PME 3100 – Mecânica I

Atrito por Deslizamento à Seco

Prof. Francisco J. Profito
fprofito@usp.br

Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Força de Atrito
3. Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb
4. Referências

Conteúdo

1. **Motivação e Objetivos**
2. Força de Atrito
3. Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb
4. Referências

❑ Motivação e Objetivos

- Introduzir os conceitos de **atrito por deslizamento à seco** e mostrar como problemas de equilíbrio estático sujeitos à ação desse tipo de força podem ser analisados.
- Apresentar o modelo de Amontons-Coulomb para o **atrito por deslizamento à seco** entre corpos em contato, bem como as hipóteses que delimitam sua aplicação.
- Distinguir atrito estático e atrito dinâmico.
- Aplicações:
  - Mancais, engrenagens, parafusos de transmissão de potência, partes móveis de motores, etc. Nesses casos, geralmente se deseja **minimizar** a força de atrito.
  - Freios, embreagens, correias de transmissão, etc. Nesses casos, geralmente se deseja **maximizar** a força de atrito.

Exemplos de aplicações em que geralmente se deseja minimizar a força de atrito. Mancais de biela (esquerda), anéis de pistão (meio) e engrenagens (direita)

Exemplos de aplicações em que geralmente se deseja maximizar a força de atrito. Contato roda-trilho (superior) e disco de freio (inferior). Fonte: [1,2]

Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. **Força de Atrito**
3. Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb
4. Referências

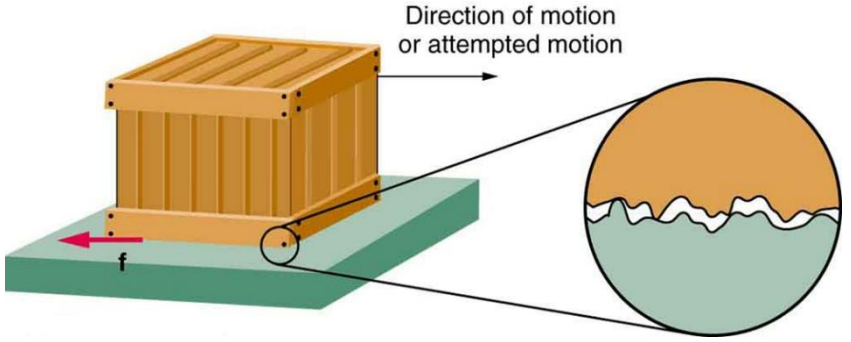
❑ Força de Atrito

- **Força de atrito:** força tangencial **resistente** ao movimento relativo (dinâmica), ou à **tendência** de movimento relativo (estática), atuante na interface entre corpos em contato.

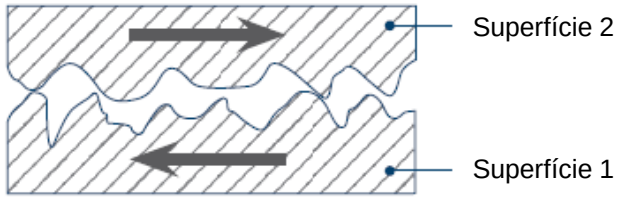
- Em sistemas mecânicos, geralmente ocorrem três tipos de atrito:

Tratado nesse curso

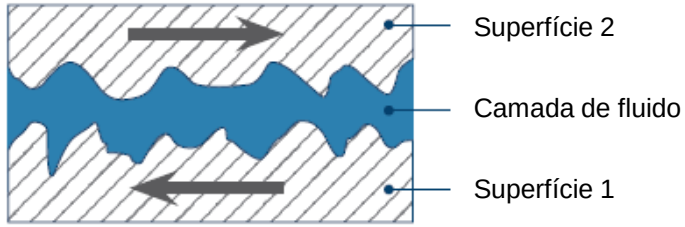
  - **Atrito à seco:** ocorre quando as superfícies em contato **não** são lubrificadas. Também conhecido como atrito de Coulomb.
  - **Atrito lubrificado:** ocorre quando uma camada de fluido (líquido ou gás) está presente na interface de contato. A força de atrito é gerada devido ao cisalhamento da camada de fluido, e sua magnitude depende da velocidade relativa entre as superfícies e da viscosidade do fluido. Tópico abordado em Mecânica dos Fluidos.
  - **Atrito interno:** ocorre no interior de materiais sólidos sujeitos a carregamentos cíclicos. O mecanismo de atrito interno está associado às deformações internas de sólidos deformáveis. Tópico abordado em Ciências dos Materiais.



Força de atrito e sua origem na interface de corpos em contato. Fonte: [1,2]



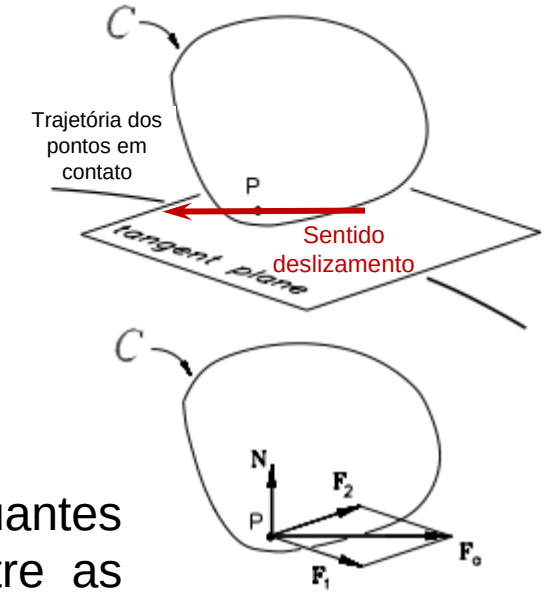
Atrito à seco. Fonte: adaptado de [4]



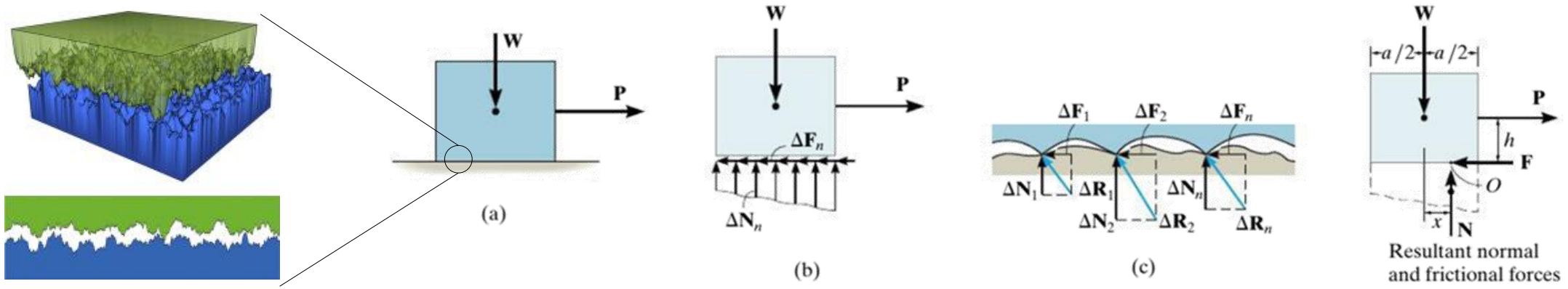
Atrito lubrificado. Fonte: adaptado de [4]

❑ Força de Atrito

- A força de **atrito à seco** é proveniente da interação entre as rugosidades das superfícies de corpos em contato (micro-geometria das superfícies).
- **Orientação da força de atrito:** direção **tangente** ao plano definido pelos pontos em contato, e sentido **oposto** ao movimento ou tendência de movimento **relativo** entre os corpos.
- **Magnitude da força de atrito:** associada com as tensões de cisalhamento atuantes em **cada** "micro-área" de contato que compõem a **área real** de contato entre as superfícies. Essas tensões de cisalhamento são geradas, predominantemente, pelos fenômenos de adesão e deformação plástica atuantes nessas "micro-áreas" de contato.



Direção e sentido da força de atrito. Fonte: [5]



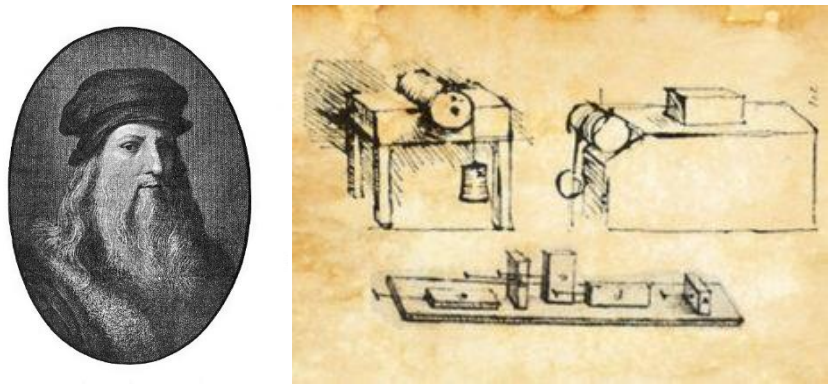
Esforços atuantes nas "micro-áreas" de contato definidas pela interação entre as asperezas de duas superfícies rugosas em contato. Fonte: [2,8]

Conteúdo

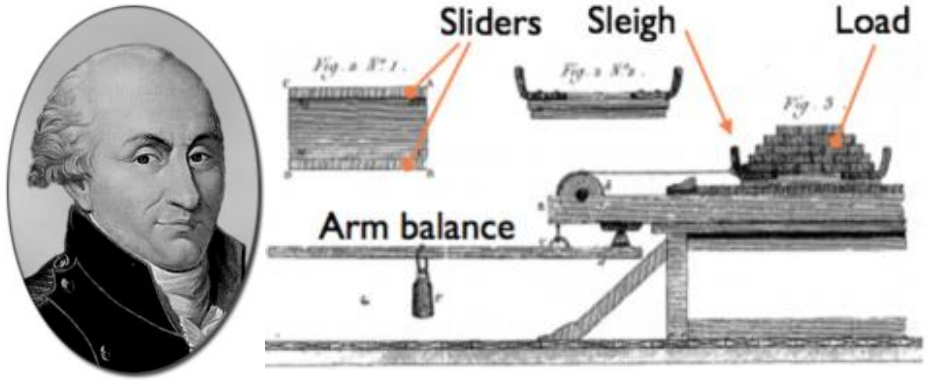
1. Motivação e Objetivos
2. Força de Atrito
3. **Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb**
4. Referências

❑ Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

- Possivelmente, Leonardo da Vinci foi o primeiro estudioso a realizar estudos experimentais sistemáticos sobre o atrito entre corpos em contato, por volta de 1490.
- Enfoque no estudo do atrito em eixos de rodas, polias e roscas de parafusos.



Leonardo da Vinci e os primeiros estudos experimentais sobre o atrito. Fonte [6]



Charles-Augustin de Coulomb e um dos seus aparatos experimentais utilizado para o estudo do atrito. Fonte [9]

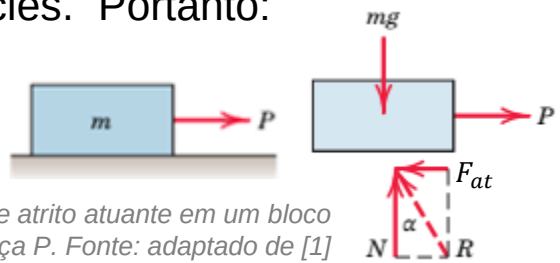
- Posteriormente, Guillaume Amontons e Charles-Augustin de Coulomb estenderam e consolidaram os conceitos fundamentais do **atrito por deslizamento à seco** entre corpos em contato (atrito de rolamento não será abordado nesse curso), por volta de 1770.
- O modelo de atrito de Amontons-Coulomb é compatível com resultados empíricos.
- O modelo de Amontons-Coulomb é melhor descrito considerando a distinção entre **atrito estático** e **dinâmico**.

❑ Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

- **<u>Atrito estático</u>: ausência** de deslizamento entre as superfícies em contato, impedindo assim o movimento relativo entre os corpos.
  - O **módulo** da força de atrito **depende dos carregamentos externos** que causariam o deslizamento caso o atrito não estivesse presente.
  - O valor **máximo** do módulo da força de atrito é proporcional à força normal aplicada entre os corpos em contato. A partir desse valor, passa a ocorrer o movimento relativo entre as superfícies. Portanto:

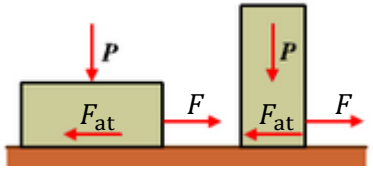
$$|F_{\mathrm{at}}| \leq \mu_{\mathrm{e}} |N|$$

F_{at} = força de atrito **estático** [N]
N = força normal [N]
μ_{e} = coeficiente de atrito **estático** [-]



DCL com a força de atrito atuante em um bloco sendo puxado pela força P. Fonte: adaptado de [1]

  - A força de atrito **independe da área aparente de contato** (atenção para a diferença entre área aparente e área real de contato).
  - O coeficiente de atrito estático, μ_{e}, depende da natureza das superfícies em contato (material, rugosidade, tribofilme, etc.).
  - A força de atrito estático **impede** o movimento, possui valor **desconhecido** e **não é dissipativa**.



Independência da força de atrito com a área aparente de contato. Fonte: adaptado de [7]

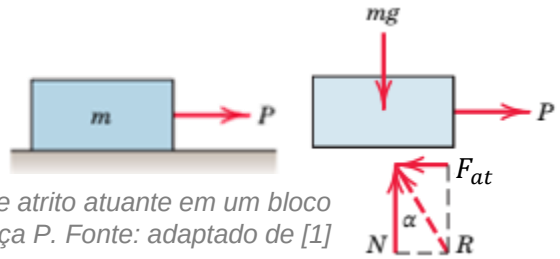
❑ Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

➢ **<u>Atrito dinâmico</u>:** ocorre quando existe deslizamento relativo entre as superfícies em contato.

- O **módulo** da força de atrito é proporcional à força normal aplicada entre os corpos em contato:

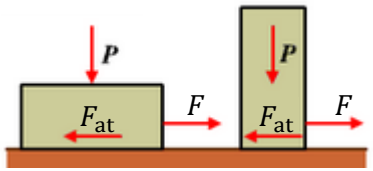
$$|F_{\mathrm{at}}| = \mu_{\mathrm{d}} |N|$$

F_{at} = força de atrito **dinâmico** [N]
N = força normal [N]
μ_{d} = coeficiente de atrito **dinâmico** [-]



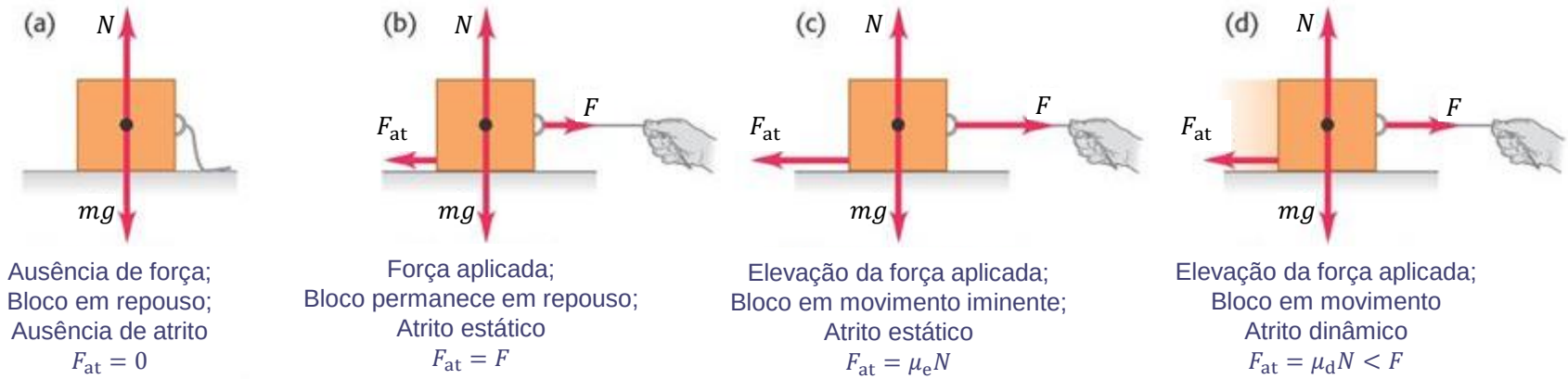
DCL com a força de atrito atuante em um bloco sendo puxado pela força P. Fonte: adaptado de [1]

- A força de atrito **não** depende da velocidade relativa entre os corpos em contato.
- A força de atrito **independe da área aparente de contato** (atenção para a diferença entre área aparente e área real de contato).
- O coeficiente de atrito dinâmico μ_{d} depende da natureza das superfícies em contato (material, rugosidade, tribofilme, etc.).
- Geralmente $\mu_{\mathrm{d}} < \mu_{\mathrm{e}}$.
- A força de atrito dinâmico **dificulta** o movimento, possui valor conhecido e é **dissipativa**.



Independência da força de atrito com a área aparente de contato. Fonte: adaptado de [7]

❑ Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

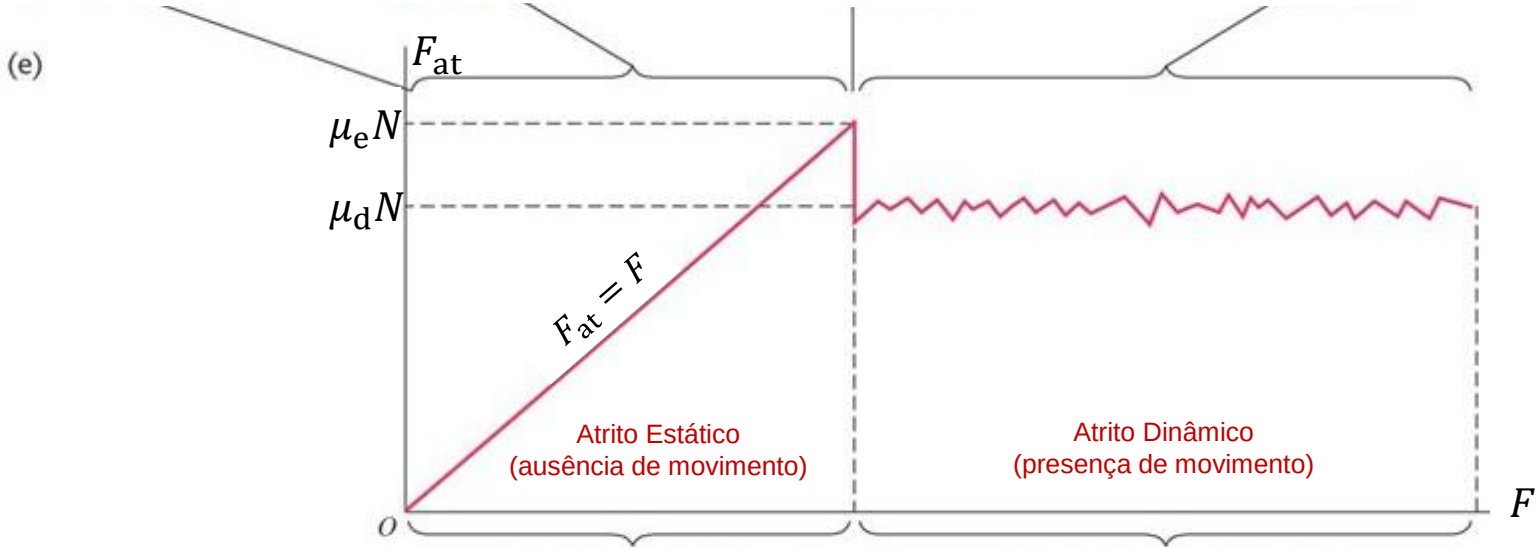


Ausência de força;
Bloco em repouso;
Ausência de atrito
$F_{at} = 0$

Força aplicada;
Bloco permanece em repouso;
Atrito estático
$F_{at} = F$

Elevação da força aplicada;
Bloco em movimento iminente;
Atrito estático
$F_{at} = \mu_e N$

Elevação da força aplicada;
Bloco em movimento
Atrito dinâmico
$F_{at} = \mu_d N < F$



Bloco em repouso; força de atrito estático igual à força aplicada

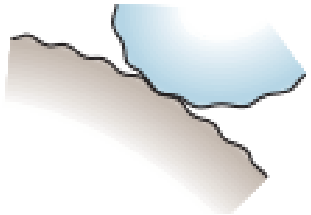
Bloco em movimento permanente; atrito dinâmico aproximadamente constante

❑ Modelo de Atrito de Amontons-Coulomb

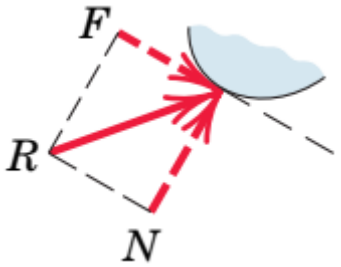
➢ Em problemas de **equilíbrio estático**, a região de contato com atrito pode ser admitida como sendo um vínculo cinemático.

Problemas 2D

- Restringe 2 GLs (translação) do ponto vinculado;
- Impõe *duas componentes* de força de reação no ponto vinculado (direção normal de compressão e direção tangencial do vínculo);
- Adiciona *duas incógnita* ao problema (componentes de força de reação).



Origem da força de reação.

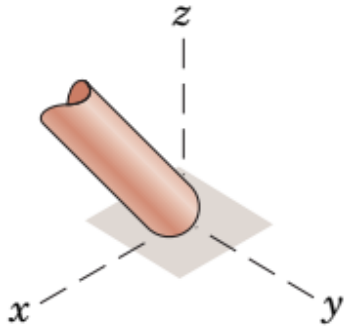


Ação no corpo isolado.

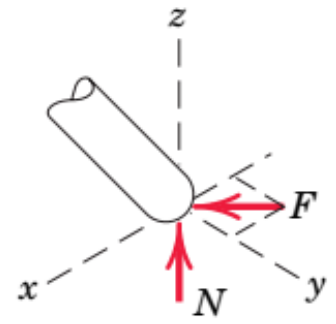
Representação de apoio simples em problemas 2D. Fonte: [1]

Problemas 3D

- Restringe 2 GLs (translação) do ponto vinculado;
- Impõe *duas componentes* de força de reação no ponto vinculado (direção normal de compressão e direção tangencial do vínculo);
- Adiciona *duas incógnita* ao problema (componentes de força de reação).



Origem da força de reação.



Ação no corpo isolado.

Representação de apoio simples em problemas 3D. Fonte: [1]

❑ Exercício: 2011–P1–Q3

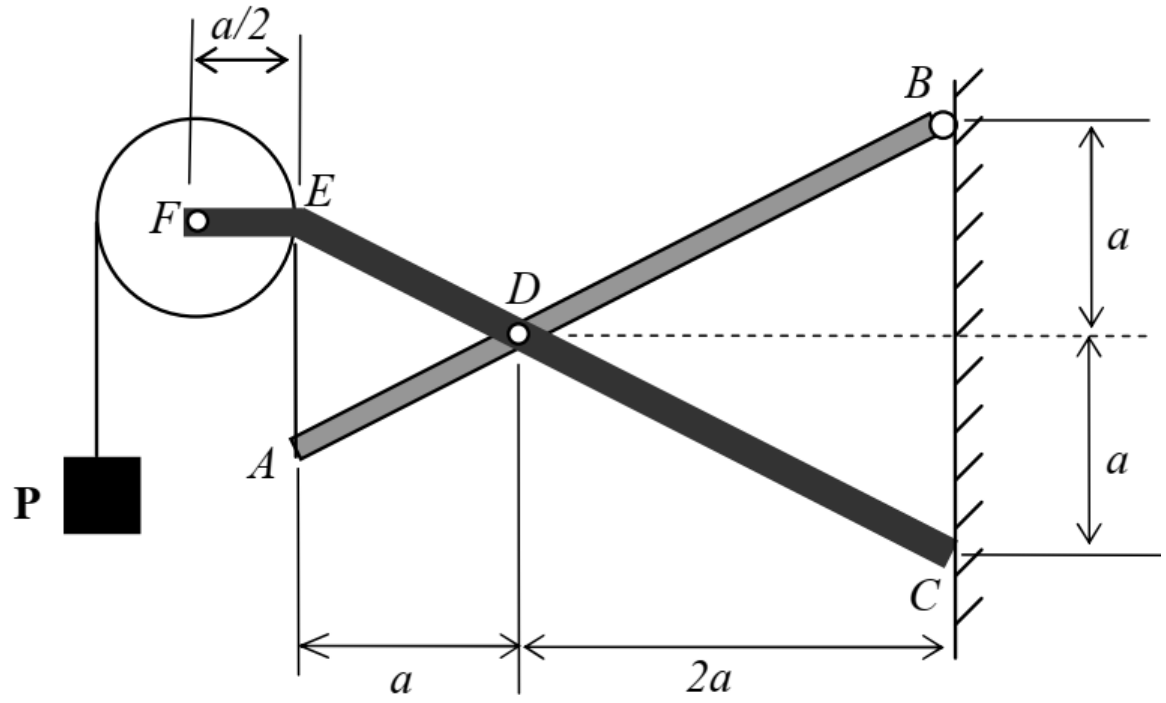
QUESTÃO 3 (4,0 pontos). Na figura ao lado, a polia tem peso ***Q***, as barras têm peso desprezível e a carga suportada pela extremidade do cabo é ***P***. As barras *ADB* e *CDEF* são contínuas através do pino *D* que as mantém unidas. A barra *ADB* está articulada em *B* e a *CDEF* apóia-se na parede rugosa *BC*. Sendo μ o coeficiente de atrito entre a parede e a barra *CDEF*, pede-se:

(a) o diagrama de corpo livre da polia, a reação em *F* e a força no cabo; **(0,5)**

(b) os diagramas de corpo livre das barras *ADB* e *CDEF*; **(1,0)**

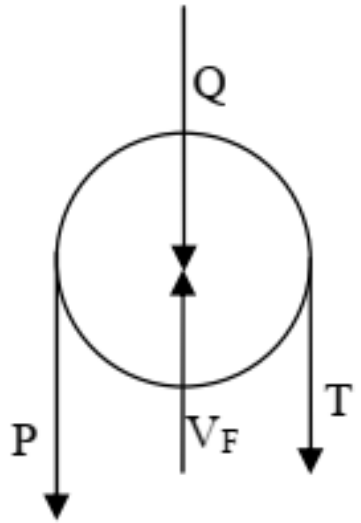
(c) as forças atuantes na barra *CDEF*; **(1,5)**

(d) o valor mínimo de μ para que o sistema se mantenha em equilíbrio. **(1,0)**



❑ Exercício: 2011–P1–Q3

O diagrama de corpo livre da polia é apresentado na figura abaixo.



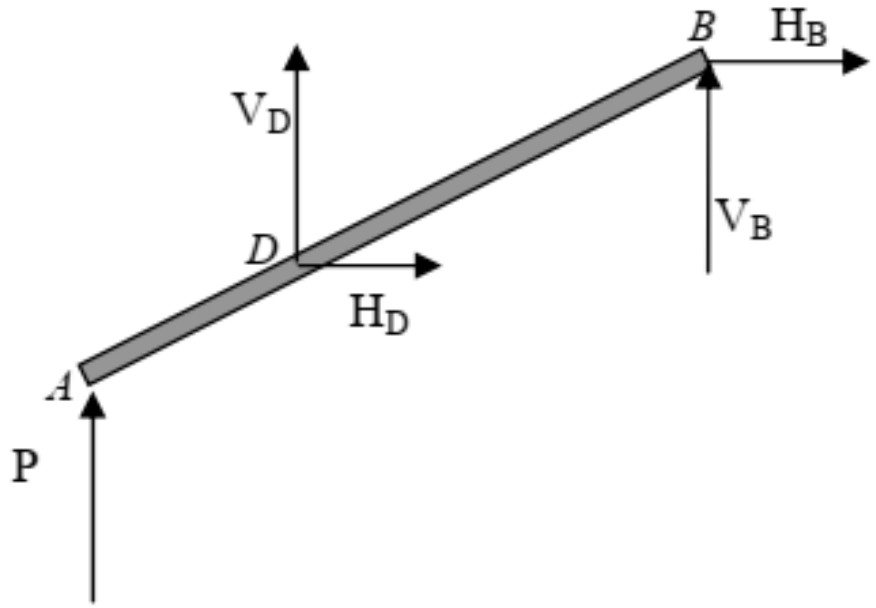
Aplicando-se as equações de equilíbrio à polia, obtêm-se:

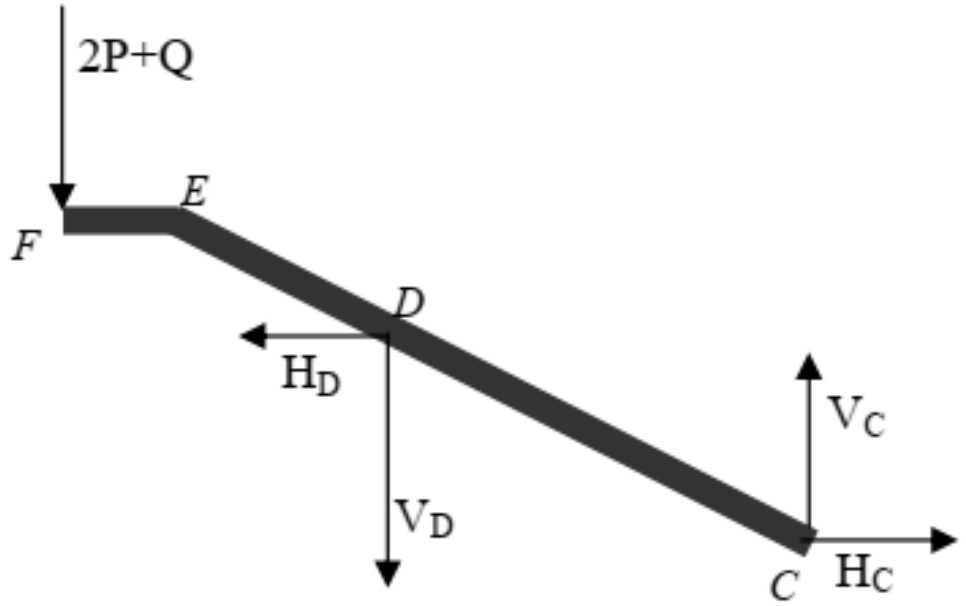
$$M_F = P.\frac{a}{2} - T\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow T = P$$

$$V_F - P - T - Q = 0 \Rightarrow V_F = 2P + Q$$

❑ Exercício: 2011–P1–Q3

Os diagramas de corpo livre das barras *ADB* e *CDEF* são apresentados abaixo.





❑ Exercício: 2011–P1–Q3

Aplicando-se as equações de equilíbrio aos sistemas de forças atuantes nas barras *ADB* e *CDEF*, obtêm-se:

$$H_D + H_B = 0 \tag{1}$$

$$P + V_D + V_B = 0 \tag{2}$$

$$M_{B:} = 0 \Rightarrow -P \cdot 3a - V_D \cdot 2a + H_D \cdot a = 0$$

$$\therefore H_D - 2V_D - 3P = 0 \tag{3}$$

$$-(2P+Q) - V_D + V_C = 0 \tag{4}$$

$$-H_D + H_C = 0 \tag{5}$$

$$M_{C:} = 0 \Rightarrow (2P+Q)\frac{7a}{2} + V_D 2a + H_D a = 0$$

$$\therefore 2H_D + 4V_D + 14P + 7Q = 0 \tag{6}$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1)-(6), obtêm-se:

$$\boxed{H_B = \frac{8P+7Q}{4}}, \quad \boxed{V_B = \frac{12P+7Q}{8}}$$

$$\boxed{H_D = -\frac{8P+7Q}{4}}, \quad \boxed{V_D = -\frac{20P+7Q}{8}}$$

$$\boxed{H_C = -\frac{8P+7Q}{4}}, \quad \boxed{V_C = \frac{-4P+Q}{8}}$$

❑ Exercício: 2011–P1–Q3

Como a componente V_C é devida à força de atrito, o sistema se mantém em equilíbrio desde que:

$$V_C \leq \mu H_C$$

É necessário analisar os seguintes casos:

(a) Se $Q > 4P \Rightarrow \mu > \dfrac{Q-4P}{16P+14Q}$, ou seja, a força de atrito impede o deslizamento vertical para baixo do ponto de contacto C.

(b) Se $Q < 4P \Rightarrow \mu > \dfrac{4P-Q}{16P+14Q}$, ou seja, a força de atrito impede o deslizamento vertical para cima do ponto de contacto C.

(c) No caso limite em que $Q = 4P$, notamos que $V_C = 0$, de modo que o sistema se mantém em equilíbrio independentemente de existir ou não atrito no ponto de contacto C da parede com a barra $CDEF$.

Portanto, excluindo-se o caso (c), concluímos que o valor mínimo de μ para que o sistema se mantenha em equilíbrio, é:

$$\mu = \left| \frac{4P-Q}{16P+14Q} \right|$$

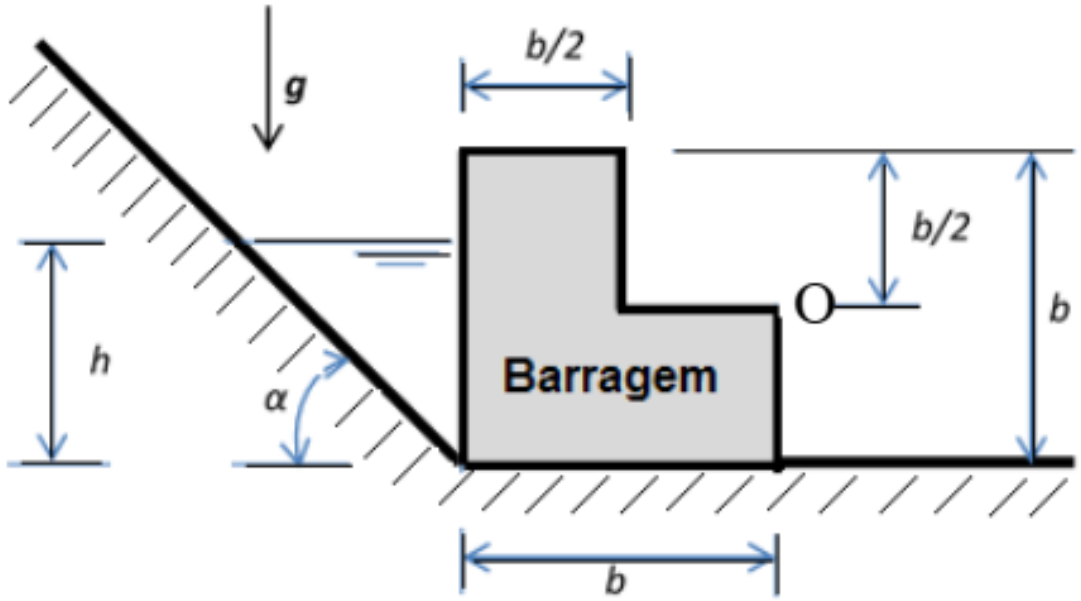
❑ Exercício: 2015–P1–Q3

Questão 3 (3,5 pontos)A figura mostra uma barragem de concreto (homogênea, de densidade ρ_B e largura L) que represa a água (densidade ρ_A) acumulada junto a uma encosta. Admitindo que não ocorra infiltração de água sob a barragem e que o coeficiente de atrito estático entre a barragem e o terreno seja μ , pede-se:

a) Calcular o peso da barragem e a força que a água represada aplica sobre ela;

b) Fazer o diagrama de corpo livre da barragem;

c) Calcular, em função dos demais parâmetros, a máxima altura h da água que pode ser acumulada sem afetar o equilíbrio estático da barragem.

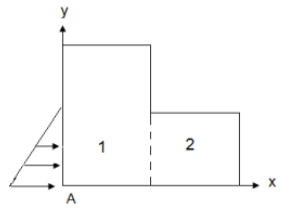


❑ Exercício: 2015–P1–Q3

Resposta

a) Peso da barragem:

$$P = \rho_B \cdot \frac{b}{2} \cdot b \cdot l \cdot g + \rho_B \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot l \cdot g = \frac{3}{4} \rho_B b^2 l g$$ (0,5)



Resultante das forças de pressão de água:

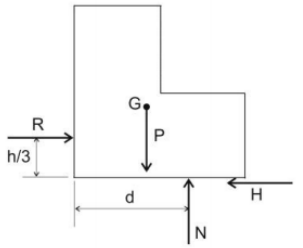
$$R = \frac{1}{2} \rho_A \cdot g \cdot h^2 \cdot l$$ (0,5)

Centro de gravidade da barragem

$$x_G = \frac{\frac{b^2 L}{2}\rho_B \frac{b}{4} + \frac{b^2 L}{4}\rho_B \frac{3b}{4}}{\frac{b^2 L}{2}\rho_B + \frac{b^2 L}{4}\rho_B} = \frac{5b}{12}$$ (0,5)

$$y_G = \frac{\frac{b^2 L}{2}\rho_B \frac{b}{2} + \frac{b^2 L}{4}\rho_B \frac{b}{4}}{\frac{3b^2}{4}} = \frac{5b}{12}$$

b) D.C.L da barragem: ⟶



(0,5)

c) $\sum F_x = 0 \Rightarrow H = R$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = P$

$\sum M_{AZ} = 0 \Rightarrow -R\frac{h}{3} - P\frac{5b}{12} + N \cdot d = 0$ (0,5)

Para a barragem não escorregar: $H \leq \mu \cdot N$

$$R \leq \mu \cdot P \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \rho_A \cdot g \cdot h \cdot l \leq \mu \cdot \frac{3}{4} \rho_B b^2 l g \qquad h^2 \leq \mu \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_A} \cdot b^2$$

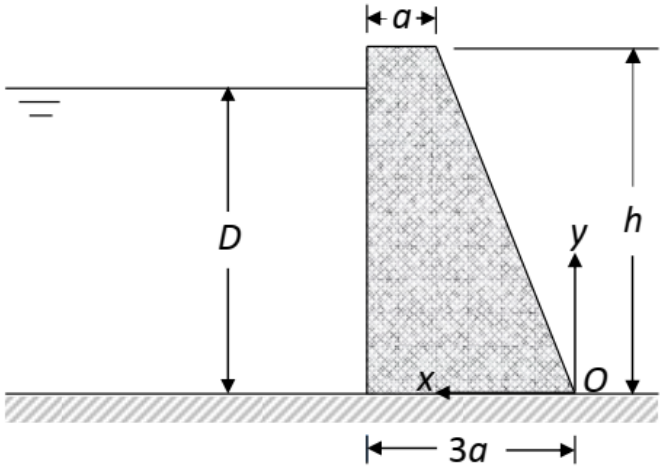
Para a barragem não tombar: $d \leq b$

$$b \geq \frac{\frac{1}{6}\rho_A \cdot g \cdot h^3 L + \frac{5bP}{12}}{P} \Rightarrow h^3 \leq \frac{7Pb}{2 \cdot \rho_A \cdot g \cdot L} = \frac{21}{8} \cdot \frac{b^3 \cdot \rho_B}{\rho_A}$$ (1,0)

$$h_{max} = b \cdot \min\left\{ \sqrt{\frac{3\mu}{2} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_A}}, \sqrt[3]{\frac{21}{8} \cdot \frac{\rho_B}{\rho_A}} \right\}$$

❑ Exercício: 2014–P1–Q3

Questão3(3,5 pontos):



A figura mostra a seção transversal de uma barragem de gravidade projetada para suportar uma lâmina d´água de altura *D*. Sabe-se que não há infiltração de água entre o solo e a barragem. São dados os pesos por unidade de volume da água, γ_a, e do material da barragem, γ_c. É dada, também, a largura *L* da barragem (perpendicular ao plano da figura). Pedem-se:

(a) a posição do centro de massa da barragem em relação ao sistema *Oxy* indicado;

(b) a resultante das pressões hidrostáticas sobre a barragem;

(c) a posição do centro dessas pressões, em relação ao sistema *Oxy* indicado;

(d) o mínimo valor que deve ter a dimensão *a* da barragem para que ela não escorregue, sabendo que o coeficiente de atrito entre a barragem e o solo é μ;

(e) o mínimo valor que deve ter a dimensão *a* da barragem para que ela não tombe.

❑ Exercício: 2014–P1–Q3

a) $x_G = \frac{\left(ah\left(2a+\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}2ah\frac{2}{3}2a\right)}{ah+\frac{1}{2}2ah} \Rightarrow x_G = \frac{23}{12}a$ (0,5)

$y_G = \frac{\left(ah\frac{h}{2}+\frac{1}{2}2ah\frac{1}{3}h\right)}{ah+\frac{1}{2}2ah} \Rightarrow y_G = \frac{5}{12}h$ (0,5)

b) $R = \frac{1}{2}\gamma_a D^2 L$ (0,5)

c) $x_c = 3a; y_c = \frac{D}{3}$ (0,5)

d) $R \leq \mu P; P = 2\,ahL\gamma_c \Rightarrow \frac{1}{2}\gamma_a D^2 L \leq \mu 2\,ahL\gamma_c \Rightarrow a_{min} = \frac{1}{\mu}\frac{\gamma_a}{\gamma_c}\frac{D^2}{4h}$ (0,5)

e) $Px_G \geq Ry_c \Rightarrow 2\,ahL\gamma_c\frac{23}{12}a \geq \frac{1}{2}\gamma_a D^2 L\frac{D}{3} \Rightarrow a_{min} = \sqrt{\frac{\gamma_a D^3}{23\gamma_c h}}$ (0,5: DCL) + (0,5: resposta)

❑ Referências

1. Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.
2. Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 14th edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2017.
3. Site: https://steemit.com/science/@shehzad/friction-and-fluid-friction
4. Site: https://www.lfd.eu/gb/lubrication.html
5. Tenenbaum, R. A. **Fundamentals of Appiled Dynamics**, Springer-Verlag New York, Inc. 2004.
6. Site: https://www.tribonet.org/so-what-is-it-superlubricity/
7. Site: http://semesters.in/coulombs-law-of-friction-btech-first-year/
8. Hanaor D.A.H, Gan Y., Einav I., “Static friction at fractal interfaces”, Trib. Int. 93(A):229-238, 2016.
9. Desplanques, Y., “Amontons-Coulomb Friction Laws – A Review of the Original Manuscript”, *SAE Int. J. Mater. Manf.* 8(1):98-103, 2015.