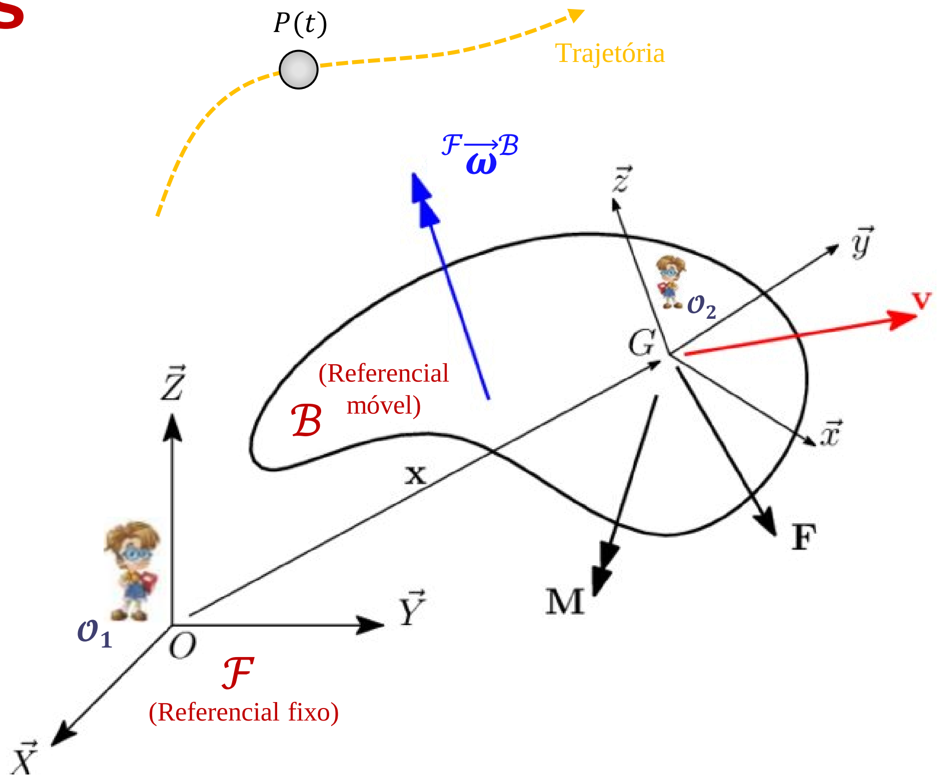
Prof. Francisco J. Profito
fprofito@usp.br

Conteúdo

Conteúdo

Referenciais e Sistemas de Coordenadas

- **Cinemática**: descrição **geométrica** do movimento e independente das causas do movimento.
- **Referencial:** objeto rígido a partir do qual eventos físicos (*e.g.* movimento de uma partícula no espaço) são observados, "percebidos" ou descritos. Notação: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, etc.
- **Sistema de Coordenadas:** ferramenta analítica utilizada para **representar a descrição** de eventos físicos (*e.g.* movimento de uma partícula no espaço) a partir de um dado referencial.
  - Um dado sistema de coordenadas é **fixo a um único** referencial
  - Definição de sistema de coordenadas:
    - Origem (*e.g.*, G); ponto pertencente a um dado referencial;
    - Eixos coordenados (*e.g.*, Gx, Gy, Gz);
    - Base de vetores alinhados aos eixos coordenados (*e.g.*, $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$);
    - Notação: $\mathbb{B} = \{G; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$
- Referencial $\neq$ Sistema de coordenadas



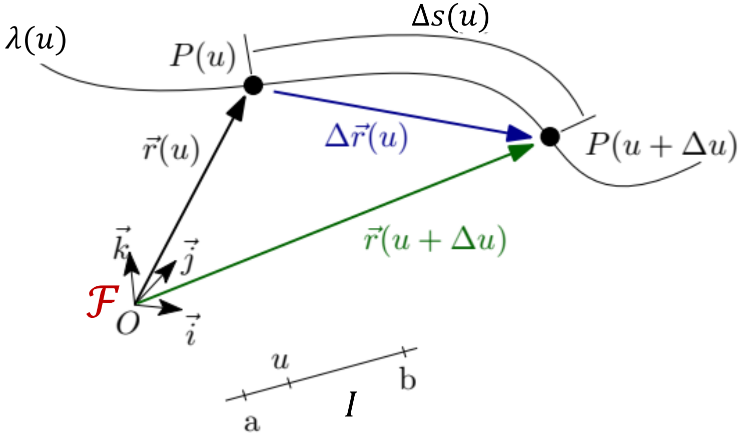
- ${}^{\mathcal{F}}\vec{\boldsymbol{v}}_P$ e ${}^{\mathcal{F}}\vec{\boldsymbol{a}}_P$: velocidade e aceleração do ponto P em relação a $\mathcal{F}$, isto é, a velocidade e aceleração de P **medidas** por um observador **fixo** ao referencial $\mathcal{F}$.
- A velocidade e aceleração de um ponto em relação a um dado referencial pode ser **representada** (*ou expressa)* em um sistema de coordenadas fixo em **outro** referencial.

Conteúdo

❑ Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

- Geometria diferencial é a "generalização" da geometria analítica baseada na aplicação dos conceitos de cálculo diferencial e integral para a análise de curvas, superfícies e volumes de formas geométricas genéricas descritas a partir de equações matemática no espaço Euclidiano tridimensional.

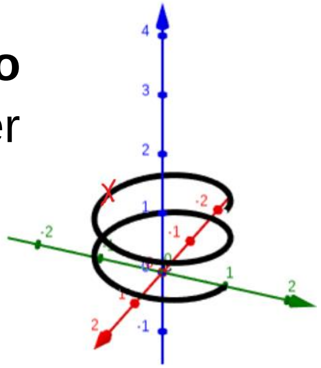
- Uma curva parametrizada é definida como $\lambda(u){:}\,I \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde I é um intervalo não vazio de números reais e $\mathbb{R}^3$ é o espaço Euclidiano tridimensional de pontos, tal que a cada valor de $u \in I$ associa-se um ponto $\mathrm{P}(u) \in \mathbb{R}^3$.



- O lugar geométrico dos sucessivos pontos $\mathrm{P}(u)$, quando u percorre I, é a **trajetória** (ou curva regular) parametrizada $\lambda(u)$. O parâmetro u também é denominado variável de parametrização da curva $\lambda(u)$.

- Dado um sistema de coordenadas cartesianas $\mathbb{S} = \{\mathrm{O}; \hat{\mathrm{i}}, \hat{\mathrm{j}}, \hat{\mathrm{k}}\}$ **solidário** a um referencial $\mathcal{F}$, cada ponto $\mathrm{P}(u)$ da curva parametrizada pode ser localizado pela **função vetorial**:

$$\boxed{\vec{r}(u) = (\mathrm{P}(u) - \mathrm{O}) = x(u)\hat{\mathrm{i}} + y(u)\hat{\mathrm{j}} + z(u)\hat{\mathrm{k}}} \quad (1)$$

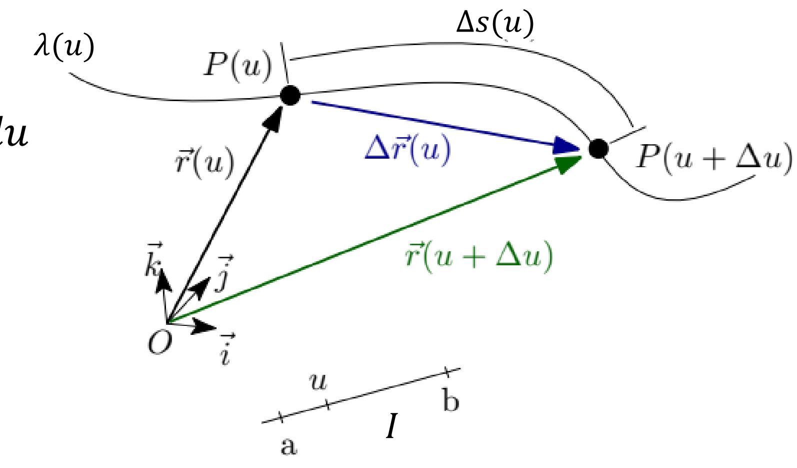


Trecho de uma montanha russa com trajetória horizontal helicoidal. Fonte [2].

Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

- **<u>Comprimento de arco</u>**: o comprimento de arco de uma curva parametrizada $\lambda(u)$ no intervalo $I = [a, b]$, é dado por:

$$\Delta u \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta s \to \|\Delta\vec{r}(u)\| \quad \underline{\text{No limite}}: \begin{cases} ds = \|d\vec{r}(u)\| \\ \vec{r}\,'(u) = \dfrac{d\vec{r}(u)}{du} \Rightarrow \|d\vec{r}(u)\| = \|\vec{r}\,'(u)\|du \end{cases}$$



$$\boxed{s\Big|_a^b = \int_a^b \|\vec{r}\,'(u)\|du \quad \Longrightarrow \quad s(u) = \int_{u_0}^{u} \|\vec{r}\,'(v)\|dv} \qquad (2)$$

- Uma dada curva $\lambda(u)$ pode ser parametrizada em função do seu comprimento de arco $s(u)$, também denominado **abscissa curvilínea**. Neste caso, u é um parâmetro implícito da curva:

$$s = f(u) \to u = f^{-1}(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{r}(u) = \vec{r}\big(f^{-1}(s)\big) \equiv \vec{r}(s)} \qquad (3)$$

Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

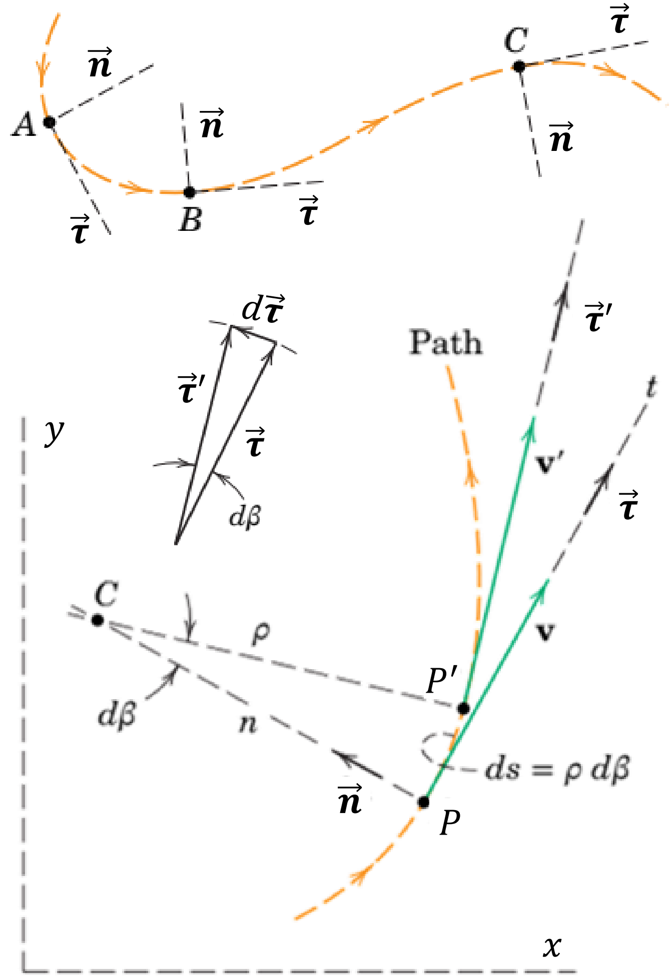
- **<u>Triedro de Frenet-Serret</u>**: base ortornormal positiva (dextrogira) solidária a cada ponto de uma curva parametrizada $\lambda(u)$.
- Base **intrínseca** (fixa) a $\mathrm{P}(u)$ que determina como esse ponto percorre a curva parametrizada perante a variação de u.
- **<u>Versor Tangente</u>**: versor tangente à trajetória em $\mathrm{P}(u)$, com sentido determinado pelo sentido de percurso de $\mathrm{P}(u)$ ao longo da curva.

$$\boxed{\vec{\tau}(u) \triangleq \frac{\vec{r}\,'(u)}{\|\vec{r}\,'(u)\|} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}} \qquad (4)$$

- Como $\vec{\tau}$ é um versor, $\|\vec{\tau}(u)\|^2 = \vec{\tau}(u) \cdot \vec{\tau}(u) = 1$. Derivando em relação a u:

$$\vec{\tau}\,'(u) \cdot \vec{\tau}(u) + \vec{\tau}(u) \cdot \vec{\tau}\,'(u) = 0 \implies \vec{\tau}(u) \cdot \vec{\tau}\,'(u) = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\vec{\tau}\,'(u) \perp \vec{\tau}(u)} \qquad (5)$$

- **Um vetor de módulo constante, não necessariamente unitário, é sempre ortogonal à sua derivada.**



Versores tangente e normal do Triedro de Frenet-Serret. Fonte [1].

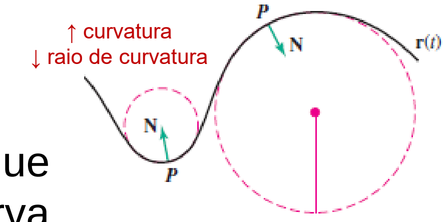
❑ Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas

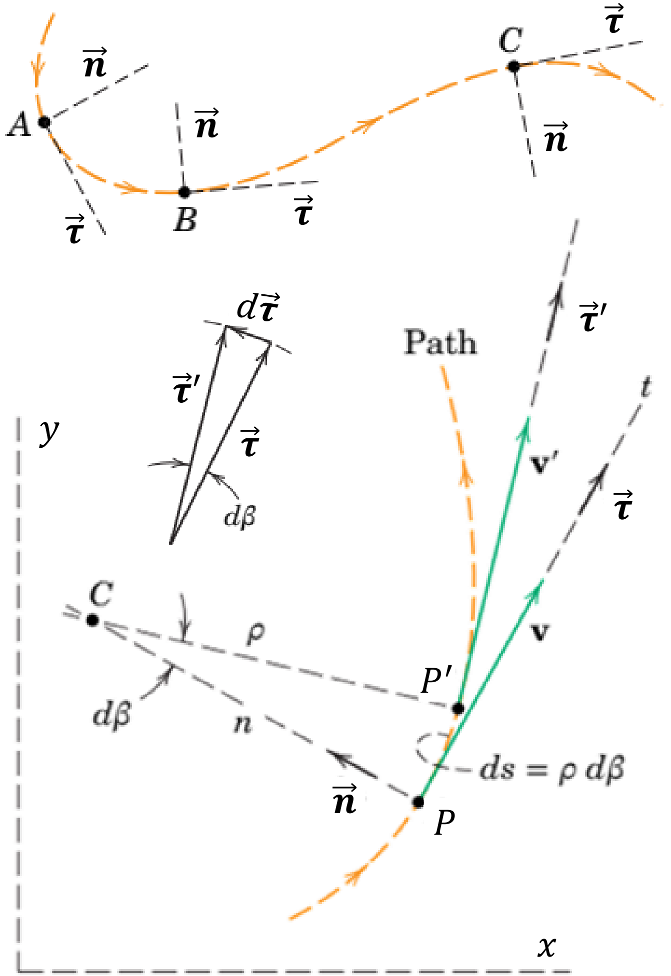
- **Triedro de Frenet-Serret**: base ortornormal positiva (dextrogira) solidária a cada ponto de uma curva parametrizada $\lambda(u)$.
- Base **intrínseca** (fixa) a $\mathrm{P}(u)$ que determina como esse ponto percorre a curva parametrizada perante a variação de u.
- **Versor Normal**: versor normal à trajetória em $\mathrm{P}(u)$, com sentido para o **interior da concavidade** da curva no ponto (centro de curvatura).

$$\vec{n}(u) \triangleq \frac{\vec{\tau}'(u)}{\|\vec{\tau}'(u)\|} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}(s) = \rho\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} = \rho\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} \qquad (6) \qquad \vec{n}(u) \perp \vec{\tau}(u)$$

- $\vec{n}$ é associado com a variação da orientação da trajetória em $\mathrm{P}(u)$, que corresponde à variação de $\vec{\tau}$ nesse ponto;
- ρ é o **raio de curvatura** da trajetória em $\mathrm{P}(u)$ [m];
- $\kappa = 1/\rho$ é a **curvatura** da trajetória em $\mathrm{P}(u)$ [m^{-1}], que corresponde à rapidez com que a orientação da curva varia nesse ponto.

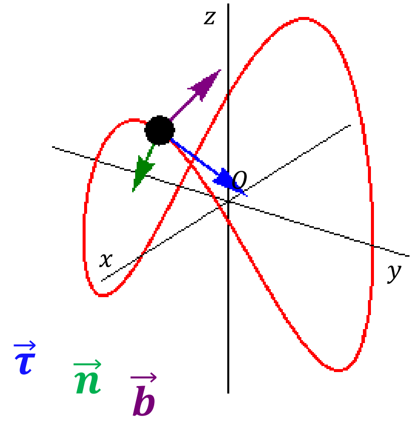
Círculos de curvatura





Versores tangente e normal do Triedro de Frenet-Serret. Fonte [1].

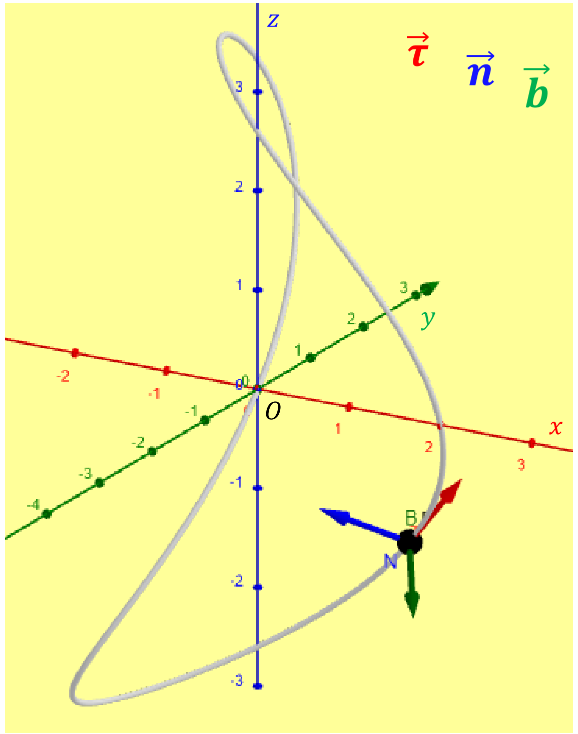
Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas



- **Triedro de Frenet-Serret**: base ortornormal positiva (dextrogira) solidária a cada ponto de uma curva parametrizada $\lambda(u)$.
- Base **intrínseca** (fixa) a $\mathrm{P}(u)$ que determina como esse ponto percorre a curva parametrizada perante a variação de u.
- **Versor Binormal**: terceiro versor do triedro de Frenet-Serret em $\mathrm{P}(u)$, definido por:

$$\boxed{\vec{b} \triangleq \vec{\tau} \wedge \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}(u) = \frac{\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)}{\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|}} \quad (7)$$

$$\vec{b}(u) \perp \vec{n}(u) \perp \vec{\tau}(u)$$

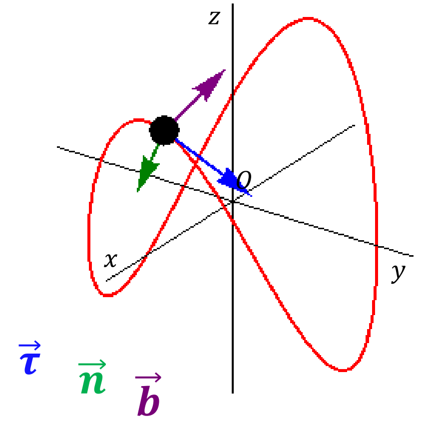


  - Torção da curva (γ): medida da variação da orientação de $\vec{b}$ em $\mathrm{P}(u)$; mais precisamente, é a medida da variação do plano definido por $\vec{b}$ e $\vec{n}$ (plano osculador) em torno de $\vec{\tau}$.

$$\gamma = -\frac{d\vec{b}(s)}{ds} \cdot \vec{n}(s) \Leftrightarrow \gamma = \frac{[\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)] \cdot \vec{r}'''(u)}{\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|^2}$$

  - No caso particular de curvas planas, $\gamma = 0$.

Fundamentos de Geometria Diferencial de Curvas



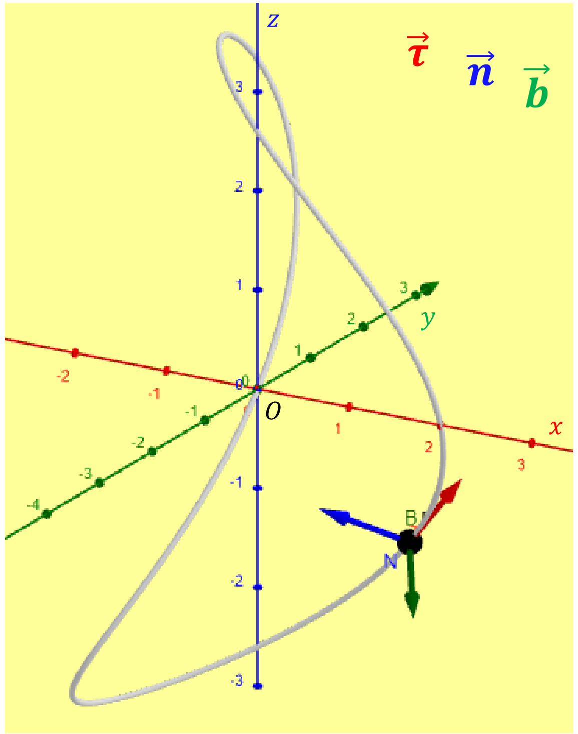
- A determinação do Triedro de Frenet-Serret pela definição é trabalhosa devido, principalmente, ao cálculo de $\vec{\tau}'(u)$.

- Dessa forma, dado a curva parametrizada $\lambda(u)$ expressa por $\vec{r}(u)$, pode-se adotar a seguinte estratégia para o cálculo dos versores do triedro:

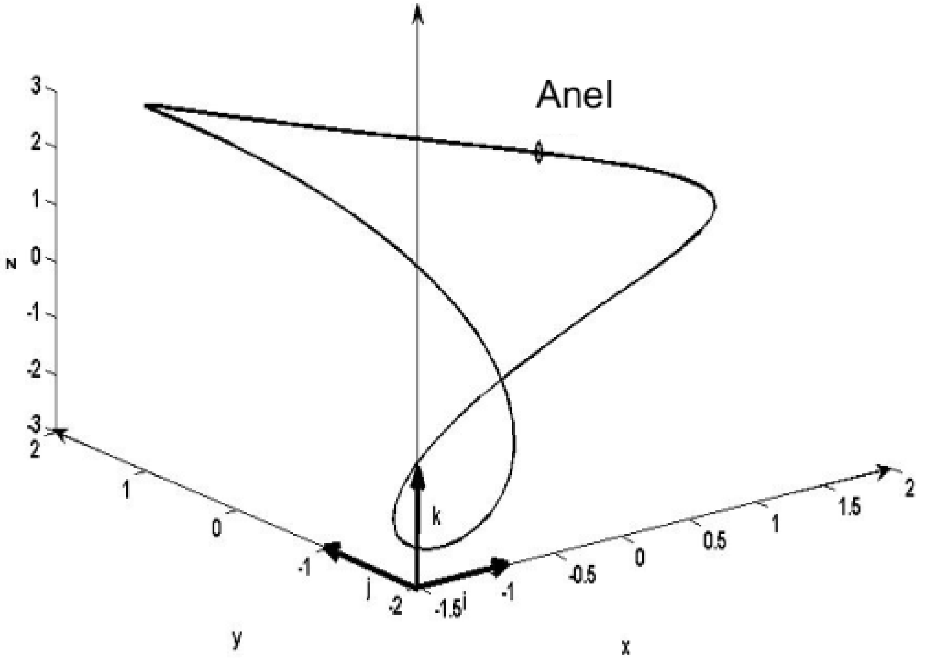
  1) Obter $\vec{r}'(u)$ e $\|\vec{r}'(u)\|$ para calcular $\vec{\tau}(u)$ (Eq. 4.1);

  2) Obter $\vec{r}''(u)$, $\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)$ e $\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|$ para calcular $\vec{b}(u)$ (Eq. 7.2);

  3) Calcular $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau}$ (Eq. 7.1).



Exercício (P2–Q1–2016)



QUESTÃO 1 (2,5 pontos). Conforme ilustrado na figura, um pequeno anel move-se vinculado a um arame curvo descrito pela equação:

$$(P-O)=\vec{r}(u)=(\cos u+\cos 2u)\vec{i}+(\sin u-\sin 2u)\vec{j}+3\sin u\vec{k}$$

em que u é um parâmetro variável no tempo. O movimento do anel obedece à lei horária u(t) = t/10.

Para o instante $t=10\pi$, pede-se:

(a) o versor tangente ao arame no ponto coincidente com o anel, descrito em coordenadas cartesianas (utilize a base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$).

(b) a velocidade do anel descrita em coordenadas intrínsecas;

(c) a aceleração do anel descrita em coordenadas intrínsecas.

Determine também os versores normal e binormal para o mesmo instante

Exercício (P2–Q1–2016)

a) O versor tangente à curva, em qualquer ponto, é dado por:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|} = \frac{\dfrac{dr_x}{du}\vec{i} + \dfrac{dr_y}{du}\vec{j} + \dfrac{dr_z}{du}\vec{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{dr_x}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dr_y}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dr_z}{du}\right)^2}}$$

As componentes da derivada da função vetorial $\vec{r}(u)$ são dadas por:

$$\frac{dr_x}{du} = -\sin u - 2\sin 2u$$

$$\frac{dr_y}{du} = \cos u - 2\cos 2u$$

$$\frac{dr_z}{du} = \cos u$$

Para o instante $t = 10\pi$, tem-se $u(10\pi) = \pi$ e:

$$\frac{dr_x}{du}(t = 10\pi) = -\sin \pi - 2\sin 2\pi = 0$$

$$\frac{dr_y}{du}(t = 10\pi) = \cos \pi - 2\cos 2\pi = -3$$

$$\frac{dr_z}{du}(t = 10\pi) = 3\cos 3\pi = -3$$

$$\left|\vec{r}\,'(t = 10\pi)\right| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

Portanto, o versor tangente à curva, no ponto coincidente com a posição do anel no instante $t = 10\pi$, é:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(-3\vec{j} - 3\vec{k}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

(1,0)

Conteúdo

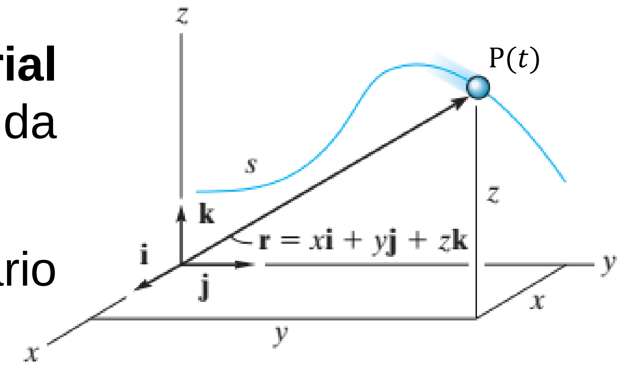
Posição, Velocidade e Aceleração

- Para as definições a seguir, considere o **movimento de uma partícula material** P que **percorre uma trajetória** $\lambda(u)$, em relação a um referencial $\mathcal{F}$, à medida que o tempo transcorre.

- Para que seja possível parametrizar as velocidades e acelerações, é necessário que u seja, ele próprio, função do tempo (**lei horária**), isto é: $u = u(t)$.

- Dessa forma, cada $u(t)$ corresponde a uma abscissa curvilínea $s\big(u(t)\big) = s(t)$ que é percorrida pela partícula P sobre a trajetória $\lambda(u)$.

- <u>**Posição**</u>: Dado um sistema de coordenadas cartesianas $\mathbb{S} = \{\mathrm{O}; \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ **solidário** ao referencial $\mathcal{F}$, o vetor posição de uma partícula P é dado por:

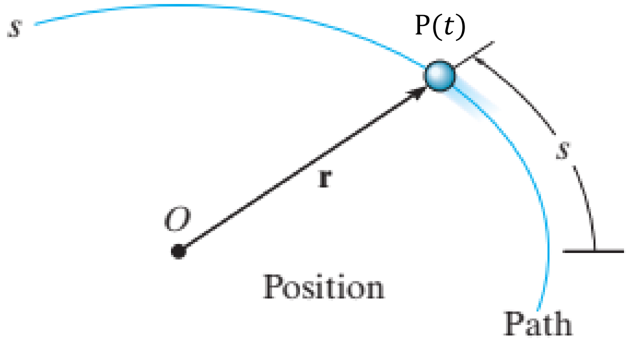


$$\boxed{\vec{r}(t) \equiv \vec{r}(u(t)) = x(u(t))\hat{\imath} + y(u(t))\hat{\jmath} + z(u(t))\hat{k}} \quad (8)$$

(coordenadas cartesianas)

$$\boxed{\vec{r}(t) \equiv \vec{r}(s(t))} \quad (9)$$

(coordenada curvilínea)



Vetor posição de uma partícula representado em termos de coordenadas cartesianas e intrínsecas. Fonte [2].

❑ Posição, Velocidade e Aceleração

➢ **Velocidade**: o vetor velocidade instantânea de P é dado por:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \triangleq \frac{d\vec{r}\big(u(t)\big)}{dt} = \frac{d\vec{r}(u)}{du}\frac{du}{dt} = \vec{r}\,'(u)\dot{u}(t) \quad (10)$$

Atenção para regra da cadeia: se $u(t) = t \;\rightarrow \begin{cases} \dot{u}(t) = 1 \\ \vec{r}\,'(u) = \dot{\vec{r}}(t) \end{cases}$

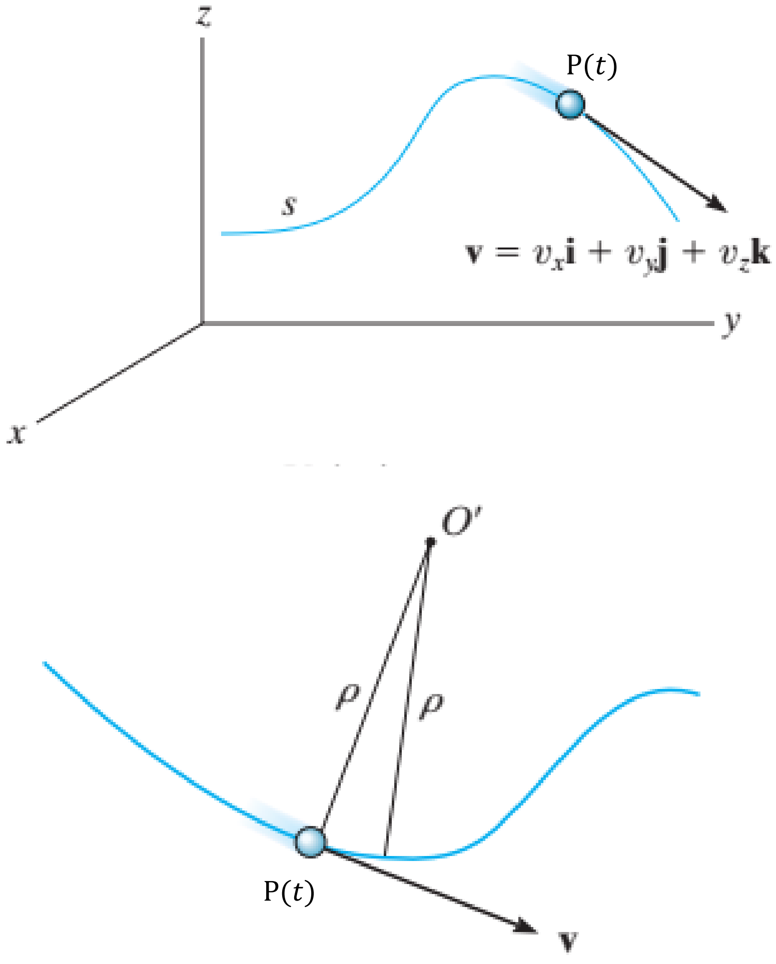
$$\vec{v}(t) = \big[x'(u)\hat{\imath} + y'(u)\hat{\jmath} + z'(u)\hat{\mathrm{k}}\big]\dot{u}(t) \quad (11)$$

(base cartesiana, fixa)

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\vec{\tau} = v(t)\vec{\tau} \;\;\Longrightarrow\;\; \|\vec{v}(t)\| = v(t) \quad (12)$$

(base intrínseca, móvel)

- $\dot{s}(t) = v(t)$ é a velocidade escalar instantânea da partícula [m/s];
- o vetor velocidade instantânea da partícula é sempre **tangente** à trajetória.



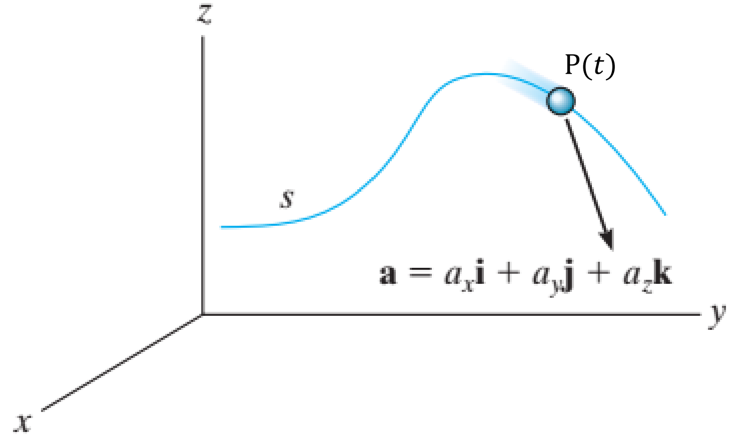
Vetor velocidade instantânea de uma partícula representado nos sistemas de coordenadas cartesianas e intrínsecas. Fonte [2].

❑ Posição, Velocidade e Aceleração

➢ **Aceleração**: o vetor aceleração instantânea de P é dado por:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \triangleq \frac{d\vec{v}\big(u(t)\big)}{dt} = \frac{d\vec{v}(u)}{du}\frac{du}{dt} = \vec{v}'(u)\dot{u}(t) \quad (13)$$

Atenção para regra da cadeia: se $u(t) = t \rightarrow \begin{cases} \dot{u}(t) = 1 \\ \vec{v}'(u) = \dot{\vec{v}}(t) \end{cases}$



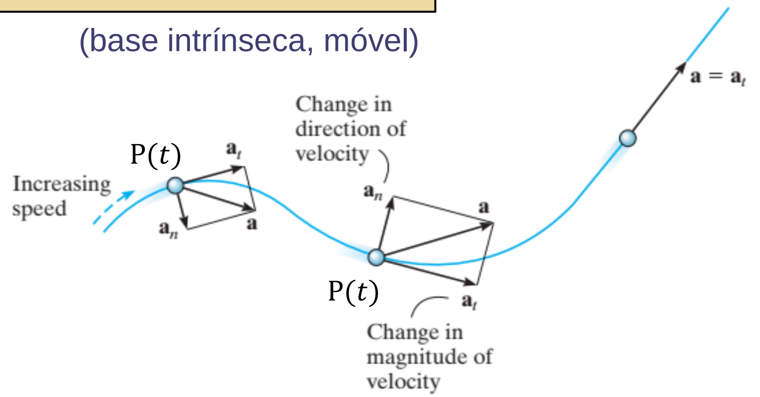
$$\vec{a}(t) = \left[x''(u)\hat{\imath} + y''(u)\hat{\jmath} + z''(u)\hat{k}\right]\dot{u}^2(t) \quad (14)$$

(base cartesiana, fixa)

$$\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n} \quad (15)$$

(base intrínseca, móvel)

- $a_t = \dot{v}(t)$ é a aceleração tangencial da partícula [m²/s], responsável pela **variação da magnitude** da velocidade instantânea. $a_t = \vec{a}(t) \cdot \vec{\tau}$
- $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ é a aceleração normal (ou centrípeta) da partícula [m²/s], responsável pela **variação da orientação** da velocidade instantânea. $a_n = \vec{a}(t) \cdot \vec{n}$



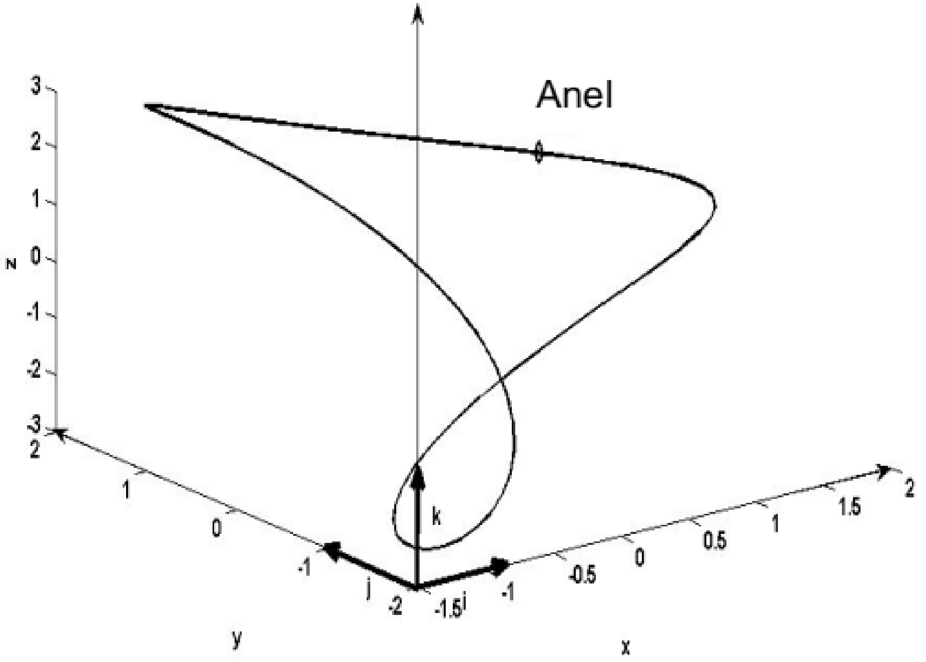
Vetor aceleração instantânea de uma partícula representado nos sistemas de coordenadas cartesianas e intrínsecas. Fonte [2].

Posição, Velocidade e Aceleração

- Determinação do raio de curvatura e do Triedro de Frenet-Serret da trajetória a partir de $\vec{v}$ e $\vec{a}$:

1) Calcular a velocidade e aceleração instantâneas na base cartesiana: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
2) Obter a velocidade escalar: $v = \|\vec{v}\|$
3) Calcular o raio de curvatura: $\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}$
4) Calcular o versor tangente: $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{v}$
5) Calcular o versor binormal: $\vec{b} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|} = \left(\frac{\rho}{v^3}\right) \vec{v} \wedge \vec{a}$
6) Calcular o versor normal: $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau}$

Exercício (P2–Q1–2016)



QUESTÃO 1 (2,5 pontos). Conforme ilustrado na figura, um pequeno anel move-se vinculado a um arame curvo descrito pela equação:

$$(P-O)=\vec{r}(u)=(\cos u+\cos 2u)\vec{i}+(\sin u-\sin 2u)\vec{j}+3\sin u\vec{k}$$

em que u é um parâmetro variável no tempo. O movimento do anel obedece à lei horária u(t) = t/10.

Para o instante $t=10\pi$, pede-se:

(a) o versor tangente ao arame no ponto coincidente com o anel, descrito em coordenadas cartesianas (utilize a base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$).

(b) a velocidade do anel descrita em coordenadas intrínsecas;

(c) a aceleração do anel descrita em coordenadas intrínsecas.

Exercício (P2–Q1–2016)

b) A velocidade do anel é dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{du}\frac{du}{dt} = (-\sin u - 2\sin 2u)\frac{1}{10}\vec{i} + (\cos u - 2\cos 2u)\frac{1}{10}\vec{j} + 3\cos u\frac{1}{10}\vec{k}$$

No instante considerado, tem-se:

$$\vec{v}(u(t=10\pi)) = (-\sin\pi - 2\sin 2\pi)\frac{1}{10}\vec{i} + (\cos\pi - 2\cos 2\pi)\frac{1}{10}\vec{j} + 3\cos\pi\frac{1}{10}\vec{k} = -\frac{1}{10}\left(3\vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

A velocidade escalar do anel, nesse instante, é, portanto:

$$v(t=10\pi) = \frac{1}{10}\sqrt{9+9} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

e a expressão intrínseca de sua velocidade, é:

$$\vec{v}(t=10\pi) = \frac{3\sqrt{2}}{10}\vec{\tau}$$

(0,5)

Exercício (P2–Q1–2016)

c) A aceleração do anel, descrita em coordenadas cartesianas, é dada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{du}\frac{du}{dt} = \left[(-\cos u - 4\cos 2u)\frac{1}{10}\vec{i} + (-\sin u + 4\sin 2u)\frac{1}{10}\vec{j} - 3\sin u\frac{1}{10}\vec{k}\right]\frac{1}{10}$$

No instante considerado, tem-se:

$$\vec{a}(t=10\pi) = \vec{a}(u=\pi) = (-\cos\pi - 4\cos 2\pi)\frac{1}{100}\vec{i} + (-\sin\pi + 4\sin 2\pi)\frac{1}{100}\vec{j} - 3\sin\pi\frac{1}{10}\vec{k} = -\frac{3}{100}\vec{i}$$

A componente tangencial da aceleração, é dada por:

$$a_t(t=10\pi) = -\frac{3}{100}\vec{i}\cdot\vec{\tau}(t=10\pi) = -\frac{3}{100}\vec{i}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) = 0$$

Portanto, no instante $t=10\pi$ o módulo da aceleração do anel vale

$$\vec{a}(t=10\pi) = \frac{3}{100}$$

a aceleração do anel coincide com sua componente normal, ou seja:

$$\vec{a}(t=10\pi) = \frac{3}{100}\vec{n}$$

(1,0)

Q3 – P2 – 2015Reof

3ª Questão (2,0 pontos)

Um ponto M percorre a curva descrita por

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta \\ z = \theta \end{cases}$$

de acordo com a lei horária $\theta = \frac{t}{2}$. Pede-se determinar, no instante $t = \frac{\pi}{2}$:

(a) a velocidade de M;

(b) a aceleração de M;

(c) os versores $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ do triedro de Frenet em M.

P1–2022–Q3

3ª Questão (3,0 pontos). O ponto P move-se com lei horária $\theta(t) = \pi t/2$ ao longo da curva plana descrita pela equação paramétrica:

$$\begin{cases} x(\theta) = R\theta - R\sin\theta \\ y(\theta) = -R + R\cos\theta \end{cases}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Determinar, para o instante $t = 1s$:

a) A velocidade de P descrita em coordenadas cartesianas.
b) A aceleração de P descrita em coordenadas cartesianas.
c) O versor tangente do triedro de Frenet.
d) A velocidade de P descrita em coordenadas intrínsecas.
e) A aceleração de P descrita em coordenadas intrínsecas.

P1–2022–Q3

RESOLUÇÃO

a) Velocidade de P em coordenadas cartesianas:

$$\vec{v}_P = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathrm{i}} + \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathrm{j}} = (R - R\cos\theta)\frac{\pi}{2}\vec{\mathrm{i}} - R\sin\theta\frac{\pi}{2}\vec{\mathrm{j}}$$

Para o instante $t = 1s$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, de modo que:

$$\vec{v}_P(t = 1s) = \left(R - R\cos\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2}\vec{\mathrm{i}} - R\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\vec{\mathrm{j}} = \frac{\pi R}{2}(\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}})$$ **(0,5 ponto)**

b) Aceleração de P em coordenadas cartesianas:

$$\vec{a}_P = \frac{dv_x}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathrm{i}} + \frac{dv_y}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathrm{j}} = R\sin\theta\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\vec{\mathrm{i}} - R\cos\theta\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\vec{\mathrm{j}} = \frac{\pi^2 R}{4}(\sin\theta\,\vec{\mathrm{i}} - \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}})$$

Para o instante $t = 1s$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, de modo que:

$$\vec{a}_P(t = 1s) = \frac{\pi^2 R}{4}\vec{\mathrm{i}}$$ **(0,5 ponto)**

c) Versor tangente: $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}_P}{|\vec{v}_P|}$. No instante $t = 1s$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, de modo que:

$$\vec{\tau} = \frac{R\frac{\pi}{2}(\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}})}{\left|R\frac{\pi}{2}(\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}})\right|} = \frac{R\frac{\pi}{2}(\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}})}{R\frac{\pi}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}})$$ **(0,5 ponto)**

d) Velocidade de P em coordenadas intrínsecas:

Para o instante $t = 1s$, $\theta = \frac{\pi}{2} rad$ e $\vec{v}_P(t = 1s) = |\vec{v}_P(t = 1s)|\vec{\tau}(t = 1s) = \frac{\pi R}{2}\sqrt{2}\vec{\tau}(t = 1s)$ **(0,5 ponto)**

e) Aceleração de P em coordenadas intrínsecas:

A componente tangencial da aceleração de P no instante $t = 1s$ é:

$$a_\tau(t = 1s) = \vec{a}_P(t = 1s)\cdot\vec{\tau}(t = 1s) = \frac{\pi^2 R}{4}\vec{\mathrm{i}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}}) = \frac{\sqrt{2}\pi^2 R}{8}$$

Logo, a aceleração normal de P no instante $t = 1s$ é:

$$\vec{a}_n(t = 1s) = \vec{a}_P(t = 1s) - a_\tau(t = 1s)\vec{\tau}(t = 1s) = \frac{\pi^2 R}{4}\vec{\mathrm{i}} - \frac{\sqrt{2}\pi^2 R}{8}\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}}) = \frac{\pi^2 R}{8}(\vec{\mathrm{i}} + \vec{\mathrm{j}})$$

Assim, a componente normal da aceleração de P no instante $t = 1s$ é:

$$a_n(t = 1s) = |\vec{a}_n(t = 1s)| = \frac{\sqrt{2}\pi^2 R}{8}$$ **(1,0 ponto)**

Referências

[1] Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Dynamics**, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.

[2] Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 2 Dynamics**, 14th edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2016.