



PME 3100 – Mecânica I

Forças Distribuídas

Prof. Francisco J. Profito

fprofito@usp.br



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Forças Distribuídas
3. Sistemas de Forças Paralelas
4. Centro de Gravidade, Centro de Massa e Baricentro
5. Hidrostática
6. Referências



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos

2. Forças Distribuídas

3. Sistemas de Forças Paralelas

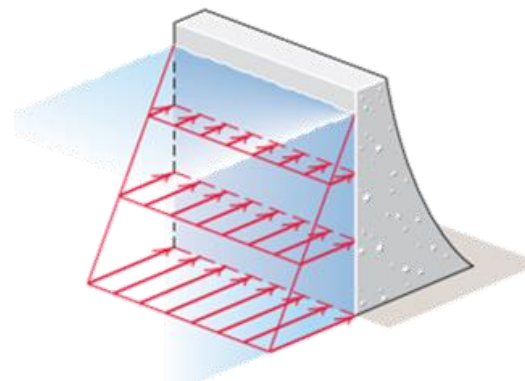
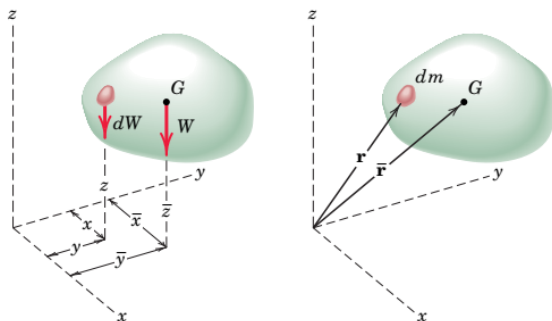
4. Centro de Gravidade, Centro de Massa e Baricentro

5. Hidrostática

6. Referências

❑ Motivação e Objetivos

- Apresentar os conceitos de forças distribuídas, em especial sistemas de forças paralelas.
- Apresentar os conceitos de centro de gravidade, centro de massa e centroide.
- Determinar a posição do centro de massa de corpos com geometrias arbitrárias e de corpos compostos por partes finitas.
- Calcular a força resultante e o centro de pressão de forças hidrostáticas atuantes em superfícies planas (corpos submersos, comportas, barragens, etc.).



Exemplos de sistemas de forças paralelas. Forças gravitacionais e definição de centro de gravidade de corpos materiais (esquerda). Forças hidrostáticas atuantes em uma barragem de contenção (direita). Fonte: [1].



Barragem de contenção de água.



Barragem de rejeito. Fonte: Minuto Engenharia

Barragem de rejeitos de mineração.



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
- 2. Forças Distribuídas**
3. Sistemas de Forças Paralelas
4. Centro de Gravidade, Centro de Massa e Baricentro
5. Hidrostática
6. Referências

❑ Forças Distribuídas

- **Forças distribuídas:** são forças aplicadas em **todos os pontos** de uma linha, superfície ou volume de um corpo material.
- **Forças concentradas:** são forças aplicadas em **pontos específicos** de um corpo material.
 - Forças desse tipo não existem na realidade, pois uma força aplicada mecanicamente a um corpo é **distribuída** em uma área de contato finita do corpo.
 - Quando essa área de contato é **pequena em relação às dimensões do corpo**, as forças distribuídas de contato podem ser **representadas** pela sua resultante aplicada (“concentrada”) em um ponto específico da área de contato.
 - Uma força pode ser **admitida como concentrada** quando se deseja analisar seu efeito **externo global** (estática e dinâmica) sobre o corpo ao qual é aplicada.

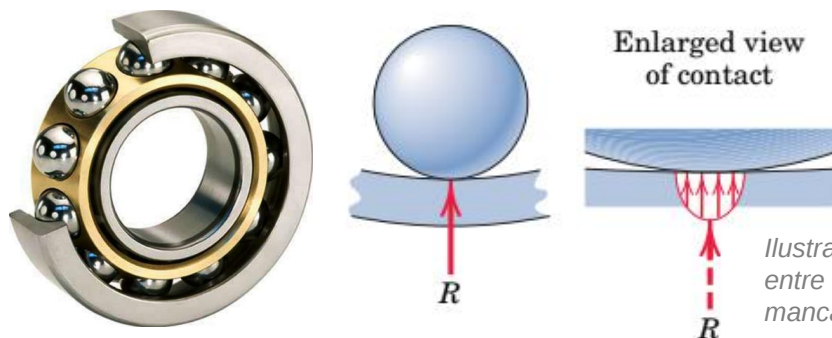


Ilustração das forças distribuídas de contato entre uma esfera e a pista externa de um mancal de rolamentos carregado. Fonte: [1].

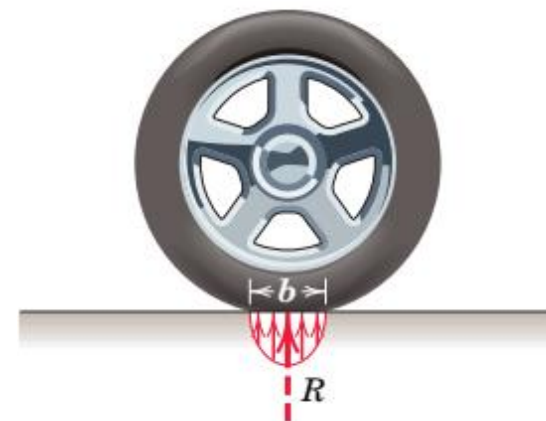


Ilustração das forças distribuídas aplicadas pelo pavimento a um pneu de automóvel na área de contato. Fonte: [1].

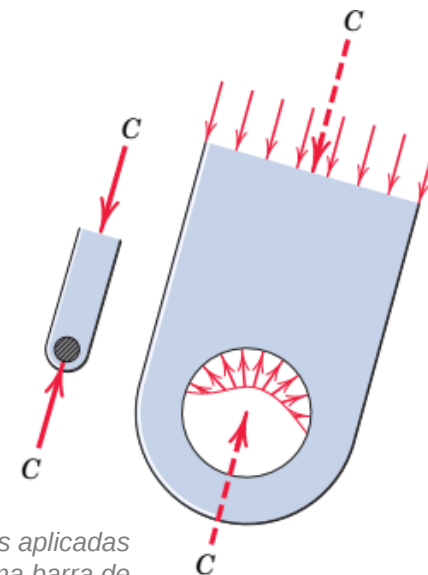
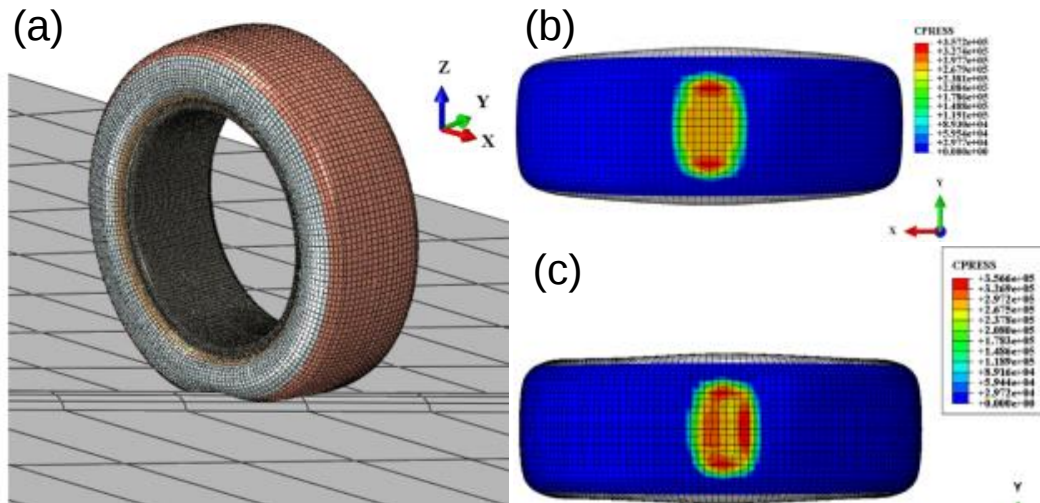


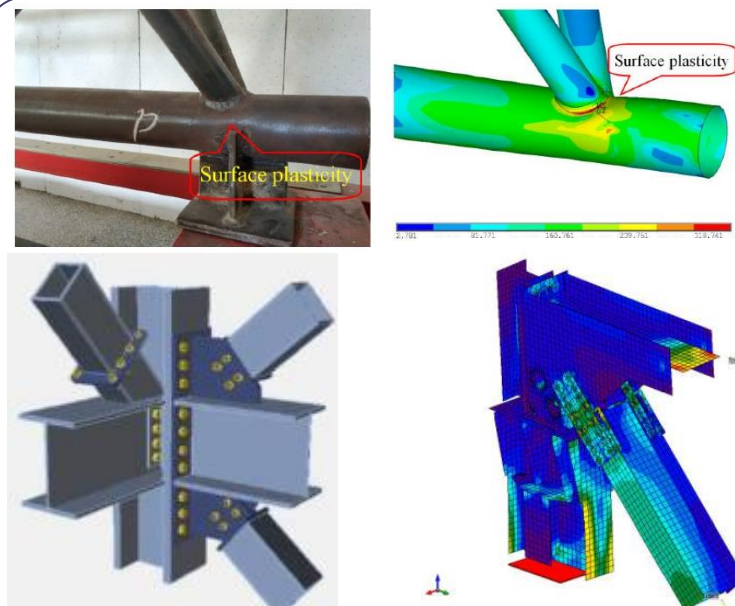
Ilustração das forças distribuídas aplicadas pelo pino da articulação de uma barra de treliça em compressão,. Fonte: [1].

❑ Forças Distribuídas

- Para análises cujo interesse são os efeitos da **distribuição local** dos esforços em torno das áreas de contato, os carregamentos não podem mais ser admitidos como concentrados.
 - A distribuição real dos carregamentos nas regiões de contato deve ser considerada;
 - Nessas condições, as tensões e deformações internas do material são importantes;
 - Tópicos tratados em outras disciplinas, como Mecânica dos Sólidos.



(a) Modelo de elementos finitos de um pneu de um carro de passageiro rolando sobre um pavimento rígido. (b) Pressão de contato para o pneu carregado estaticamente. (c) Pressão de contato para o pneu carregado e em rolamento. Fonte: [3].



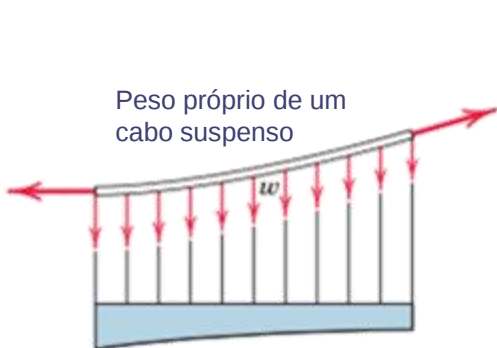
Exemplos de análises estruturais por elementos finitos de conectores de estruturas de treliça. Fonte: [4,5].



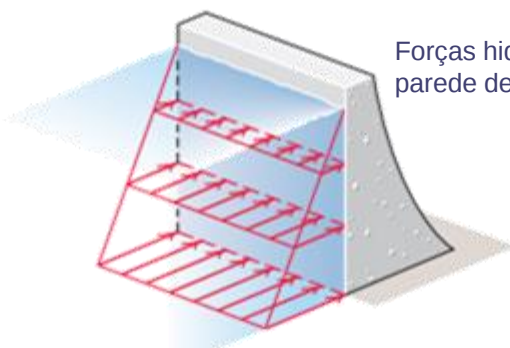
Franjas isocromáticas dos contatos esferas/pista de um mancal de rolamentos. As franjas representam a intensidade das tensões de contato.

□ Forças Distribuídas

- Quando forças são aplicadas sobre uma região cujas dimensões **não são desprezíveis em relação às dimensões do corpo**, deve-se considerar a distribuição real das forças sobre a região de interesse.
 - Efeitos globais determinados pelo somatório (integração) das forças aplicadas sobre a região;
 - Requer o conhecimento da intensidade das forças em cada ponto da região;
 - Três categorias de problemas são identificadas nesses casos:
 - Distribuição linear. Ex.: peso próprio de cabos suspensos. $[\text{N/m}]$
 - Distribuição de área. Ex.: pressão hidrostática sobre barragens, comportas e corpos submersos, pressão hidrodinâmica em mancais, pressão aerodinâmica em asas de aviões e aerofólios. $[\text{N/m}^2] = [\text{Pa}]$
 - Distribuição volumétrica. Ex. forças gravitacionais e eletromagnéticas. $[\text{N/m}^3]$
- Forças distribuídas:
 - **não** são necessariamente paralelas entre si
 - **não** são necessariamente normais à superfície
 - podem ser de tração ou compressão



Peso próprio de um cabo suspenso

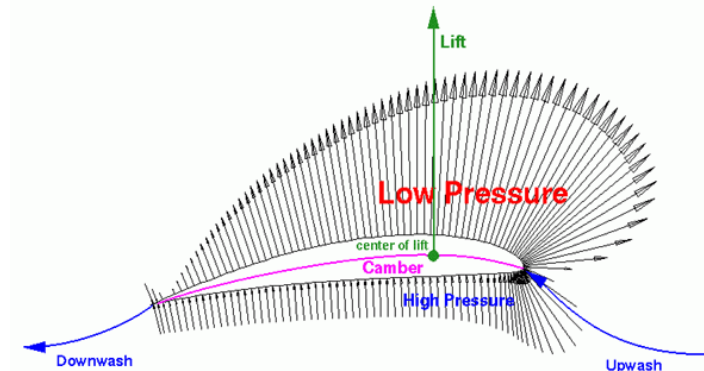


Forças hidrostáticas sobre a parede de uma barragem



Forças gravitacionais atuantes em uma estrutura engastada

Ilustração de forças distribuídas ao longo de uma linha, área e volume. Fonte: [1].



Distribuição de pressão sobre a superfície de um aerofólio.



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Forças Distribuídas
- 3. Sistemas de Forças Paralelas**
4. Centro de Gravidade, Centro de Massa e Baricentro
5. Hidrostática
6. Referências

❑ Sistemas de Forças Paralelas

- Considere um corpo $\mathcal{B}$ sujeito ao seguinte sistema de forças paralelas de qualquer natureza:

$$\mathbb{S} = (\vec{F}_i, P_i) = (f_i \vec{u}, P_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Força resultante:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (f_i \vec{u}) = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n f_i}_R \right) \vec{u} \Rightarrow \vec{R} = R \vec{u}, \quad \vec{R} \parallel \vec{u}$$

- Momento resultante:

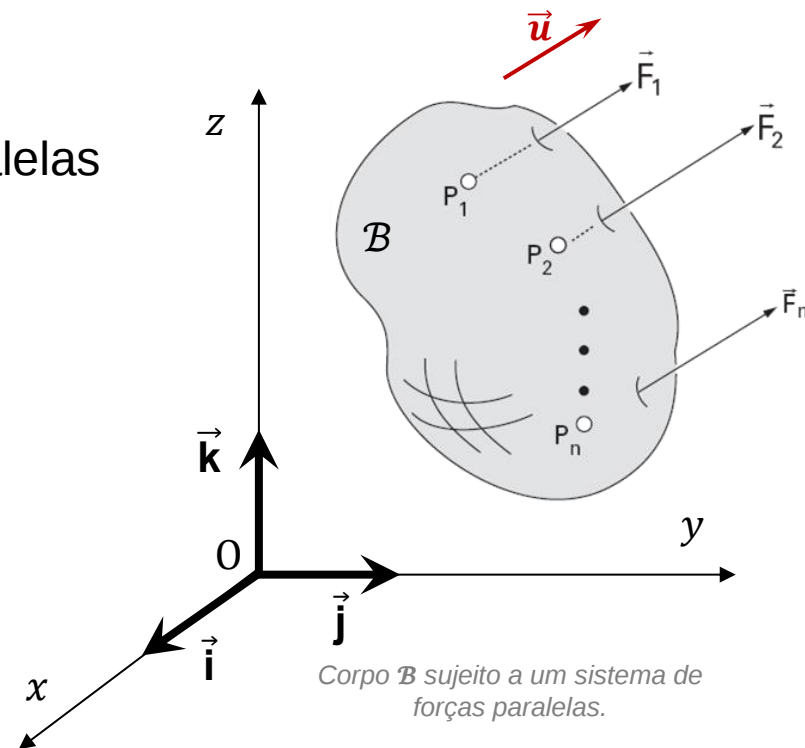
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge (f_i \vec{u}) = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n (P_i - O) f_i}_{\vec{m}_O} \right) \wedge \vec{u} \Rightarrow \vec{M}_O = \vec{m}_O \wedge \vec{u}, \quad \vec{M}_O \perp \vec{R}$$

- Invariante escalar:

$$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = (\vec{m}_O \wedge \vec{u}) \cdot (R \vec{u}) = 0$$

$$\begin{cases} I = 0 \\ \vec{R} \neq \vec{0} \end{cases} \quad \text{Sistema Redutível a uma Única Força}$$

- Qualquer sistema de **forças paralelas** é redutível a uma única força;
- Em quais pontos $\vec{R}$ pode ser aplicado para que o sistema se reduza a uma única força (momento nulo)? Eixo Central!



□ Centro de Forças Paralelas

- Os polos de **momento nulo** de um sistema de forças paralelas correspondem aos pontos do seu Eixo Central:

$$(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

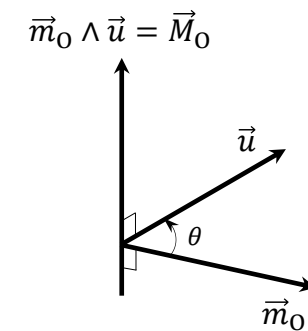
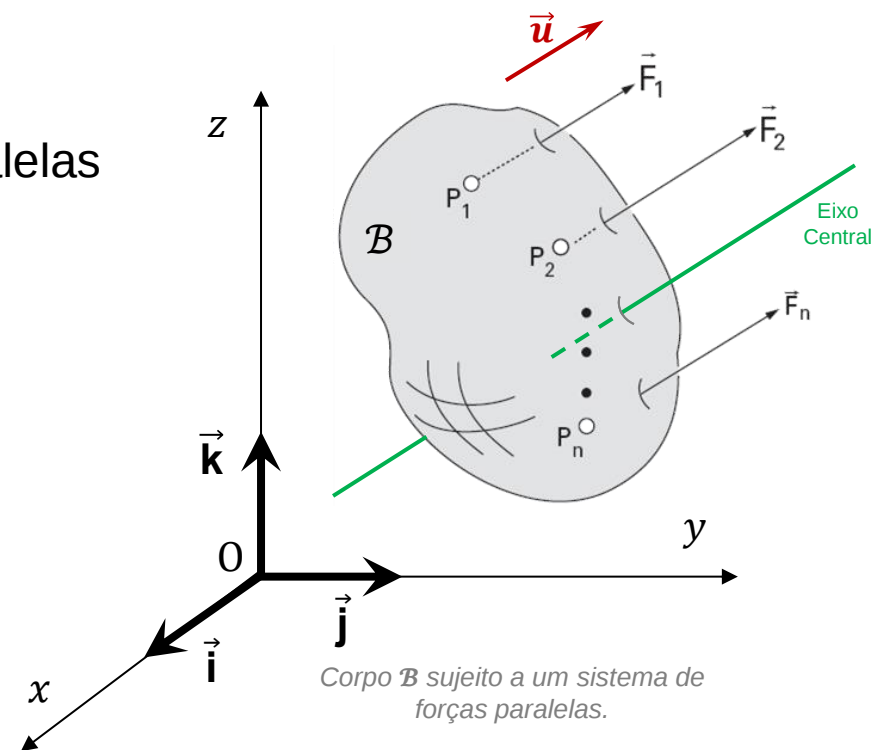
- Substituindo $\vec{R}$ e $\vec{M}_O$ obtidos anteriormente na expressão do Eixo Central acima:

$$(E - O) = \frac{(R\vec{u}) \wedge (\vec{m}_O \wedge \vec{u})}{R^2} + \underbrace{\lambda R\vec{u}}_{=\lambda^*} = \frac{\vec{u} \wedge (\vec{m}_O \wedge \vec{u})}{R} + \lambda^* \vec{u}, \quad \lambda^* \in \mathbb{R}$$

- É possível demonstrar que $\vec{u} \wedge (\vec{m}_O \wedge \vec{u}) = \vec{m}_O$. Adicionalmente, substituindo $\vec{m}_O$ e R na expressão acima, tem-se:

$$(E - O) = \frac{\vec{m}_O}{R} + \lambda^* \vec{u} \Rightarrow \underbrace{(E - O)}_{\text{vetor}} = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - O) f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} + \lambda^* \vec{u}, \quad \lambda^* \in \mathbb{R}$$

Polos de momento nulo (Eixo Central)

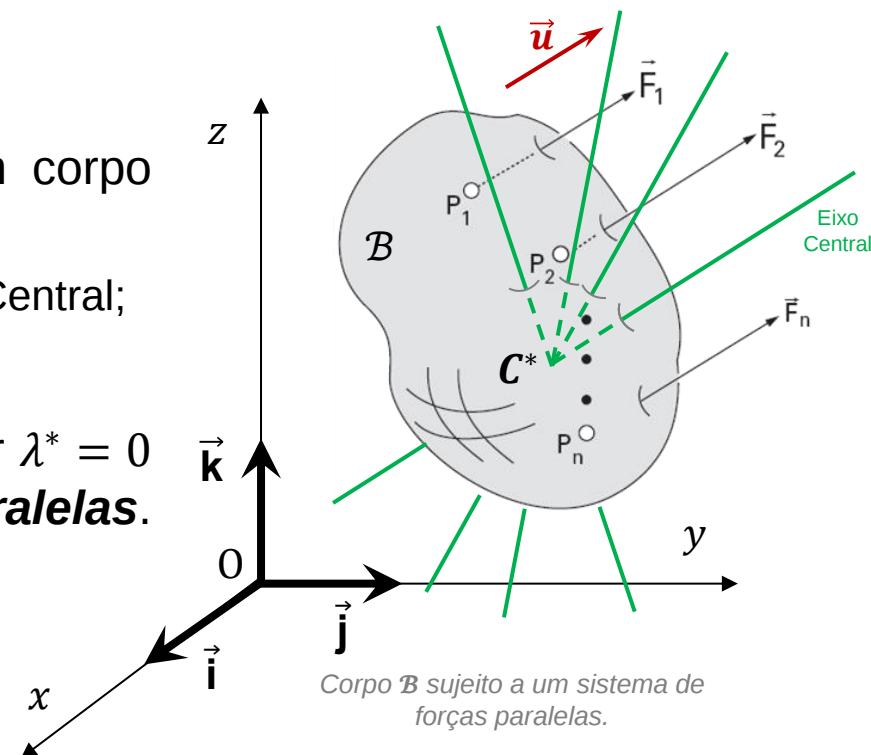


□ Centro de Forças Paralelas

- A redução de um sistema de forças paralelas atuantes em um corpo material a uma única força depende:
 - da **orientação** das forças paralelas que determina a direção do Eixo Central;
 - do ponto do Eixo Central escolhido para a redução.
- De todos os pontos possíveis do Eixo Central, o ponto definido por $\lambda^* = 0$ **é único e independe da orientação do sistema de forças paralelas**. Matematicamente:

$$(C^* - O) = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - O) f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

C^* = centro de forças paralelas



- Resumindo:
 - Um sistema de forças paralelas pode ser reduzido a uma única força ($\vec{R}$) aplicada no ponto C^* ;
 - O momento resultante com respeito a C^* é nulo ($\vec{M}_{C^*} = \vec{0}$), pois C^* pertence ao Eixo Central de um sistema de esforços caracterizado por $I = 0$ e $\vec{R} \neq \vec{0}$ (momento mínimo nulo);
 - O ponto C^* é único e independe da orientação das forças paralelas.



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Forças Distribuídas
3. Sistemas de Forças Paralelas
- 4. Centro de Gravidade, Centro de Massa e Baricentro**
5. Hidrostática
6. Referências

□ Centro de Gravidade

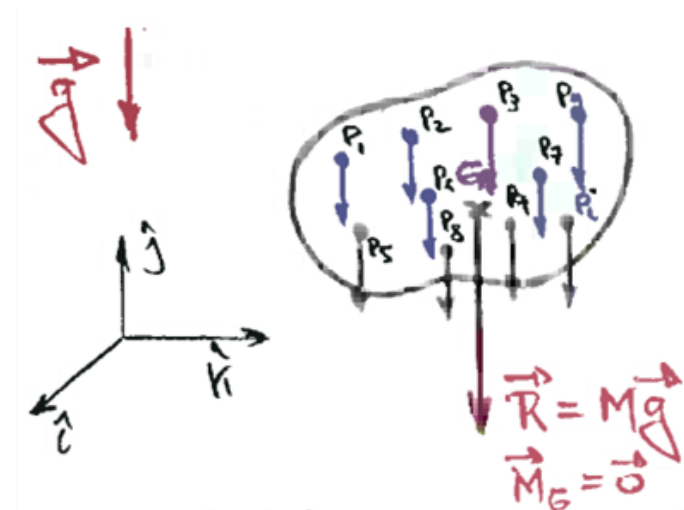
- Considere um sistema de esforços constituído pelas forças gravitacionais (peso) atuantes em cada partícula de massa m_i que compõem um corpo $\mathcal{B}$.
- **Admitindo** que as forças gravitacionais em cada partícula são **paralelas entre si**, o sistema de forças paralelas estabelecido é dado por:

$$\mathbb{S} = (\vec{W}_i, P_i) = (m_i g_i \vec{u}, P_i) \quad \text{com } \vec{u} \parallel \vec{g}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Substituindo $f_i = m_i g_i$ na expressão do centro de forças paralelas obtida anteriormente, tem-se:

$$(G^* - 0) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g_i (P_i - 0)}{\underbrace{\sum_{i=1}^n (m_i g_i)}_{\text{Peso total do corpo (W)}}} \Rightarrow \boxed{(G^* - 0) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g_i (P_i - 0)}{W}} \quad G^* = \text{centro de gravidade}$$

- Em geral, a posição do centro de gravidade de um corpo depende da orientação e magnitude da aceleração da gravidade atuante em cada partícula do corpo.



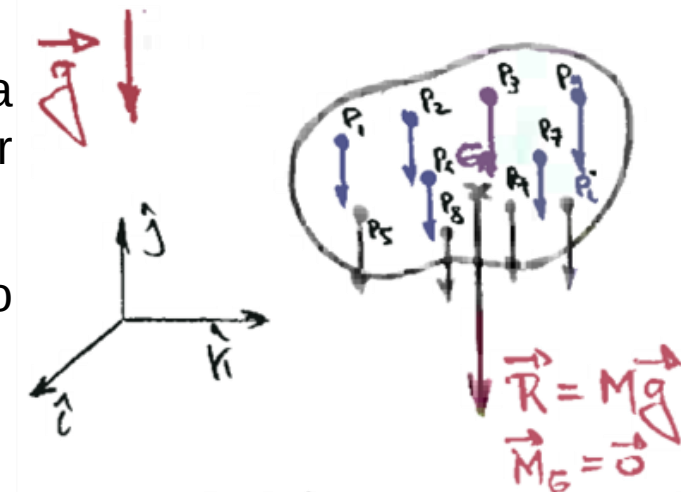
□ Centro de Massa e Baricentro (Centroide)

- Para corpos com dimensões reduzidas em relação à Terra, tanto a orientação quando a magnitude da aceleração da gravidade podem ser admitidas constantes em cada partícula (i.e. $\vec{g}_i = g_i \vec{u}_i \approx g \vec{u} = \text{constante}$).
- Dessa forma, a expressão do centro de gravidade é simplificada, como segue:

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (P_i - O)}{\underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_{\text{Massa total do corpo (M)}}} \Rightarrow$$

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (P_i - O)}{M}$$

G = centro de massa (depende da **distribuição de massa** do corpo)



- Fisicamente, o sistema de esforços constituído pelas forças gravitacionais atuantes em cada partícula de um corpo pode ser reduzido a uma única força (peso) aplicada no centro de massa do corpo.
- Considerando que $m_i = \rho_i V_i = \rho V_i$ para corpos homogêneos (i.e. $\rho_i \equiv \rho \equiv \text{constante}$), a expressão do centro de massa é simplificada, como segue:

$$(C - O) = \frac{\sum_{i=1}^n V_i (P_i - O)}{\underbrace{\sum_{i=1}^n V_i}_{\text{Volume total do corpo (V)}}} \Rightarrow$$

$$(C - O) = \frac{\sum_{i=1}^n V_i (P_i - O)}{V}$$

C = baricentro ou centroide (depende da **geometria** do corpo / propriedade geométrica do corpo)

2D: $V \rightarrow A$ (área)
1D: $V \rightarrow L$ (comprimento)

❑ Centro de Massa e Baricentro (Centroide)

- Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, e representando os vetores posição em termos de suas componentes na base ortonormal $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, tem-se:

$$(P_i - O) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

$$(G - O) = x_G \hat{i} + y_G \hat{j} + z_G \hat{k}$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \quad \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \quad x_G = \frac{\int x \rho dV}{M}$$

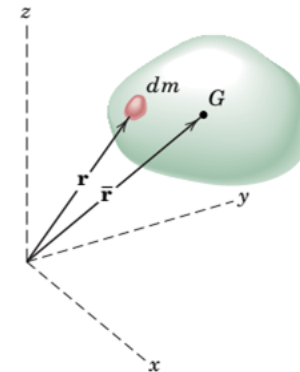
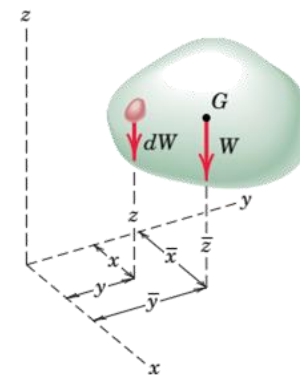
$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \quad \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \quad y_G = \frac{\int y \rho dV}{M}$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \quad \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \quad z_G = \frac{\int z \rho dV}{M}$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{V} \quad \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \quad x_C = \frac{\int x dV}{V}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{V} \quad \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \quad y_C = \frac{\int y dV}{V}$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{V} \quad \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \quad z_C = \frac{\int z dV}{V}$$



Centro de massa de um corpo contínuo. Fonte: [1].

- As definições de centro de gravidade, centro de massa e baricentro são **conceitualmente** distintas:
- Corpo sujeito a campo gravitacional constante em orientação e magnitude: centro de gravidade = centro de massa ($G^* \equiv G$)
 - Corpo homogêneo: centro de massa = baricentro ou centroide ($G \equiv C$)

❑ Exercício 1

SAMPLE PROBLEM 5/2

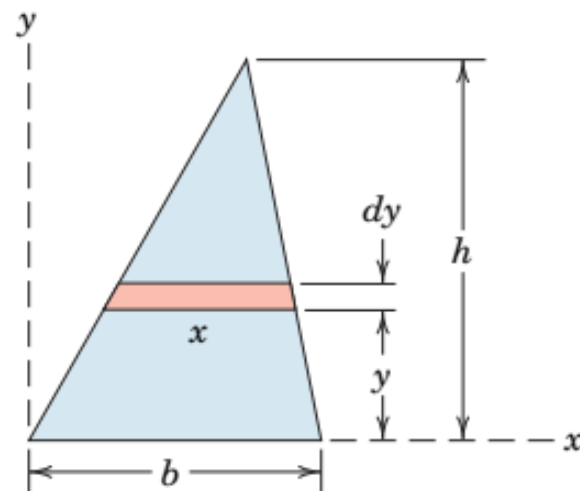
Centroid of a triangular area Determine the distance $\bar{h}$ from the base of a triangle of altitude h to the centroid of its area.

Solution The x -axis is taken to coincide with the base. A differential strip of area $dA = x \, dy$ is chosen. ① By similar triangles $x/(h - y) = b/h$. Applying the second of Eqs. 5/5a gives

$$[A\bar{y} = \int y_c \, dA] \quad \frac{bh}{2} \bar{y} = \int_0^h y \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{bh^2}{6}$$

and $\bar{y} = \frac{h}{3}$ Ans.

This same result holds with respect to either of the other two sides of the triangle considered a new base with corresponding new altitude. Thus, the centroid lies at the intersection of the medians, since the distance of this point from any side is one-third the altitude of the triangle with that side considered the base.



HELPFUL HINT

- ① We save one integration here by using the first-order element of area. Recognize that dA must be expressed in terms of the integration variable y ; hence, $x = f(y)$ is required.

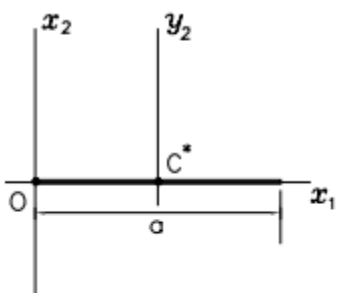
Fonte: [1]

Baricentro de Figuras Planas

Atenção para os sistemas de coordenadas

Fonte: [2]

Barra linear

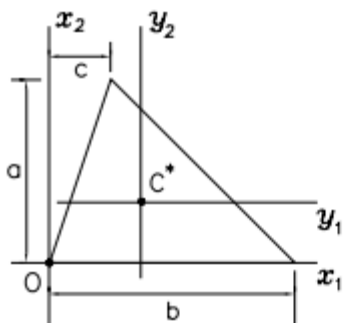


$$C = a$$

$$x_1^* = \frac{a}{2}$$

$$x_2^* = 0$$

Triângulo

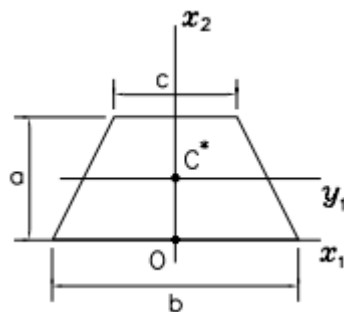


$$A = \frac{ab}{2}$$

$$x_1^* = \frac{(b+c)}{3}$$

$$x_2^* = \frac{a}{3}$$

Trapézio Isósceles

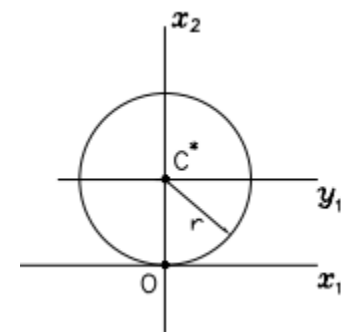


$$A = \frac{a(b+c)}{2}$$

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = \frac{a(b+2c)}{3(b+c)}$$

Círculo

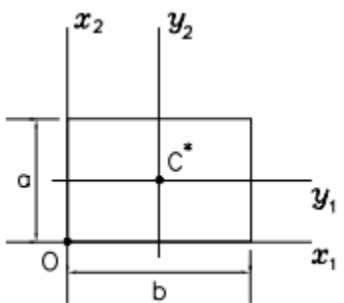


$$A = \pi r^2$$

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = r$$

Retângulo

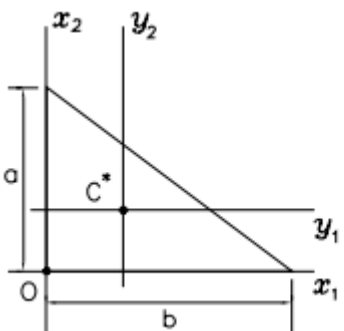


$$A = ab$$

$$x_1^* = \frac{b}{2}$$

$$x_2^* = \frac{a}{2}$$

Triângulo Reto

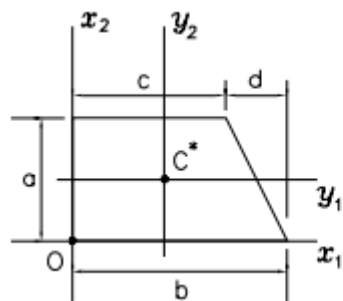


$$A = \frac{ab}{2}$$

$$x_1^* = \frac{b}{3}$$

$$x_2^* = \frac{a}{3}$$

Trapézio Reto

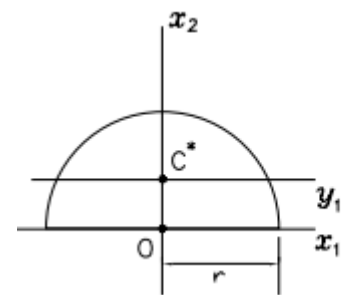


$$A = \frac{a(b+c)}{2}$$

$$x_1^* = \frac{b^2 + bc + c^2}{3(b+c)}$$

$$x_2^* = \frac{a(b+2c)}{3(b+c)}$$

Semi-Círculo



$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = \frac{4r}{3\pi}$$

❑ Propriedades do Centro de Massa

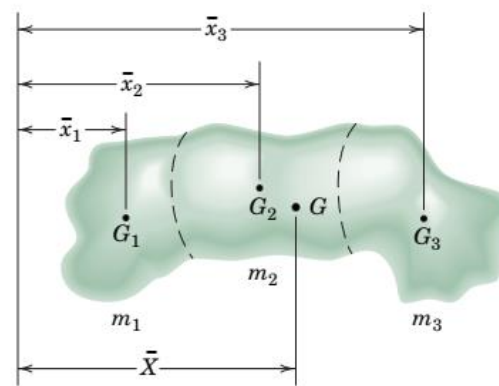
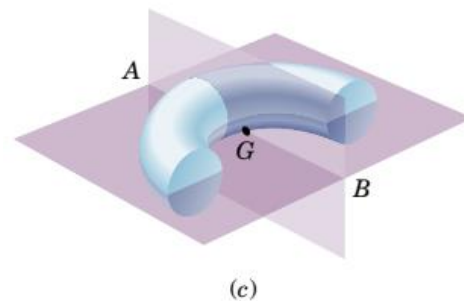
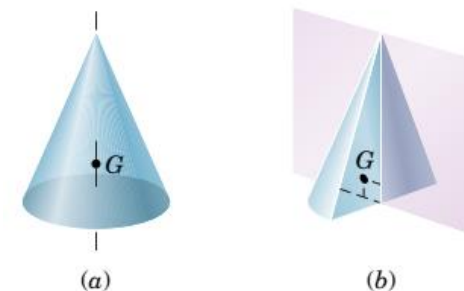
- **Simetria:** Se um corpo **homogêneo** possui algum elemento de simetria (plano ou reta), o centro de massa do corpo é localizado sobre esse elemento de simetria.
- **Composição de corpos:** Se um corpo pode ser convenientemente dividido em partes cujos centros de massa são facilmente determinados, cada parte pode ser tratada como um elemento finito do corpo.
 - Para um corpo composto pela soma (ou subtração) de p partes, o centro de massa pode ser calculado, como segue:

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^p m_i (G_i - O)}{M}$$

$$(G - O) = \frac{\sum_{i=1}^p V_i (G_i - O)}{V}$$

onde m_i (V_i) é a massa (volume) e $(G_i - O)$ o vetor posição do centro de massa de **cada parte**, e M (V) é a massa (volume) **total** do corpo.

- Atenção para quando uma cavidade (ou furo) é considerada como parte do corpo. Nesse caso, a massa correspondente deve ser tratada com uma grandeza **negativa** (remoção de material).



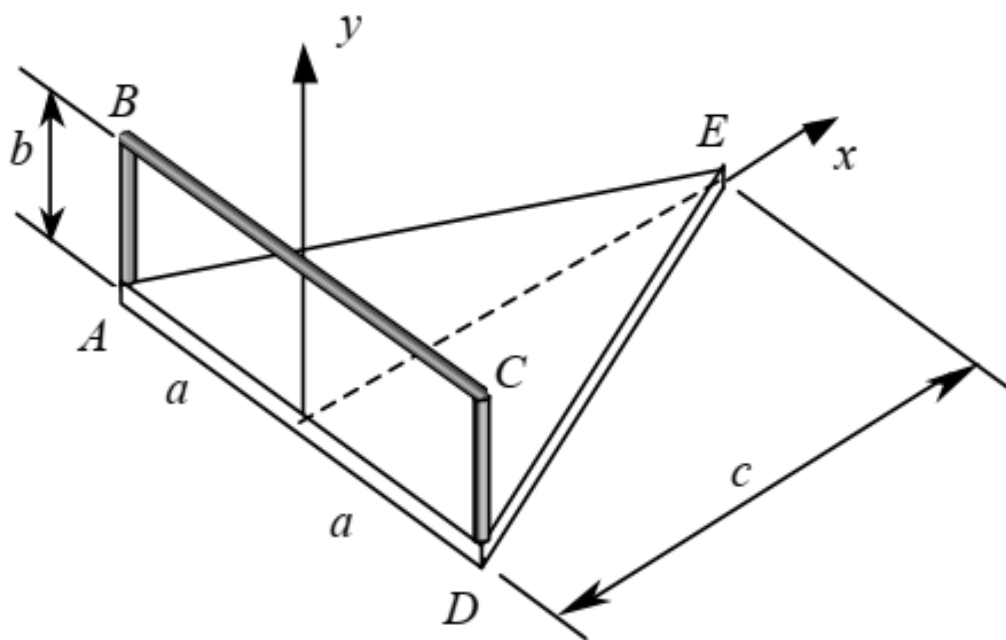
Propriedades de simetria (acima) e composição (abaixo) do centro de massa. Fonte: [1].

Exercício 2

2000 – P1 – Q2

Questão 2

A placa triangular AED tem massa $3m$, as barras AB e CD tem massa m (cada uma) e a barra BC tem massa $2m$. Todos os sólidos são homogêneos.



- Determine as coordenadas do baricentro da placa triangular AED . (0,5)
- Determine as coordenadas do baricentro da barra $ABCD$. (1,0)
- Determine as coordenadas do baricentro do sólido composto pela placa AED e pela barra $ABCD$. (1,0)



❑ Exercício 2 (cont.)

2000 – P1 – Q2

a) Placa:

$$\bar{x}_P = \frac{c}{3}$$

$$\bar{y}_P = 0$$

$$\bar{z}_P = 0$$

b) Barra:

$$\bar{x}_B = 0$$

$$\bar{y}_B = \frac{m \cdot \frac{b}{2} + 2m \cdot b + m \cdot \frac{b}{2}}{m + 2m + m} = \frac{3mb}{4m}$$

$$\bar{y}_B = \frac{3b}{4}$$

$$\bar{z}_B = 0$$

c) Sólido composto:

$$\bar{x}_S = \frac{3m \cdot \frac{c}{3} + 4m \cdot 0}{3m + 4m} = \frac{mc}{7m}$$

$$\bar{x}_S = \frac{c}{7}$$

$$\bar{y}_S = \frac{3m \cdot 0 + 4m \cdot \frac{3b}{4}}{3m + 4m} = \frac{3mb}{7m}$$

$$\bar{y}_S = \frac{3b}{7}$$

$$\bar{z}_S = 0$$



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Forças Distribuídas
3. Sistemas de Forças Paralelas
4. Centro de Gravidade, Centro de Massa e Baricentro
- 5. Hidrostática**
6. Referências

❑ Hidrostática

➤ Hidrostática diz respeito ao estudo de fluidos (líquidos e gases) em **repouso**. Nestas condições:

- a pressão em qualquer ponto do fluido é de **compressão** e igual em **todas** as direções (Lei de Pascal);
- as forças distribuídas exercidas pelo fluido são **normais** às superfícies de corpos submersos, **independente da geometria dos corpos**;
- a magnitude da pressão do fluido (ou pressão hidrostática) depende da distância vertical medida em relação ao nível da superfície do fluido;
- para fluidos incompressíveis ($\rho = \text{constante}$), a variação da pressão hidrostática com a distância vertical em relação ao nível de um reservatório é dada pela **Lei Fundamental da Hidrostática**:

$$p = p_0 + \rho gh$$

p = pressão do fluido (hidrostática) [Pa]

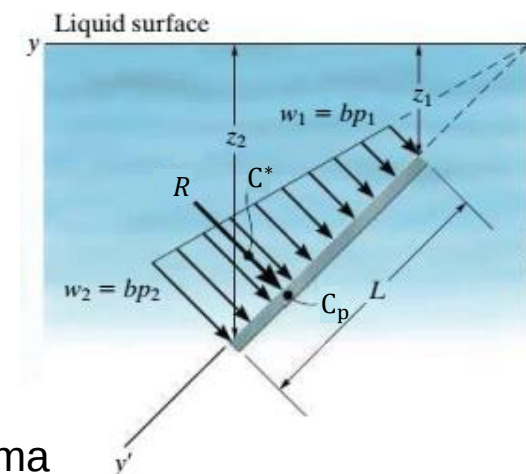
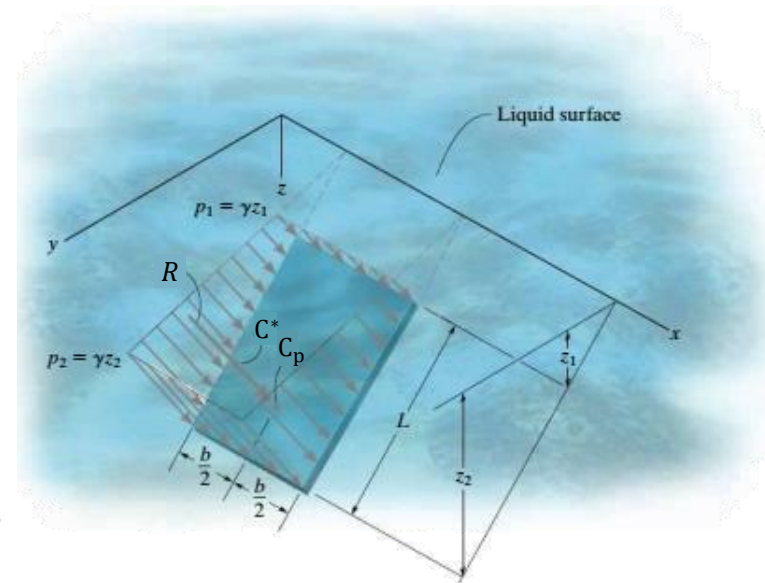
p_0 = pressão atmosférica [Pa]

ρ = densidade do fluido [kg/m^3]

g = aceleração da gravidade [m/s^2]

h = distância em relação à superfície do fluido [m]

- Para sistemas abertos a atmosfera, p_0 atua em todas as superfícies, gerando uma resultante nula. Nessas condições, pode-se considerar $p = \rho gh$ (pressão relativa).



Placa retangular submersa sujeita a forças hidrostáticas. Fonte: adaptado de [6].

❑ Hidrostática

➤ Superfícies Planas com Geometria Genérica

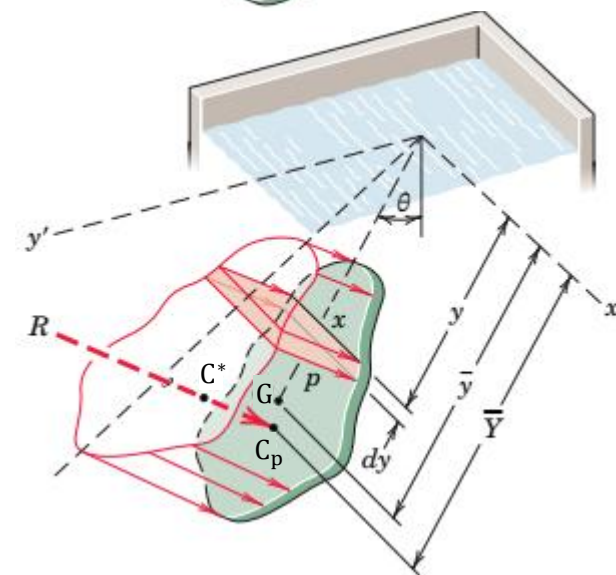
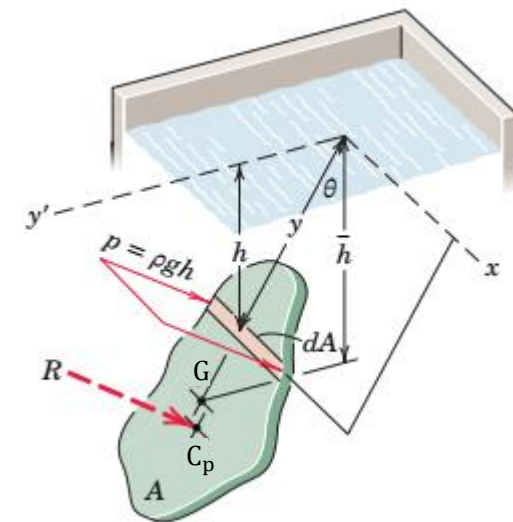
- A ação da pressão hidrostática sobre **superfícies planas** com geometrias genéricas (largura variável) submersas constitui um **sistema de forças paralelas** distribuídas sobre a superfície (ou sistema de forças hidrostáticas);
- Todos os conceitos de sistemas de forças paralelas se aplicam a esses casos.
- A **magnitude** da força resultante desse sistema de forças pode ser calculado, como segue:

$$R = \underbrace{\sum_{i=1}^n R_i}_{\text{Somatório das forças hidrostáticas em cada fatia da superfície}} = \sum_{i=1}^n p_i A_i \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad R = \underbrace{\int p(x, y) dA}_{\text{Volume do prisma de pressões}}$$

Somatório das forças hidrostáticas em cada fatia da superfície

Volume do prisma de pressões

- A **resultante das forças hidrostáticas é normal à superfície, de compressão** e igual ao volume do prisma de pressões.

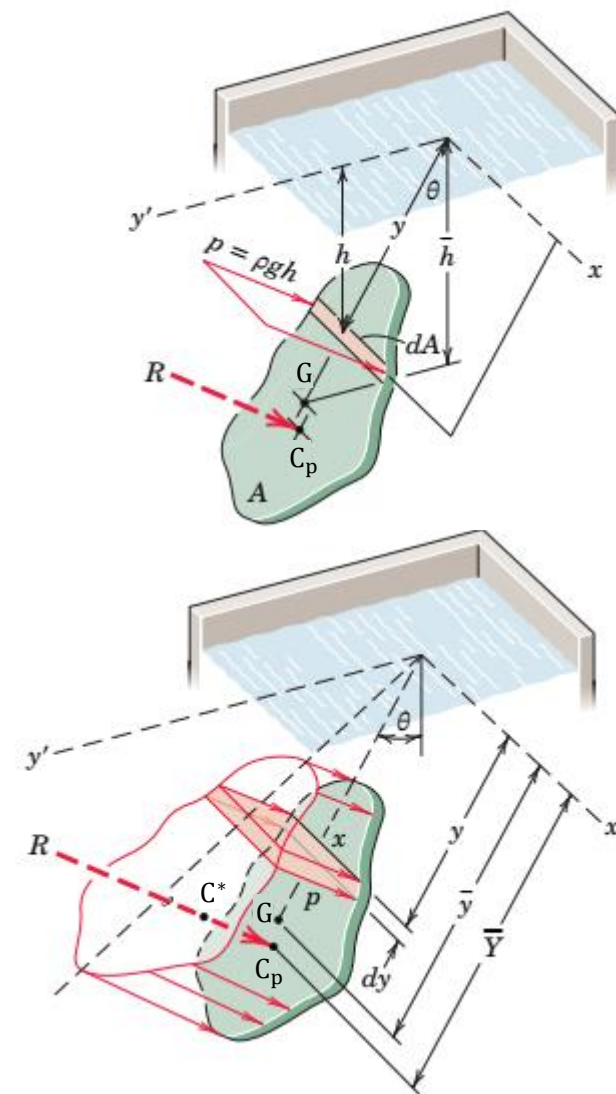


Superfície plana de geometria genérica submersa e sujeita a forças hidrostáticas. Fonte: adaptado de [1].

❑ Hidrostática

➤ Superfícies Planas com Geometria Genérica

- Como o **sistema de forças hidrostáticas** constituído é um sistema de forças paralelas, ele **pode ser reduzido a uma única força $\vec{R}$** aplicada em qualquer ponto do seu Eixo Central.
- Um ponto fisicamente conveniente para a aplicação de $\vec{R}$ corresponde ao ponto de **intersecção do Eixo Central com a superfície**. Esse ponto recebe o nome de **centro de pressão C_p** .
- Atenção para a distinção entre:
 - centro de pressão (C_p), localizado na superfície;
 - centro de massa (G) ou baricentro da superfície (C);
 - centro de forças paralelas do sistema de forças (C^*), **não** localizado na superfície.



Superfície plana de geometria genérica submersa e sujeita a forças hidrostáticas. Fonte: adaptado de [1].

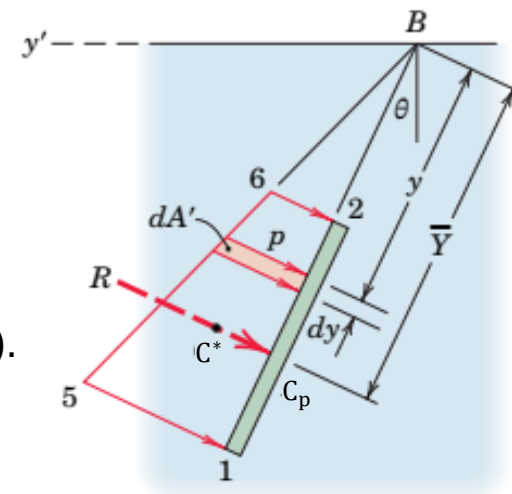
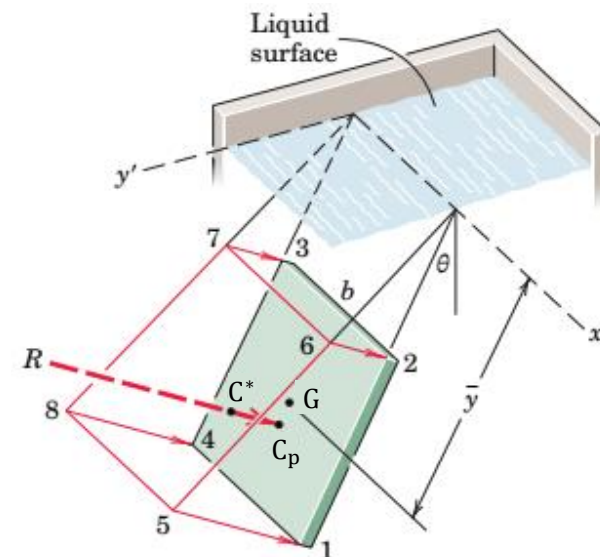
❑ Hidrostática

➤ Superfícies Planas Retangulares

- No caso de superfícies planas **retangulares** (largura constante), a distribuição de pressões em cada seção vertical normal à superfície é **idêntica**.
- Dessa forma, a análise do problema pode ser realizada a partir da vista 2D de uma seção vertical normal à superfície (plano $y'z$).
- Se b é a largura da superfície retangular (direção x), a força resultante pode ser calculada, como segue:

$$R = \int p(x, y) dA = \int p(x, y) b dy = b \underbrace{\int p(x, y) dy}_{\text{Área da seção vertical normal à superfície (A')}} \Rightarrow \underbrace{R = bA'}_{\text{Volume do prisma de pressões}}$$

- Não confundir a área da seção vertical (A') com a área da superfície retangular ($A = bL$).
- Para a solução do problema no plano definido pela seção vertical, e admitindo um sistema de coordenadas com um dos eixos alinhado com a direção y , basta determinar apenas a coordenada y_{C_p} do centro de pressão.

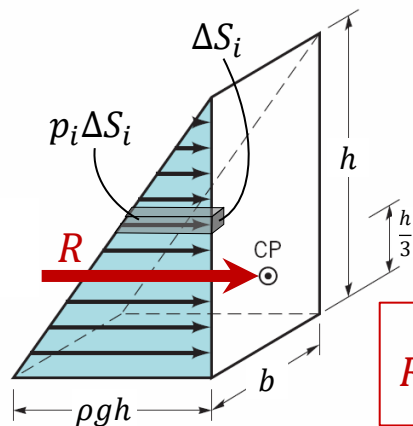
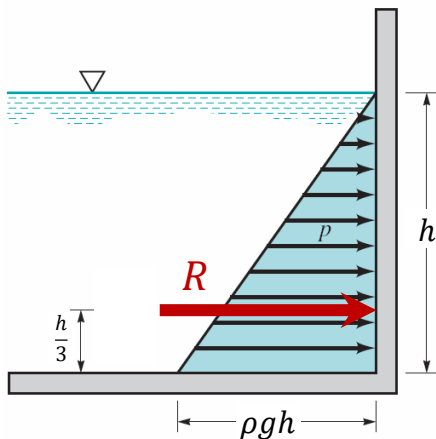


Superfície plana retangular submersa e sujeita a forças hidrostáticas. Fonte: adaptado de [1].

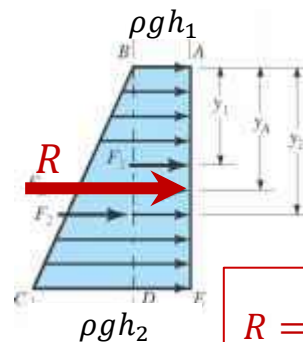
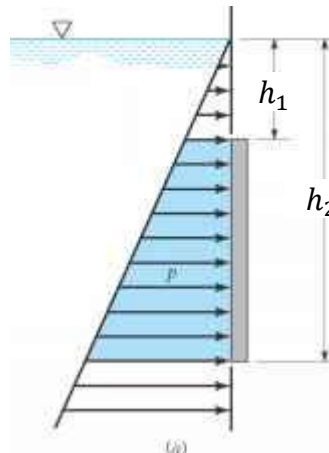
Hidrostática

➤ Superfícies Planas Retangulares

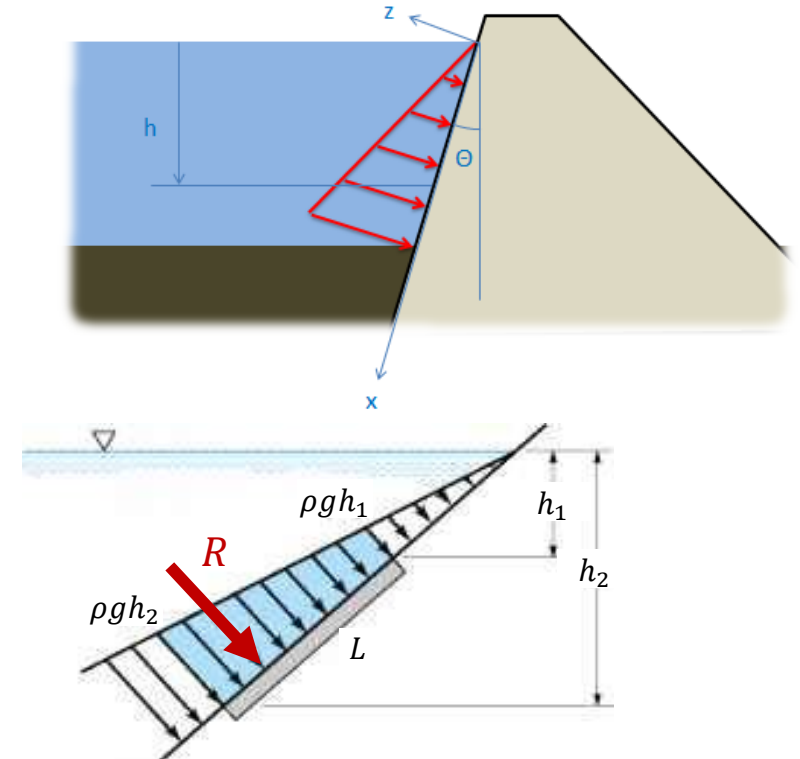
- Pressões hidrostáticas são sempre **normais** às superfícies
- A magnitude das pressões hidrostáticas varia **linearmente** com a profundidade
- A força resultante é sempre normal às superfícies



$$R = \frac{\rho g h^2 b}{2}$$

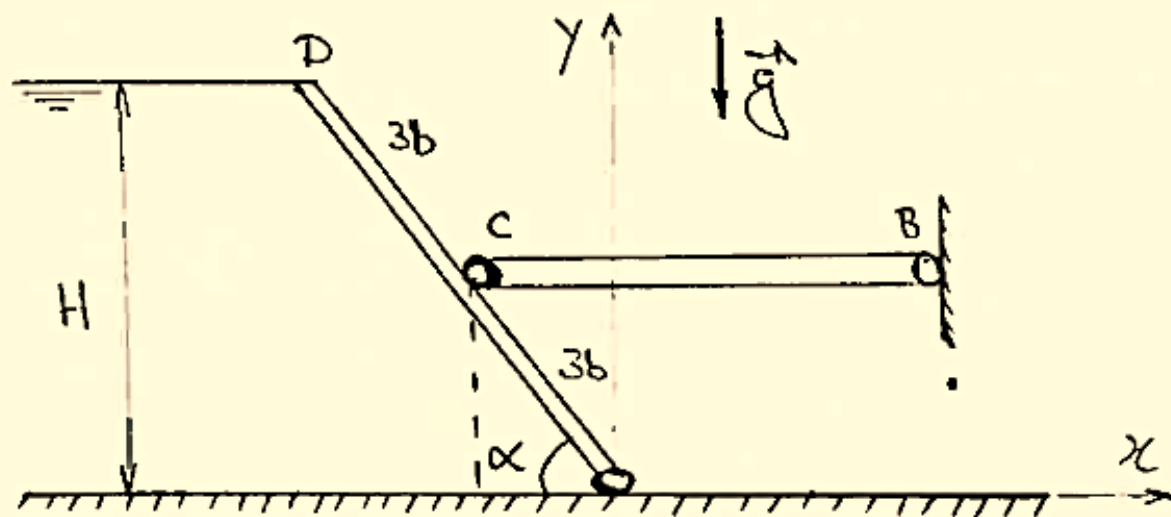


$$R = \frac{\rho g (h_1 + h_2)(h_2 - h_1)b}{2}$$



$$R = \frac{\rho g (h_1 + h_2)Lb}{2}$$

Exercício 3



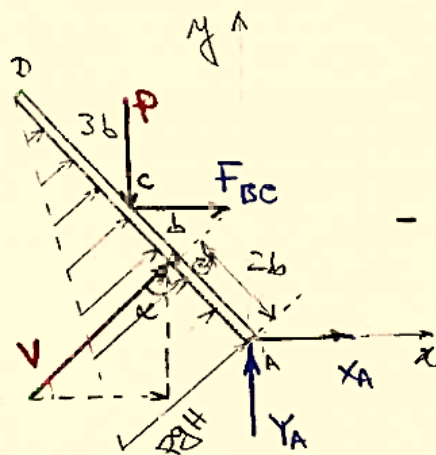
- Canal de largura "15b" (direção z), bloqueado por uma placa retangular de peso ABD.
- Escora horizontal BC espaçada à distância "b" ao longo da largura "15b"
- Peso da placa "P".

Pede-se: Calcular a força de compressão em cada barra.

Exercício 3 (cont.)

1) Sistema: placa isolada, (N° eqs = 3 ; N° incog. = 3)

2) DCL da placa



- As excavos BC são admitidos como pontos livres de fulcros, pois não há carregamentos laterais atuantes sobre os mesmos.

- Hidrostática:

$V \Rightarrow$ volume do prisma de pressão:

$$V = \frac{\rho g H \cdot 6b \cdot 15b}{2} = \rho g H b^2 \cdot 45, \quad H = 6b \sin \alpha$$

$$V = 270 \rho g b^3 \sin \alpha$$

- Ponto de aplicação de V : coordenada

$$Y_A' = \frac{1}{3} \cdot 6b = 2b \text{ do baricentro do volume de pressão.}$$



❑ Exercício 3 (cont.)

3) Equações de Equilíbrio

$$\vec{R} = \vec{0}, \quad \vec{M}_A = \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = 0 : X_A + F_{BC} + V \sin \alpha = 0 \end{array} \right.$$

$$R_y = 0 : Y_A - P + V \cos \alpha = 0 \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_A^z = 0 : -V \cdot 2b - F_{BC} 3b \sin \alpha + P 3b \cos \alpha = 0 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

❑ Exercício 3 (cont.)

4) Solução do Sistema Linear

$$Y_A = P - 270 \rho g b^3 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \boxed{Y_A = P - 135 \rho g b^3 \sin 2\alpha}$$

$$F_{BC} \cdot 35 \sin \alpha = 35 \cos \alpha P - 26 \cdot 270 \rho g b^3 \sin \alpha$$

$$F_{BC} = \frac{35 \cos \alpha P}{35 \sin \alpha} - \frac{26 \cdot 270 \rho g b^3 \sin \alpha}{35 \sin \alpha} \Rightarrow \boxed{F_{BC} = \frac{P}{\tan \alpha} - 180 \rho g b^3}$$

$$X_A = -F_{BC} - V \sin \alpha = 180 \rho g b^3 - \frac{P}{\tan \alpha} - 270 \rho g b^3 \sin^2 \alpha$$

$$\boxed{X_A = 90 \rho g b^3 (2 - 3 \sin^2 \alpha) - \frac{P}{\tan \alpha}}$$

❑ Exercício 3 (cont.)

- A força F_{BC} colúmbda acima equivale ao esforço total suportado por todos os escor.
Portanto, em cada escor, tem-se:

$$\bar{F}_{BC}' = \frac{\bar{F}_{BC}}{\frac{16}{15+1}} \Rightarrow \boxed{\bar{F}_{BC}' = \frac{P}{16 \lg x} - \frac{45 \rho g b^3}{4}}$$

$F_{BC}' > 0$: tração

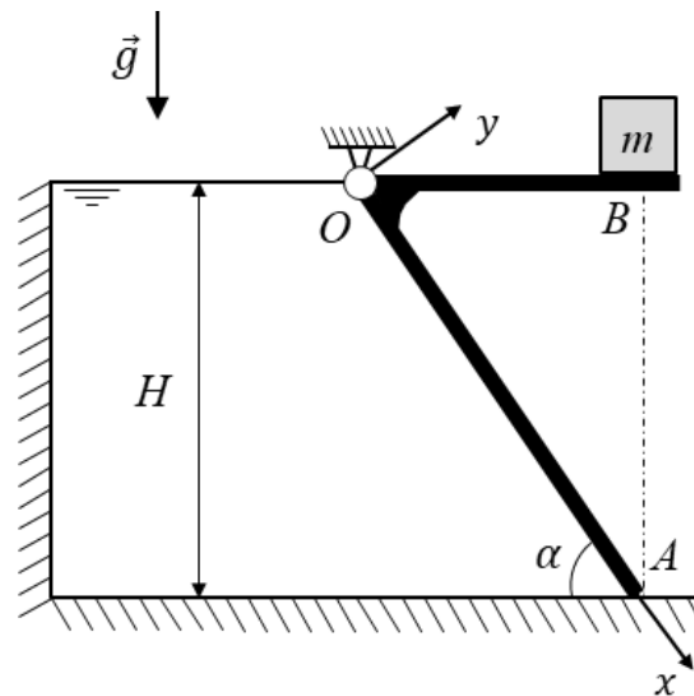
$F_{BC}' < 0$: compressão (mais provável, pois a força hidrostática tende a ser muito maior que o peso da placa.
(há ↑ influência de P)

Exercício 4

2018R – P1 – Q2

2ª Questão (3,0 pontos). A figura mostra a seção transversal de um reservatório, de largura L (ortogonal ao plano da figura), projetado para armazenar um fluido ideal de densidade ρ (kg/m^3). O fluido é mantido no reservatório por meio da comporta AOB , de massa desprezível, articulada em O e apoiada no solo em A , sem atrito. A altura máxima H de fluido que pode ser armazenado no reservatório é controlada por um contrapeso, de massa m (kg), situado na extremidade B da comporta. A aceleração da gravidade é g (m/s^2). Nestas condições, pede-se:

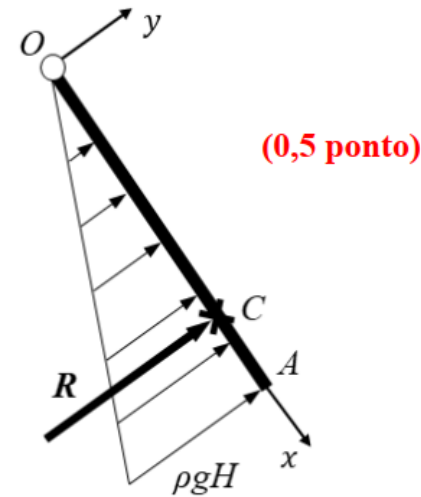
- construir o diagrama de forças hidrostáticas atuantes sobre a superfície AO ;
- determinar a resultante R do sistema de forças hidrostáticas considerado no item (a);
- determinar a abscissa x do centro de pressões do sistema de forças hidrostáticas considerado no item (a);
- desenhar o diagrama de corpo livre da comporta AOB ;
- determinar o esforço atuante no ponto de apoio A ;
- determinar o valor mínimo da massa do contrapeso necessária para manter o sistema sempre em equilíbrio estático.



Exercício 4

2018R – P1 – Q2

(a) O diagrama de forças hidrostáticas atuantes sobre a superfície AO é ilustrado abaixo:



(b) A resultante R do sistema de forças hidrostáticas corresponde ao volume do prisma de pressões, cuja seção transversal é ilustrada na solução do item a):

$$R \equiv \text{volume do prisma de pressões} \Rightarrow R = \frac{\rho g H^2 L}{2 \sin \alpha} \quad (0,5 \text{ ponto})$$

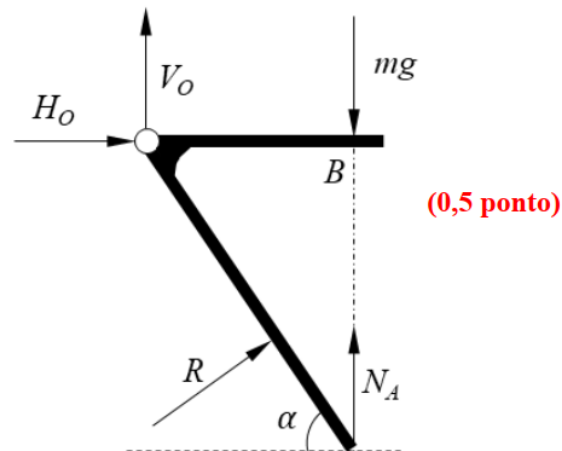
(c) A abscissa x do centro de pressões C do sistema de forças hidrostáticas corresponde à projeção, na superfície AO , do baricentro da seção transversal do prisma de pressões ilustrada na solução do item a). Portanto:

$$x_C = \frac{2H}{3 \sin \alpha} \quad (0,5 \text{ ponto})$$

Exercício 4

2018R – P1 – Q2

(d) O diagrama de corpo livre da comporta AOB é ilustrado abaixo:



(e) Calculando o momento resultante com respeito ao pólo O , e considerando a condição de equilíbrio estático, tem-se:

$$\sum \vec{M}_O = -mg \frac{H}{\tan \alpha} + N_A \frac{H}{\tan \alpha} + R x_C = 0$$

$$-mg \frac{H}{\tan \alpha} + N_A \frac{H}{\tan \alpha} + \left(\frac{\rho g H^2 L}{2 \sin \alpha} \right) \frac{2H}{3 \sin \alpha} = 0 \Rightarrow N_A = mg - \frac{\rho g H^2 L}{3 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (0,5 \text{ ponto})$$

(f) Para o sistema permanecer sempre em equilíbrio estático, a seguinte condição deve ser satisfeita:

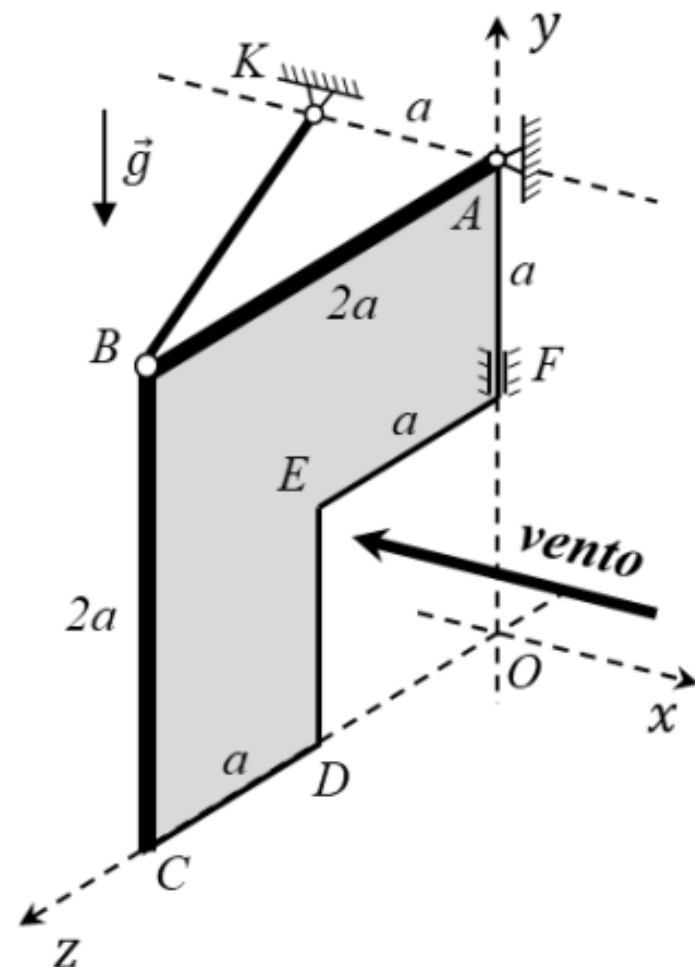
$$N_A \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{\rho H^2 L}{3 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (0,5 \text{ ponto})$$

Exercício 5

2017 – P1 – Q3

Questão 3 (3,5 pontos). A figura ao lado mostra um letreiro constituído por uma placa homogênea $ABCDEF$ localizada no plano vertical Oyz . A placa possui peso $3P$, e é sustentada por uma articulação no ponto A , um anel em F e por uma barra biarticulada BK de massa desprezível. A barra BK está localizada em um plano horizontal paralelo a Oxz . Além do peso próprio, a placa é atingida por um vento lateral na direção do eixo Ox . Admitindo-se que, por simplicidade, o campo de pressão p aplicado pelo vento seja constante e uniformemente distribuído sobre superfície da placa:

- Determine a posição do centro de massa ($G - O$);
- Determine a força V equivalente à ação do vento sobre a placa, bem como o seu ponto de aplicação;
- Construa o diagrama de corpo livre da placa;
- Determine as forças atuantes no ponto A da placa.



❑ Exercício 5 (cont.)

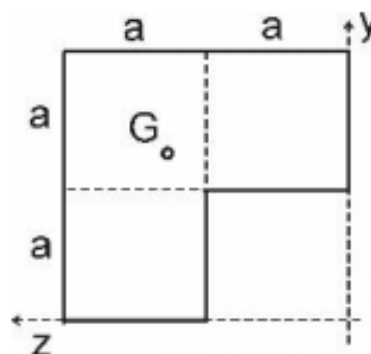
2017 – P1 – Q3

(a) Para o baricentro G temos: **(0,5)**

$$x_G = 0$$

$$y_G = \frac{P\frac{a}{2} + 2P\frac{3a}{2}}{3P} = \frac{a + 6a}{6} = \frac{7a}{6}$$

$$z_G = \frac{P\frac{a}{2} + 2P\frac{3a}{2}}{3P} = \frac{7a}{6}$$



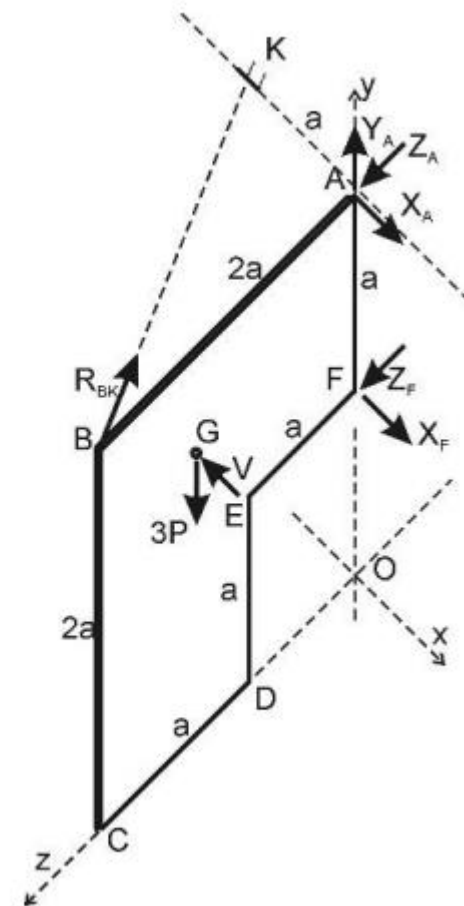
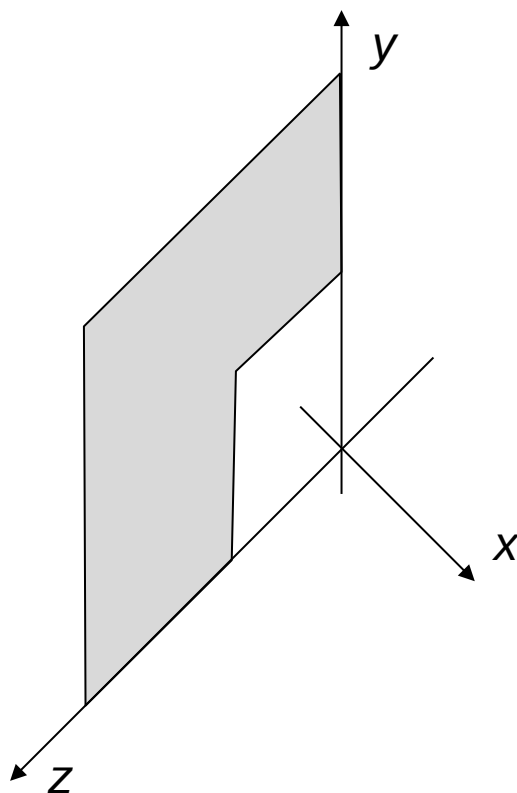
(b) pressão constante: $V = 3a^2p$ **(0,5)**

O centro das forças de pressão é o próprio baricentro da placa; portanto, a resposta é:

$$\vec{V} = -3a^2p\vec{i}, \text{ aplicada em } G = \left(0; \frac{7a}{6}; \frac{7a}{6}\right) \quad \textbf{(0,5)}$$

❑ Exercício 5 (cont.)

2017 – P1 – Q3



Exercício 5 (cont.)

2017 – P1 – Q3

d) Para o equilíbrio da placa, temos:

$$\vec{F}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}; \quad A(0; 2a; 0)$$

$$\vec{F}_B = \vec{R}_{BK} = -R_{BK} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{k} \right); \quad B(0; 2a; 2a)$$

$$\vec{F}_F = X_F \vec{i} + Z_F \vec{k}; \quad F(0; a; 0)$$

$$\vec{F}_G = -V \vec{i} - 3P \vec{j}; \quad G\left(0; \frac{7a}{6}; \frac{7a}{6}\right)$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0}:$$

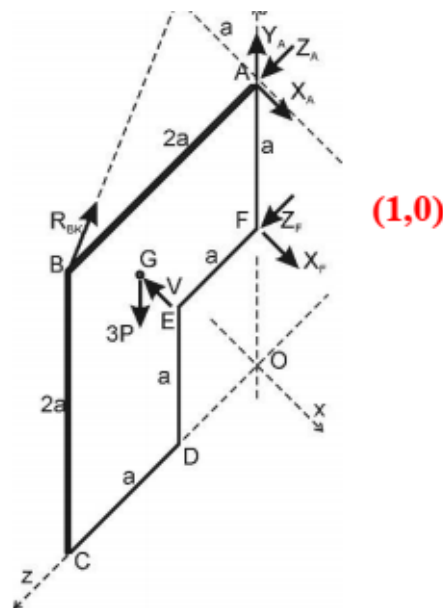
$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_F + \vec{F}_G = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A - R_{BK} \frac{1}{\sqrt{5}} - V + X_F = 0 \\ Y_A - 3P = 0 \\ Z_A - R_{BK} \frac{2}{\sqrt{5}} + Z_F = 0 \end{cases} \quad (0,5)$$

$$\sum \vec{M}_F = \vec{0}:$$

$$(A - F) \wedge \vec{F}_A + (B - F) \wedge \vec{F}_B + (G - F) \wedge \vec{F}_G = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aZ_A - a \frac{2R_{BK}}{\sqrt{5}} + \frac{7a}{6} 3P = 0 \\ -2a \frac{R_{BK}}{\sqrt{5}} - \frac{7a}{6} V = 0 \\ -aX_A + a \frac{R_{BK}}{\sqrt{5}} + \frac{a}{6} V = 0 \end{cases} \quad (0,5)$$



Resolvendo:

$$R_{BK} = -\frac{7\sqrt{5}}{12}V; \quad X_A = -\frac{5V}{12}; \quad Y_A = 3P; \quad Z_A = -\frac{7}{6}(3P + V)$$

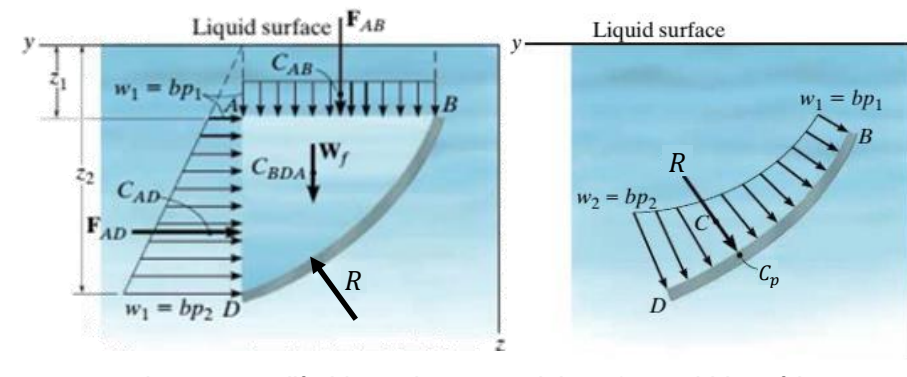
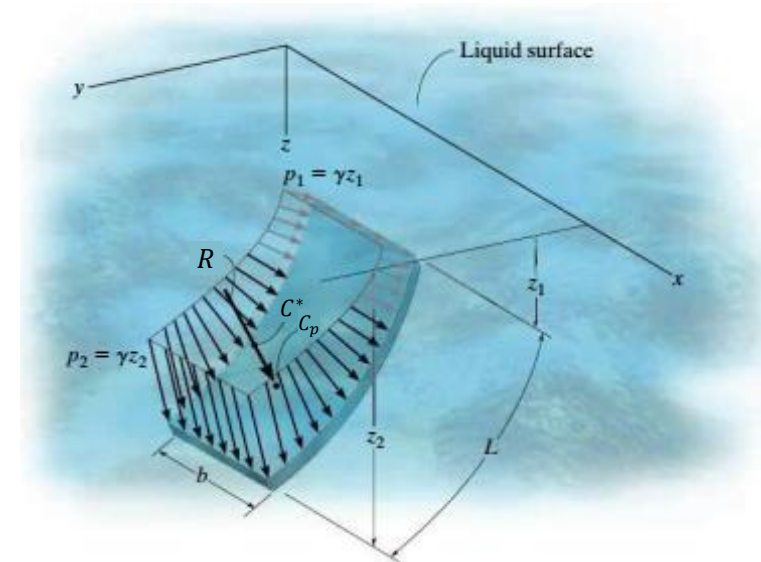
Resposta:

$$\vec{F}_A = -\left(\frac{5V}{12}\right)\vec{i} + (3P)\vec{j} - \left[\frac{7(3P + V)}{6}\right]\vec{k} = -\left(\frac{5a^2p}{4}\right)\vec{i} + (3P)\vec{j} - \left[\frac{7(3P + 3a^2p)}{6}\right]\vec{k}$$

❑ Hidrostática

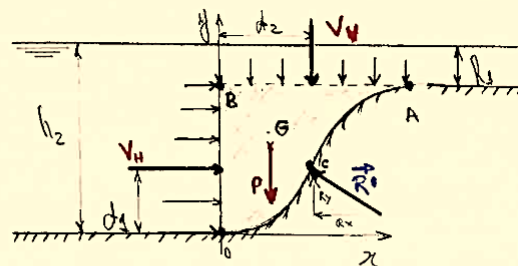
➤ Superfícies Curvas Cilíndricas

- A ação da pressão hidrostática sobre **superfícies curvas cilíndricas** (largura constante) submersas **não** mais constitui um sistema de **forças paralelas** distribuídas.
- As forças hidrostáticas continuam agindo na direção normal às superfícies, porém as direções **entre** as forças não são mais paralelas.
- Os conceitos definidos para sistemas de forças paralelas **não** se aplicam a esses casos.
- A determinação da magnitude da força resultante ($\vec{R}$) e da posição do centro de pressão (C_p) é realizada considerando o **equilíbrio do volume de líquido delimitado pela superfície curva**.
 - As duas componentes de $\vec{R}$ são obtidas pelo equilíbrio de forças;
 - As duas componentes C_p são obtidas pelo equilíbrio de momento, e pela **intersecção** da linha de ação de $\vec{R}$ com a curva BD .



Placa curva cilíndrica submersa sujeita a forças hidrostáticas.
Fonte: adaptado de [6].

Exercício 4



- Função $y(x) = f(x)$ que define a curva OA é conhecida.

- Considerando as condições, para o equilíbrio estático: $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$:

$$R_x = 0: V_H - R_x' = 0 \quad \therefore \quad \boxed{R_x' = V_H}$$

$$R_y = 0: -P - V + R_y' = 0 \quad \therefore \quad \boxed{R_y' = P + V}$$

$$M_O = 0: -V_H d_1 - V d_2 - P x_G + R_y' x_C + R_x' y_C = 0$$

$$\boxed{R_x' y_C + R_y' x_C = P x_G + V_H d_1 + V d_2} \Rightarrow y_C(x_C)$$

- A solução do problema consiste em:

1) Determinação de $\vec{R}$ de forma a manter o volume de líquido delimitado por OAB em equilíbrio.

2) Ponto de aplicação C obtido pela interseção da linha de ação de $\vec{R}$ e a superfície.

Nota: V_H e V são conhecidos utilizando os conceitos de hidrostática para superfícies planas.

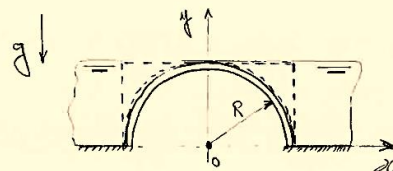
- A equação acima corresponde à equação da linha de ação da resultante $\vec{R}$

- O ponto C de aplicação da resultante pode ser determinado pela interseção da linha de ação de $\vec{R}$ e a curva OA, $y(x) \equiv y_C(x_C)$.

Exercício 5

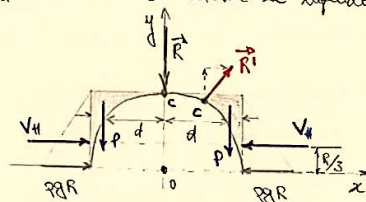
* Exercício

(8)



- Tubo cilíndrico de comprimento L e raio R , submerso em água.
- Reduzir o problema a uma única força.

- Considere o DCL do volume de líquido que delimita o tubo cilíndrico:



- Equações de Equilíbrio

$$R_x = 0 : V_H - V_H + R'_x = 0 \therefore R'_x = 0$$

$$R_y = 0 : -2P + R'_y = 0 \therefore R'_y = 2P$$

$$M_0^z = 0 : -\frac{V_H R}{3} + \frac{V_H R}{3} + P d - P d + R'_y x_c - R'_x y_c = 0$$

(simultânea)

$$R'_y x_c - R'_x y_c = 0 \Rightarrow 2P x_c = 0$$

$$x_c = 0 \therefore y_c = R$$

- Porém, P pode ser determinado em função dos parâmetros do problema:

$$2P = M_L g = \rho V_L g = \rho g (2R \cdot R - \pi R^2 / 2) L = \rho g (2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}) L$$

- Portanto, o problema acima é reduzido a uma única força, tal que:

$$\vec{R} = -\rho g \left(2R^2 - \frac{\pi R^2}{2} \right) L \hat{j}$$

$$x_c = 0$$

$$y_c = R$$

Exercício 6

- Tubo cilíndrico de comprimento L e raio R submerso em água.

- Reduzir o problema a linhas de forças.

- Encontre o DCL do volume de líquido que preenche o tubo:

- Equações de Equilíbrio

$$\begin{cases} R_x = 0: V_H - R_x' = 0 \Rightarrow R_x' = V_H \\ R_y = 0: -2P + V_V - R_y' = 0 \Rightarrow R_y' = V_V - 2P \\ M_G = 0: V_H \frac{R}{3} - V_V \frac{R}{2} + 2P x_G + R_y' x_G - R_x' y_G = 0 \end{cases}$$

- (obtidos: V_H, V_V, P, x_G):

$$V_H = \frac{2\pi R^2 L}{2} = \pi R^2 L \quad P = m g = \rho V_L g = \rho g \left(\pi R^2 - \pi R^2 \frac{2}{2} \right) L$$

$$V_V = \frac{2\pi R^2 L}{2} = \pi R^2 L \quad 2P = \rho g R^2 \left(2 - \pi \frac{2}{2} \right) L$$

$$(A_1 - A_0) x_G = A_0 x_G^0 - A_1 x_G^0 \Rightarrow \left(\pi R^2 - \pi R^2 \frac{2}{2} \right) x_G = -\pi R^2 \frac{R}{2} - \frac{\pi R^2}{2} \left(-\frac{4R}{3} \right)$$

$$\left(2 - \pi \frac{2}{2} \right) x_G = \frac{-\pi R}{3} + \frac{2\pi R}{3} = \frac{\pi R}{3} \Rightarrow x_G = \frac{R}{3(2 - \pi/2)}$$

∴

$$R_x' = 2\pi g L R^2$$

$$R_y' = \pi g L R^2 \frac{\pi}{2}$$



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Forças Distribuídas
3. Sistemas de Forças Paralelas
4. Centro de Gravidade, Centro de Massa e Baricentro
5. Hidrostática
- 6. Referências**



❑ Referências

- [1] Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.
- [2] Tenenbaum, R. A. **Fundamentals of Appiled Dynamics**, Springer-Verlag New York, Inc. 2004.
- [3] Palanivelu, S., Narasimha Rao, K. V., & Ramarathnam, K. K. (2015). Determination of rolling tyre modal parameters using Finite Element techniques and Operational Modal Analysis. Mechanical Systems and Signal Processing, 64-65, 385–402. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.04.006>.
- [4] Yang W., Lin J., Gao N.-N., Yan, R. Experimental Study on the Static Behavior of Reinforced Warren Circular Hollow Section (CHS) Tubular Trusses. Appl. Sci. 2018, 8, 2237. <https://doi.org/10.3390/app8112237>.
- [5] Catálogo IDEA StatiCa – Structural Design of Steel Connections and Joints. www.ideastatica.com.
- [6] Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 14th edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2017.