PME 3100 – Mecânica I

Estática I

(Corpos Rígidos e Sistemas)

Prof. Francisco J. Profito
fprofito@usp.br

Motivação e Objetivos

- Analisar do comportamento de sistemas estruturais e mecânicos sujeitos a carregamentos e mantidos na condição de **equilíbrio estático**.
- Apresentar os conceitos de forças internas e externas, vínculos, diagramas de corpo livre e sistemas.
- Solução de problemas de equilíbrio estático de sistemas compostos por corpos rígidos, polias, fios, barras articuladas e treliças.
- O objetivo da solução da maioria dos problemas de estática é a determinação dos **esforços reativos** atuantes nos vínculos responsáveis por manter um dado sistema em equilíbrio. O conhecimento de tais esforços é importante para:
    - Dimensionamento de vínculos (*e.g.* articulações, mancais, etc.);
    - Dimensionamento de componentes estruturais (*e.g.* barras, vigas, fios, etc.);
    - Determinação dos esforços solicitantes (internos) atuantes em elementos estruturais para a análise de corpos flexíveis (Mecânica dos Sólidos).

Os conceitos de equilíbrio estático são importante para o projeto de estruturas como os guindastes ilustrados na figura. Fonte [1].

❑ Motivação e Objetivos

Exemplos de estruturas em que os conceitos de equilíbrio estático são importantes para o projeto de engenharia. Fonte [1].

❑ Tipos de Esforços

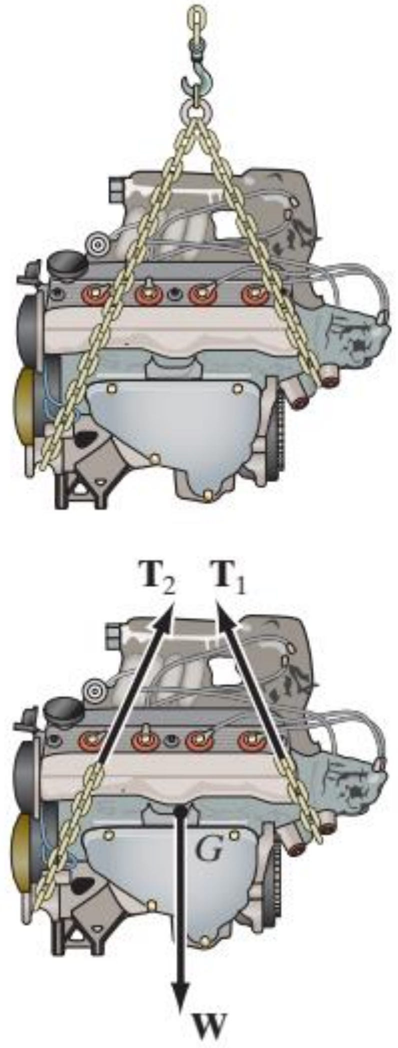
- Dependendo da definição do **sistema** em estudo, dois tipos de esforços são definidos: externos e internos.

- <u>**Esforços externos**</u>: esforços não pertencentes ao **sistema** e associados com a interação do sistema com o meio externo (vínculos, Terra, etc.). Podem ser classificados em dois tipos:

  - <u>***Ativos***</u>: aplicados por elementos externos ao sistema. Geralmente são conhecidos *a priori* para a solução dos problemas (*e.g.* peso, atuadores, etc.);

  - <u>***Reativos***</u>: transmitidos ao sistema pelos vínculos acoplados ao mesmo. Geralmente são **incógnitas** nos problemas e **dependentes** dos esforços ativos. No caso de equilíbrio estático, são os responsáveis por manter o sistema em equilíbrio.

- <u>**Esforços internos**</u>: esforços associados com a interação entre os componentes do **sistema** (ou partículas de um corpo). Esforços internos **não alteram** a condição ou configuração global do sistema.

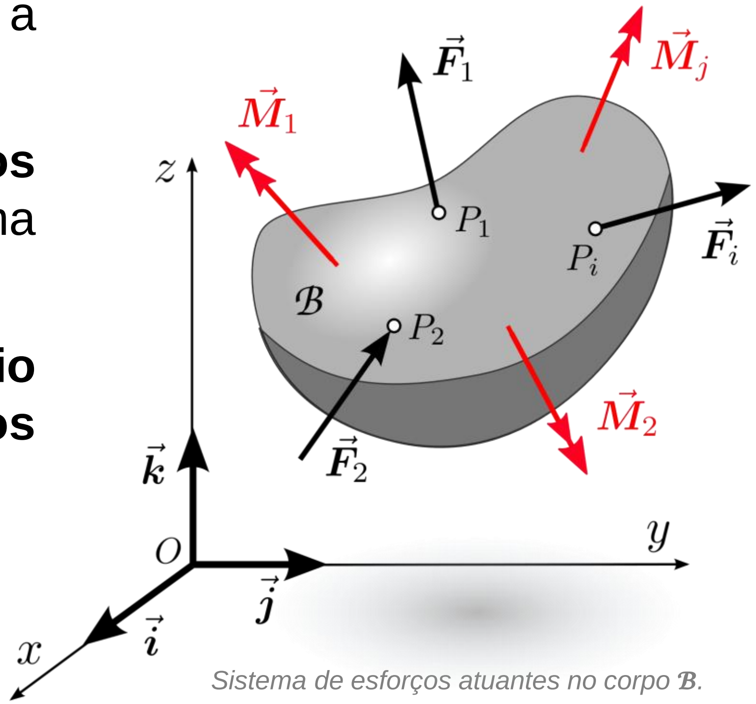


Motor em elevação. Somente o peso e as forças externas aplicadas pelas correntes são ilustradas no DCL. As forças internas entre as partes do motor (parafusos e porcas, eixos e mancais, etc.) se cancelam mutuamente e não são mostradas no DCL. Fonte: [2]

Equilíbrio Estático de um Corpo Rígido

- Um dado corpo rígido $\mathcal{B}$ encontra-se em equilíbrio estático se **todas** as partículas materiais que compõem $\mathcal{B}$ estão em equilíbrio, ou seja, se a **resultante de todas as forças** atuantes em cada partícula é nula.
- Pelo **Princípio da Ação-e-Reação** (3ª Lei de Newton), os **esforços internos** ao corpo se anulam mutuamente, ou seja, o sistema equivalente de esforços internos é nulo.
- Dessa forma, a condição necessária e suficiente para o **equilíbrio estático** de $\mathcal{B}$ é que o **sistema equivalente dos esforços externos** atuantes no corpo seja **nulo**. Matematicamente:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0} \text{ e } \vec{M}_O = \vec{0}, \ \ \forall O}$$



Sistema de esforços atuantes no corpo $\mathcal{B}$.

6 equações (problemas 3D) $\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} M_{Ox} = 0 \\ M_{Oy} = 0 \\ M_{Oz} = 0 \end{cases}$

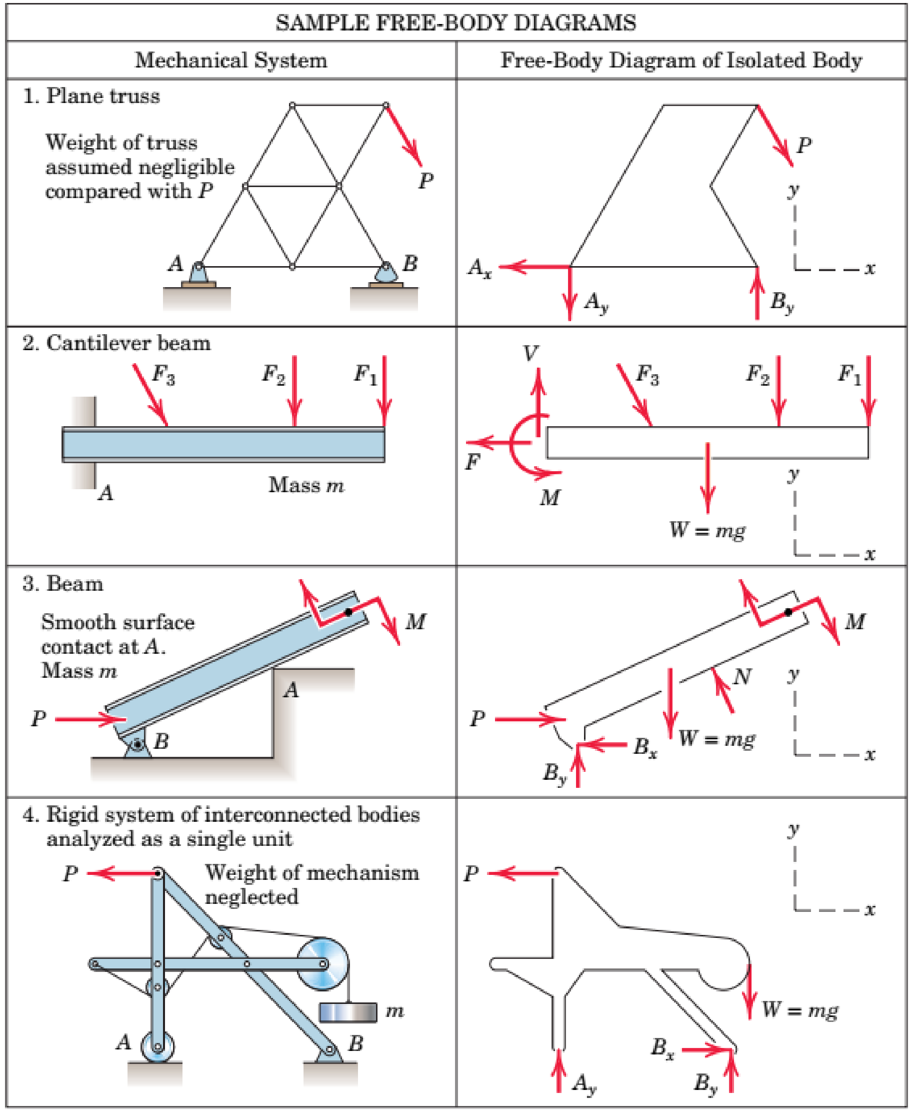
3 equações (problemas 2D) $\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_{Oz} = 0 \end{cases}$

❑ Diagrama de Corpo Livre (DCL)

- Para a solução de problemas de estática, é necessária a especificação completa de **todos os esforços externos** (forças e momentos binários) atuantes sobre o corpo (ou sistema) em equilíbrio.

- Tais esforços são representados no Diagrama de Corpo Livre (DCL):
  - O corpo ou sistema é **isolado** de seus vínculos;
  - O efeito da remoção dos vínculos não pode ser desprezado, ou seja, esforços **reativos** devem ser aplicados nos pontos anteriormente ocupados pelos vínculos.
  - O DCL representa um **sistema de esforços equivalente** ao corpo originalmente vinculado.
  - Atenção para a transmissão dos esforços após a remoção dos vínculos (princípio da ação-e-reação)

- **Apenas esforços <u>externos</u> são representados no DCL (esforços internos se anulam mutuamente).**



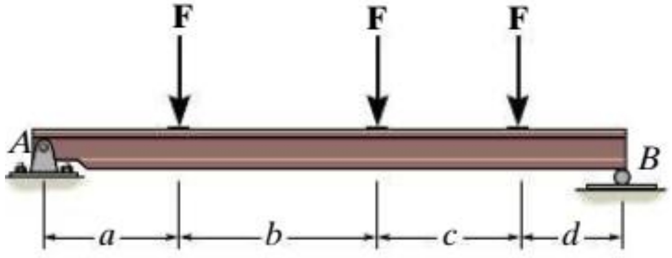
Exemplos de diagramas de corpo livre. Fonte: [1]

❑ Vínculos

- Vínculos são elementos que **restringem** o movimento livre de um dado corpo (ou sistema) no espaço, ou seja, **reduzem** os graus de liberdade (GLs) do mesmo.
- As restrições de movimento impostas por um vínculo ocorrem devido à aplicação de **esforços reativos nos sentidos opostos à tendência de movimento** dos pontos vinculados.
- Os valores dos **esforços reativos** são, em geral, **desconhecidos** (incógnitas do problema).
- No caso de equilíbrio estático, os vínculos são os elementos responsáveis por restringir **totalmente** o movimento de um dado corpo (ou sistema).
- Geralmente, vínculos são aplicados em pontos específicos do corpo (ou sistema).

Vínculos ➡ Restrição dos GLs do Corpo/Sistema ➡ Esforços Reativos (incógnitas)

(a)



(b)

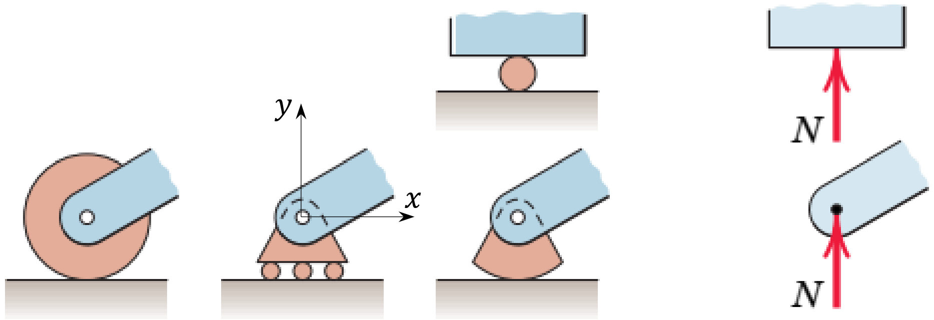
Exemplo de uma viga bi-apoiada por uma articulação (A) e um apoio simples (B). Fonte: [2]

❑ Vínculos

➢ **<u>Apoio Simples</u>:** restringe o movimento de **translação** do ponto vinculado na direção normal de compressão do vínculo (todas as rotações são permitidas).

Problemas 2D

- Restringe 1 GL (translação) do ponto vinculado;
- Impõe **uma componente** de força de reação no ponto vinculado na direção normal de compressão do vínculo;
- Adiciona **uma incógnita** ao problema (componente de força de reação).

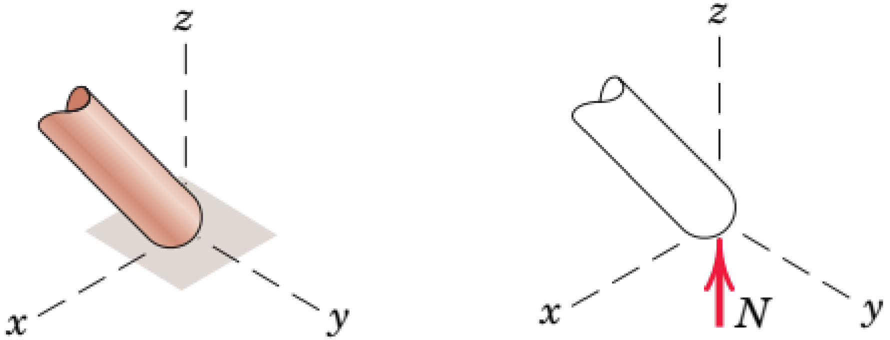


Origem da força de reação. Ação no corpo isolado.

Representação de apoio simples em problemas 2D. Fonte: [1]

Problemas 3D

- Restringe 1 GL (translação) do ponto vinculado;
- Impõe **uma componente** de força de reação no ponto vinculado na direção normal de compressão do vínculo);
- Adiciona **uma incógnita** ao problema (componente de força de reação).



Origem da força de reação. Ação no corpo isolado.

Representação de apoio simples em problemas 3D. Fonte: [1]

❑ Vínculos

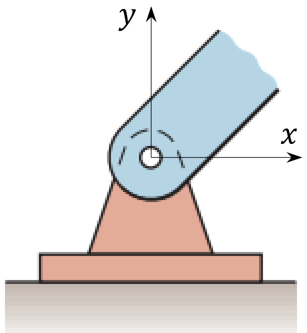
➢ **Articulação:** restringe **todos** os movimentos de **translação** do ponto vinculado (todas as rotações são permitidas).

Probl

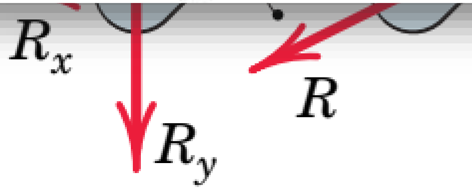
▪ Restringe 2 GLs (tran

▪ Impõe **duas compo** ponto vinculado;

▪ Adiciona **duas incógn** de força de reação)



Origem da força de reação.



Ação no corpo isolado.

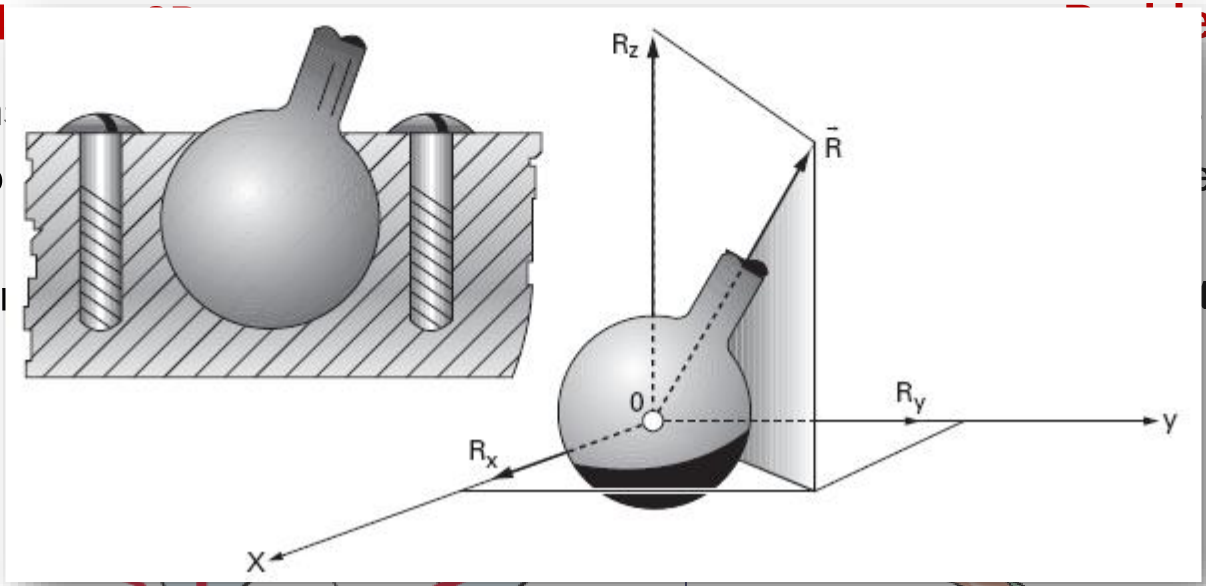
Representação de articulação em problemas 2D. Fonte: [1]

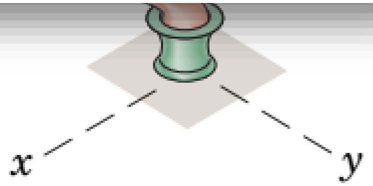
emas 3D

lação) do ponto vinculado;

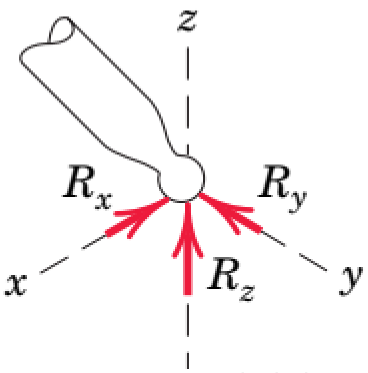
entes de força de reação no

tas ao problema (componentes





Origem da força de reação.



Ação no corpo isolado.

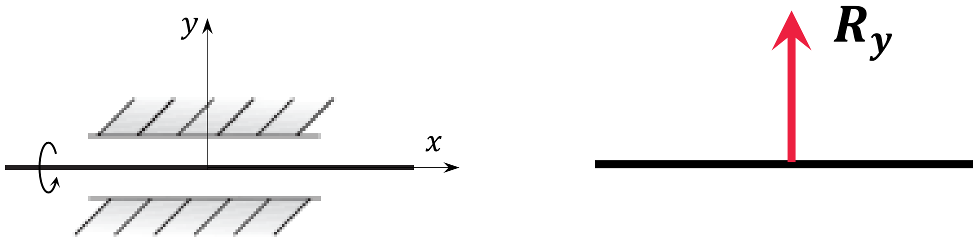
Representação de articulação em problemas 3D. Fonte: [1]

❑ Vínculos

➢ **Anel Simples (ou guia):** restringe os movimentos de **translação** nas **direções perpendiculares** ao eixo de rotação do vínculo (todas as rotações são permitidas).

Problemas 2D

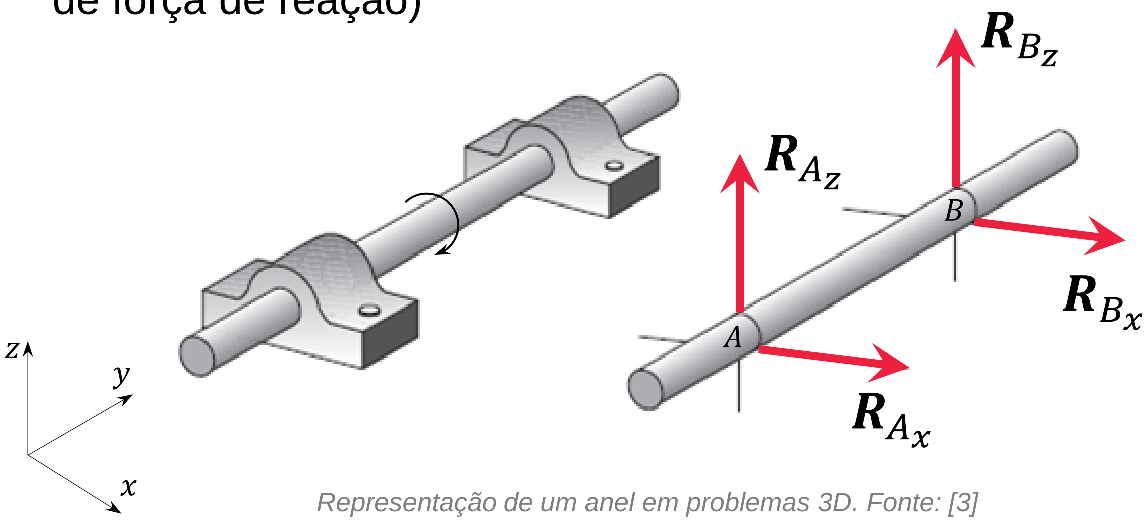
- Restringe 1 GL (translação) do ponto vinculado;
- Impõe **uma componente** de força de reação no ponto vinculado;
- Adiciona **uma incógnita** ao problema (componente de força de reação)



Representação de um anel em problemas 3D. Fonte: [3]

Problemas 3D

- Restringe 2 GLs (translação) do ponto vinculado;
- Impõe **duas componentes** de força de reação no ponto vinculado;
- Adiciona **duas incógnitas** ao problema (componentes de força de reação)



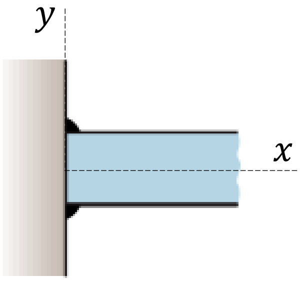
Representação de um anel em problemas 3D. Fonte: [3]

Vínculos

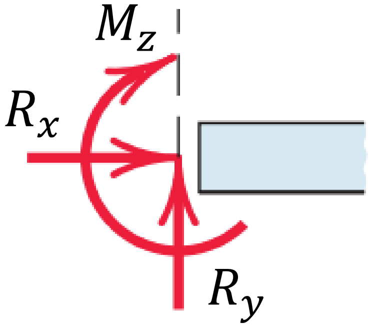
- **Engastamento:** restringe **todos** os movimentos de **translação e rotação** do ponto vinculado.

Problemas 2D

- Restringe 3 GLs (2 translações + 1 rotação) do ponto vinculado;
- Impõe **três componentes** de esforços de reação no ponto vinculado (2 componentes de força + 1 componente de momento);
- Adiciona **três incógnitas** ao problema (componentes de esforços de reação).



Origem da força de reação.

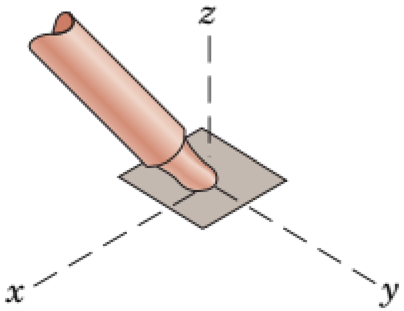


Ação no corpo isolado.

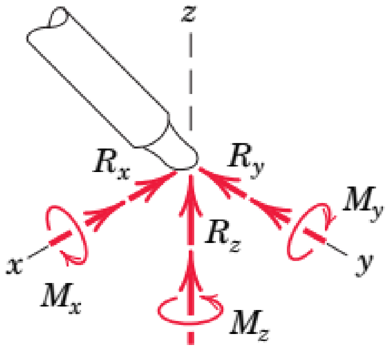
Representação de engastamento em problemas 2D. Fonte: [1]

Problemas 3D

- Restringe 6 GLs (3 translações + 3 rotação) do ponto vinculado;
- Impõe **seis componentes** de esforços de reação no ponto vinculado (3 componentes de força + 3 componentes de momento);
- Adiciona **seis incógnitas** ao problema (componentes de esforços de reação).



Origem da força de reação.

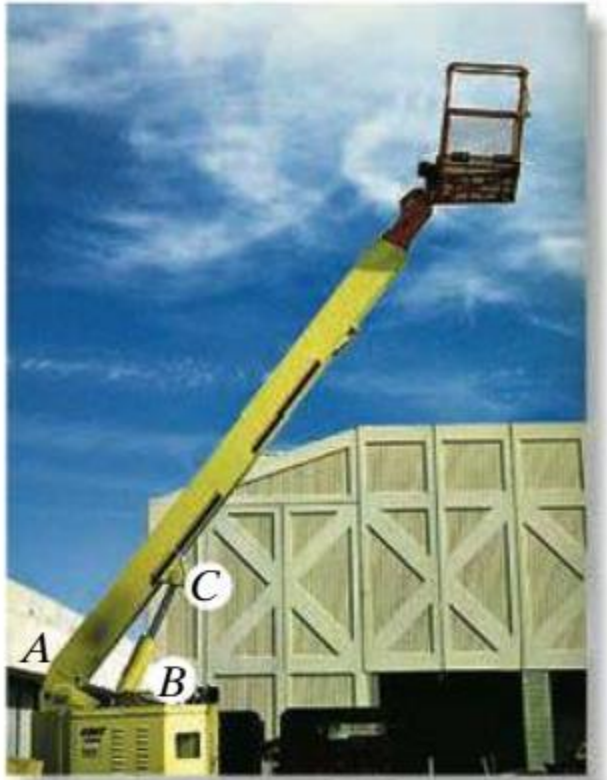


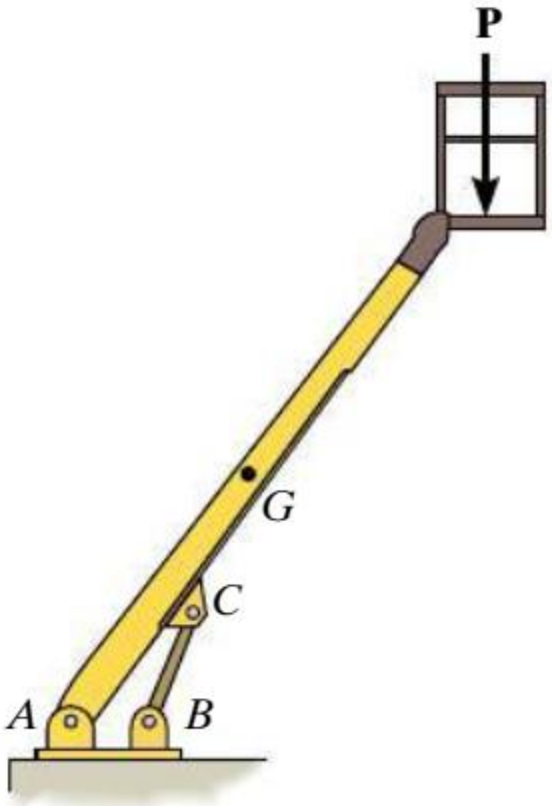
Ação no corpo isolado.

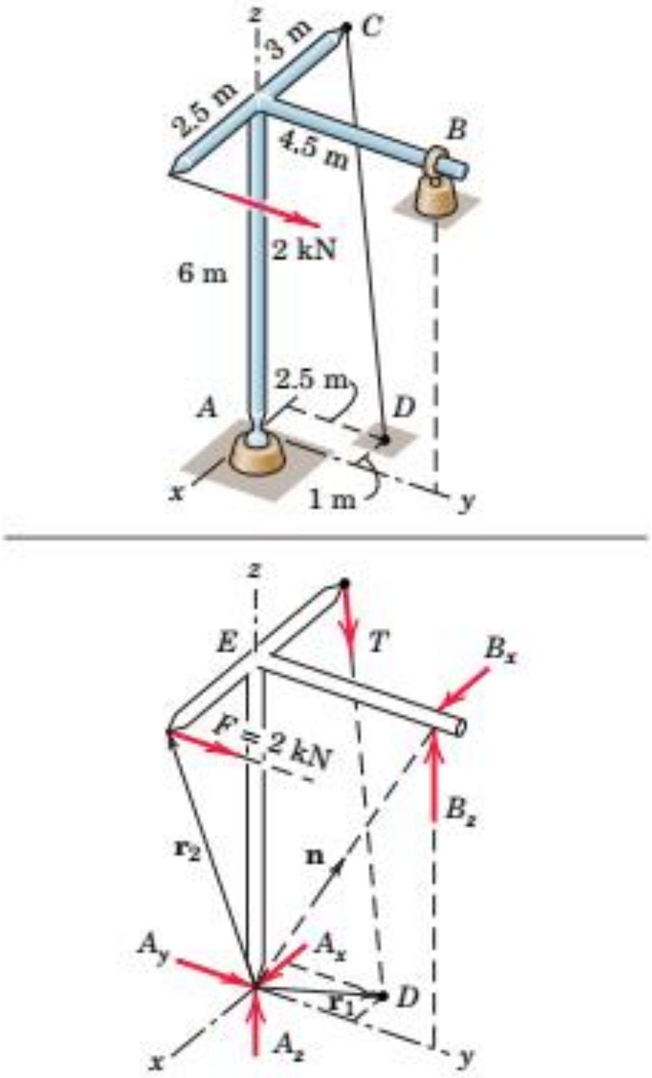
Representação de engastamento em problemas 3D. Fonte: [1]

❑ Vínculos

➢ **Exemplo: Lança de Elevação**



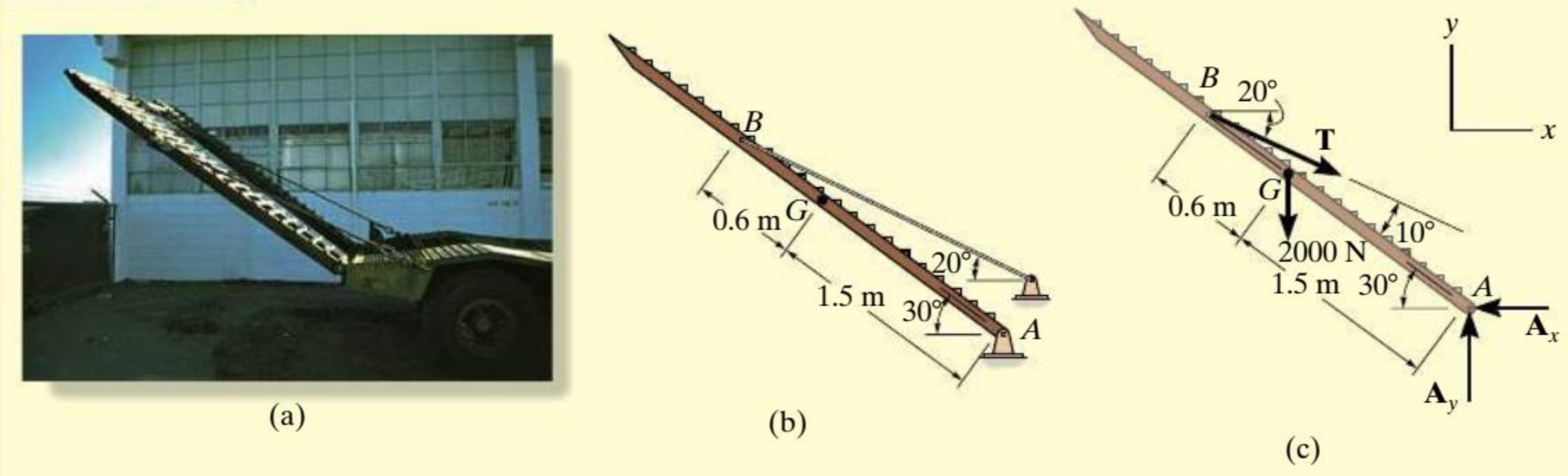




Exemplo da aplicação de vínculos. Fonte: [1,2]

Vínculos

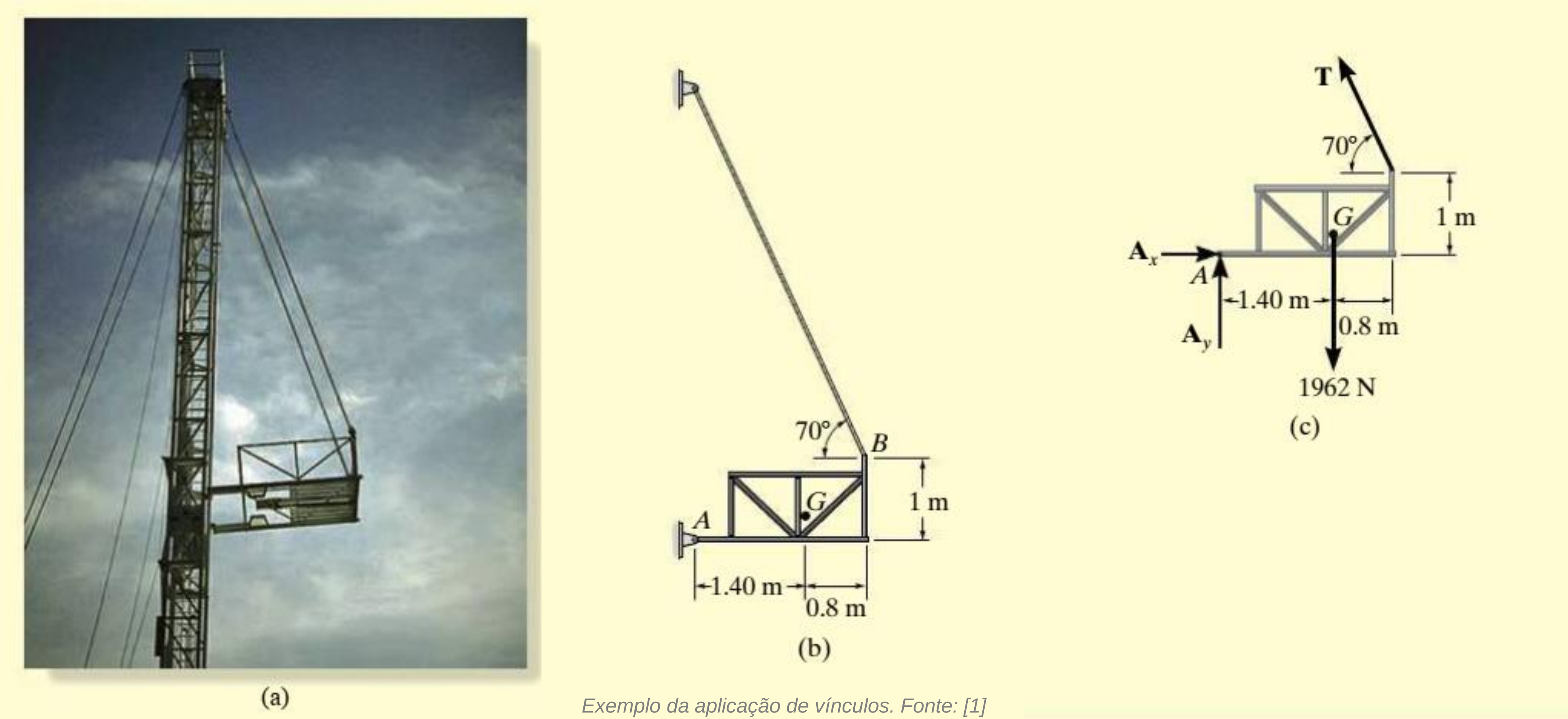
- **Exemplo: Rampa de Caminhão**



Exemplo da aplicação de vínculos. Fonte: [1]

Vínculos

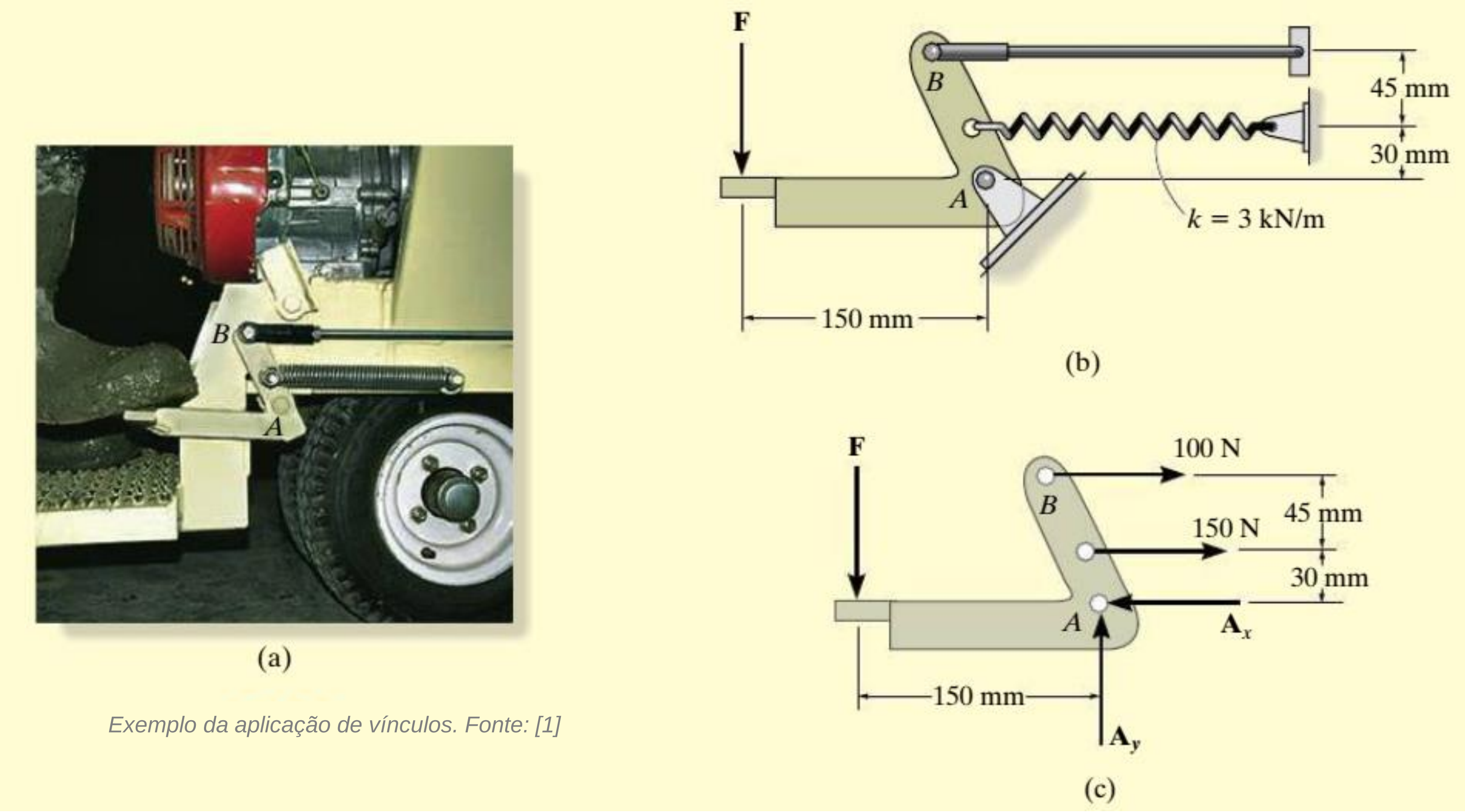
- **Exemplo: Plataforma Suspensa**



Exemplo da aplicação de vínculos. Fonte: [1]

❑ Vínculos

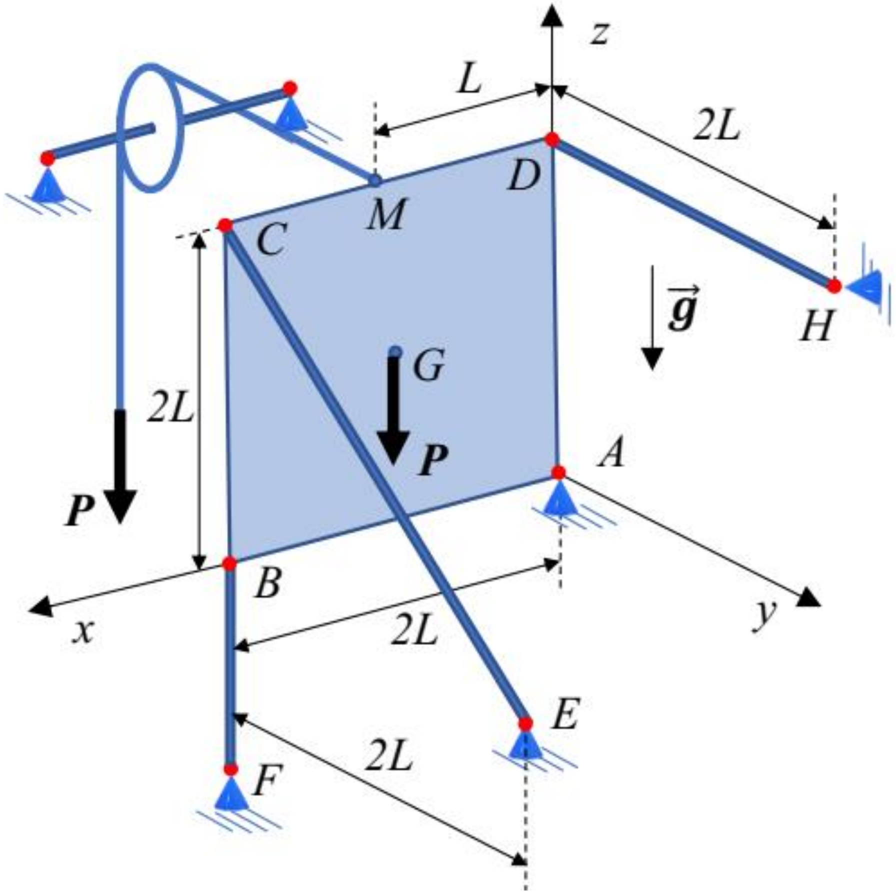
➢ **Exemplo: Alavanca de Pé**



Exemplo da aplicação de vínculos. Fonte: [1]

Sistema e Transmissão de Esforços

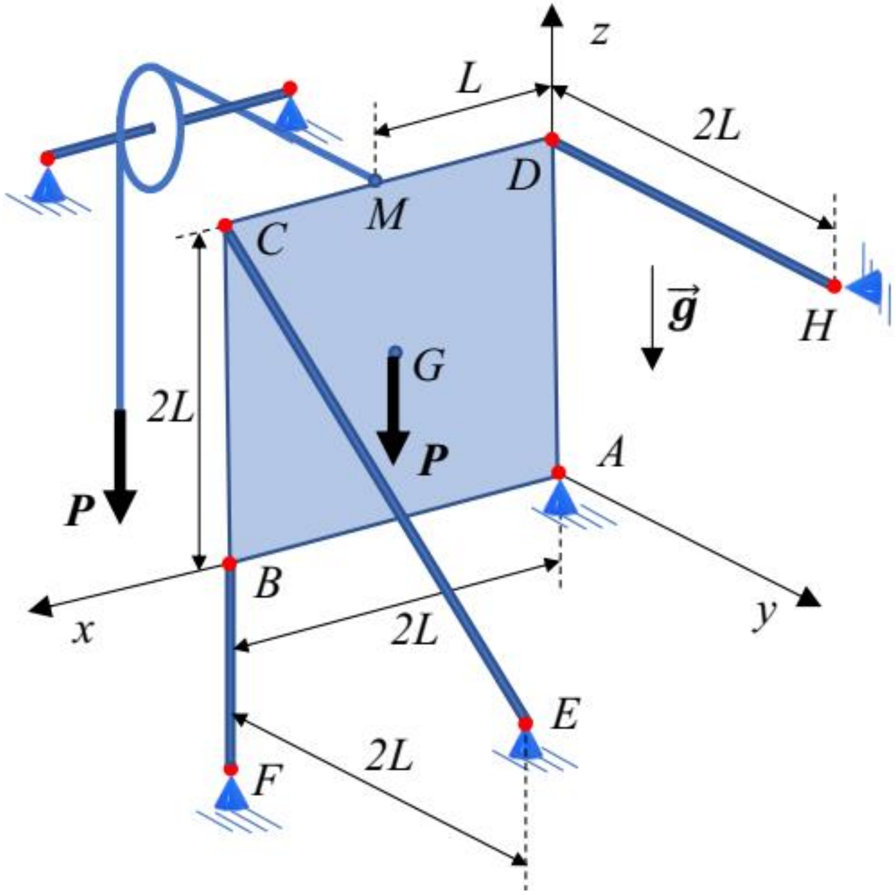
- Um **sistema** pode ser definido como um conjunto de **corpos e componentes** que interagem entre si para a execução de uma determinada função.
  - Apenas **corpos rígidos** serão considerados neste curso. Corpo rígido é um corpo material cujas distâncias relativas entre quaisquer de seus pontos são admitidas constantes sob condições especiais de carregamento.
  - Componentes: polias, fios, barras, vínculos, etc.
- Um sistema pode ser composto por uma única partícula ou corpo, ou por um conjunto de partículas e/ou corpos.



Exemplo de estrutura 3D formada por diversos elementos estruturais.

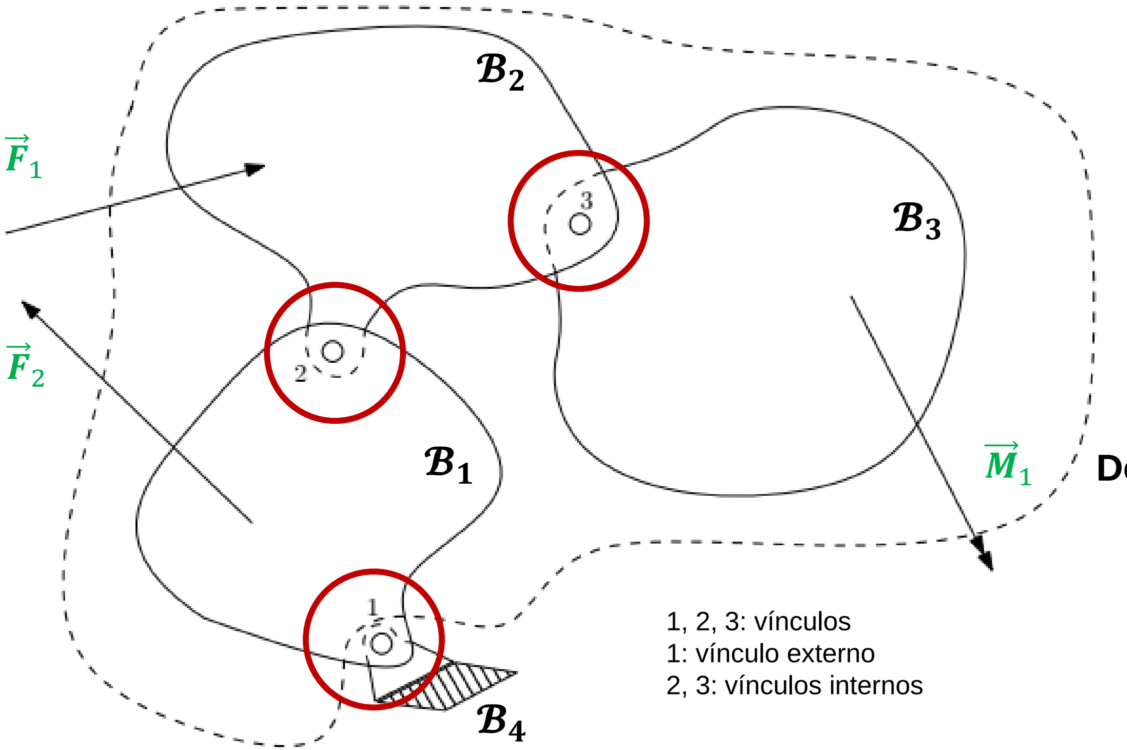
Sistema e Transmissão de Esforços

- Dependendo das características do sistema e das ferramentas de análise disponíveis, duas estratégias de solução podem ser adotadas:
  - Considerar o sistema **completo**;
  - Desmembrar o sistema em subsistemas e tratá-los individualmente;
    - Após o processo de desmembramento, esforços que **eram** internos no sistema original não-desmembrado passam a ser esforços externos nos subsistemas obtidos (transmissão de esforços).
    - O procedimento de **transmissão de esforços** entre os subsistemas desmembrados é baseado no **Princípio da Ação-e-Reação** (3ª Lei de Newton).



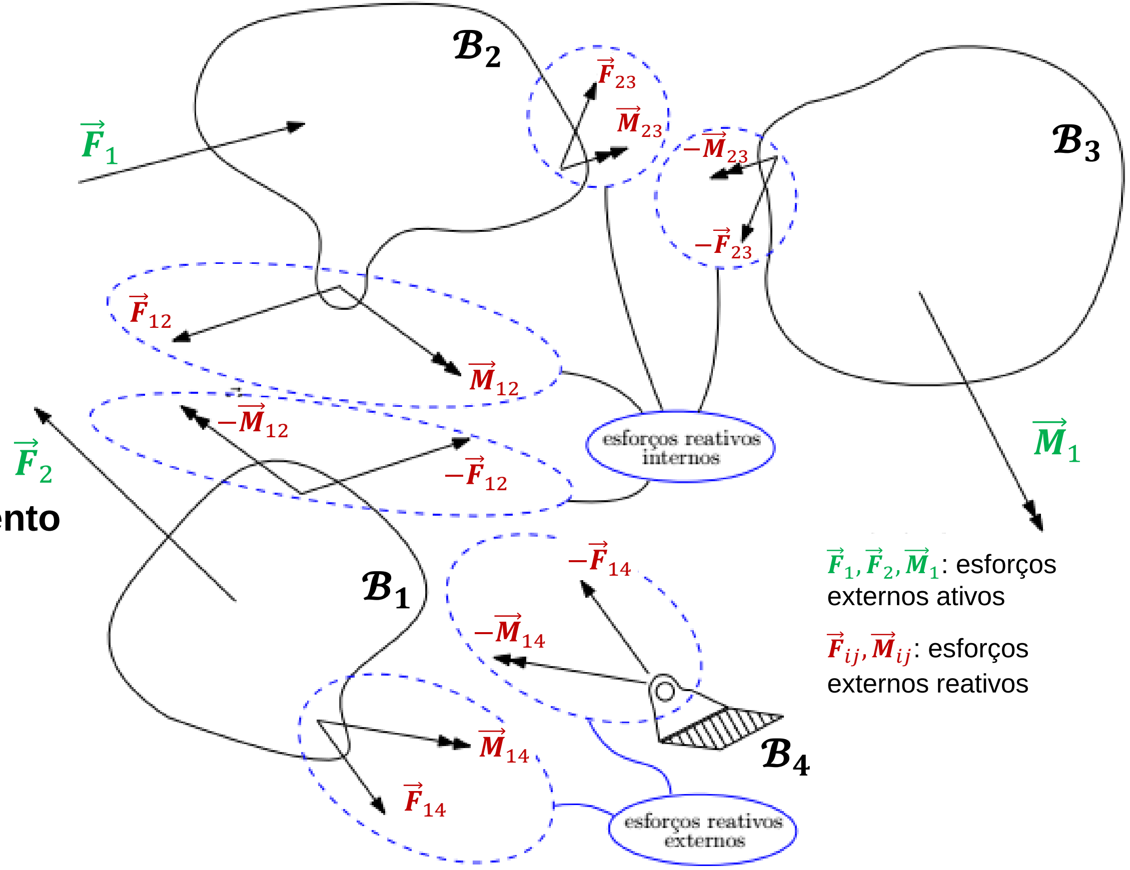
Exemplo de estrutura 3D formada por diversos elementos estruturais.

Sistema e Transmissão de Esforços



Sistema Completo

Desmembramento



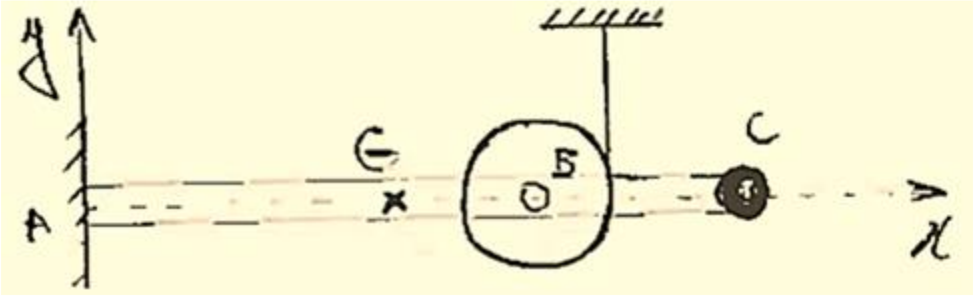
$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{M}_1$: esforços externos ativos

$\vec{F}_{ij}, \vec{M}_{ij}$: esforços externos reativos

Sistema Desmembrado

Sistema e Transmissão de Esforços

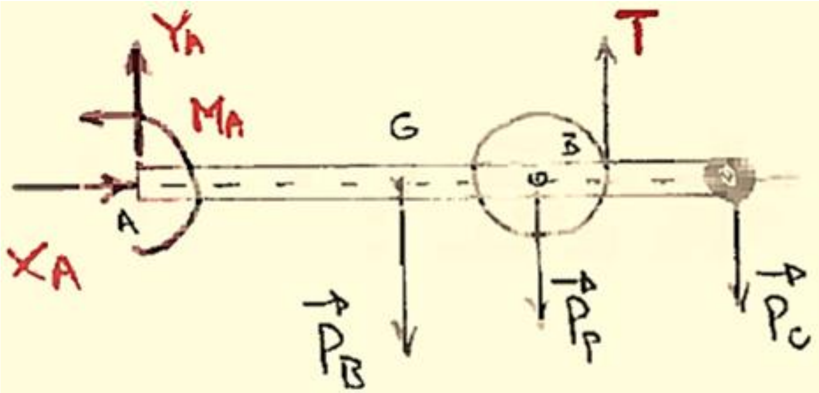
- Após a definição do sistema (e subsistemas desmembrados), a etapa posterior consiste na construção do DCL do sistema (e subsistemas).
- O DCL é construído **isolando** o sistema em estudo (ou subsistemas) e aplicando os **esforços externos** atuantes no sistema. Atenção para a transmissão de esforços internos no caso de desmembramento do sistema.
- Se um sistema está em equilíbrio estático, todos os elementos que compõem o sistema também estão em equilíbrio.
- **Portanto, no caso de desmembramento de um sistema, um conjunto de equações de equilíbrio é obtida para *<u>cada</u>* subsistema.**
- Considere o exemplo a seguir:



<u>**Sistema**</u>: paredes + barra + polia + fio + massa concentrada

Sistema e Transmissão de Esforços

- **DCL** (sistema completo):

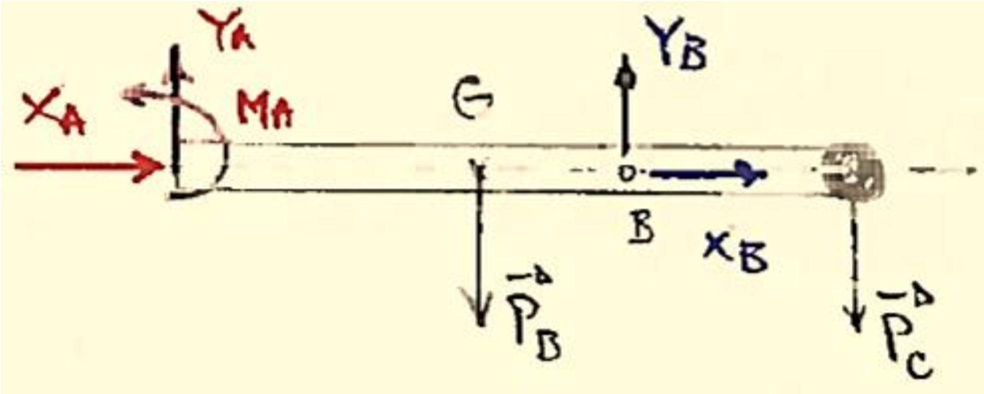


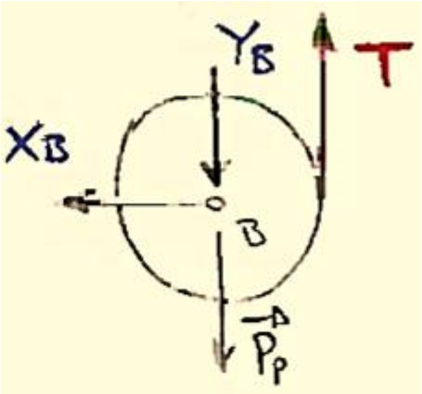
- **4 incógnitas**: esforços reativos na parede e tração no fio (regiões de desmembramento)

- **3 equações**: $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_A = \vec{0}$ (plano *xy*)

Número de incógnitas $\neq$ Número de equações

- **DCL** (sistema desmembrado):





- **6 incógnitas**: esforços reativos na parede, polia e tração no fio (regiões de desmembramento)

- **6 equações**: $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_A = \vec{0}$ para a barra + esfera e polia (plano *xy*)

Número de incógnitas $=$ Número de equações

Tipos de Sistemas

- Dependendo do número de equações e do número de incógnitas associadas, um dado problema de estática pode ser de três tipos:

  - Sistema Isostático:

    Número de incógnitas = Número de equações

    Somente sistemas isostáticos serão considerados nesse curso

  - Sistema Hiperestático:

    Número de incógnitas > Número de equações

    Mais vínculos do que o necessário para manter o sistema em equilíbrio estático

  - Sistema Hipoestático:

    Número de incógnitas < Número de equações

    Menos vínculos do que o necessário para manter o sistema em equilíbrio estático

Solução de Problemas de Equilíbrio Estático

- Para a solução de problemas de equilíbrio estático, o seguinte roteiro pode ser adotado:

1) Identificar claramente o sistema em estudo e os esforços externos ativos aplicados;

2) Verificar a necessidade de desmembramento do sistema em subsistemas (Nº equações = Nº incógnitas); atenção para a transmissão de esforços;

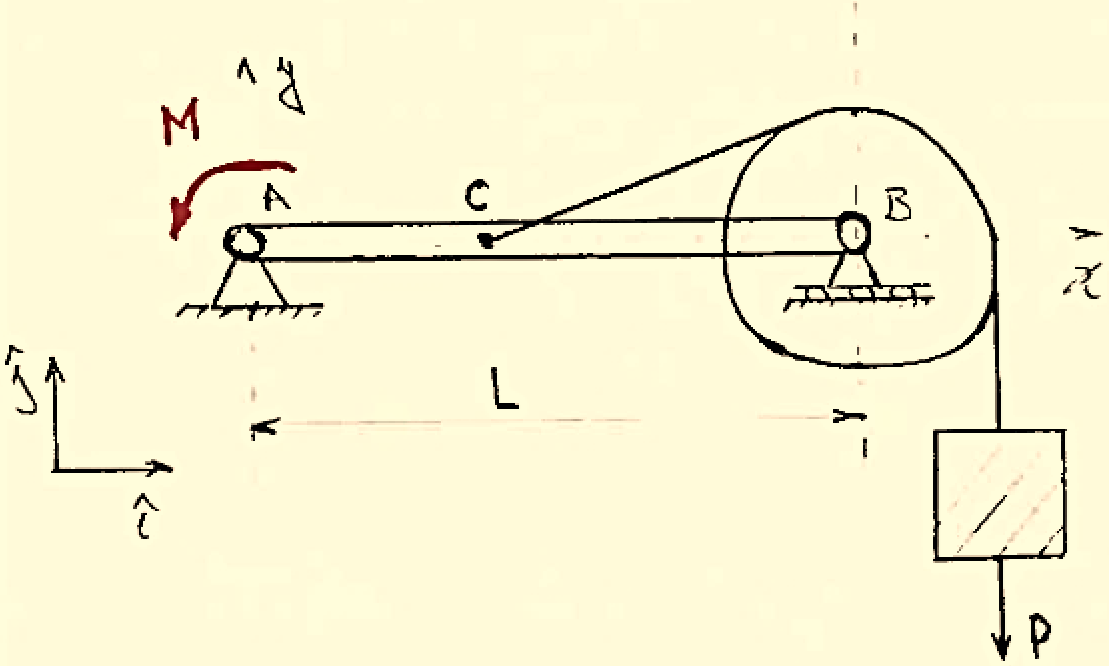
3) Definir o sistema de coordenadas para a localização dos pontos e representação dos vetores (forças, momentos, etc.);

4) Construir o diagrama de corpo livre (DCL) do sistema completo (ou subsistemas), mostrando claramente os **esforços externos** ativos e reativos;

5) Aplicar as equações de equilíbrio estático para o sistema (ou subsistemas);

6) Organizar as equações obtidas em um sistema de equações lineares para as incógnitas do problema (geralmente os esforços reativos).

Exercício 1



- Barra AB de massa "m" articulada em A e num apoio simples em B.
- Bloco de peso P preso a uma polia de raio "R" e massa "2m" por meio de um fio ideal.
- Calcular as reações vinculares.

❑ Exercício 1 (cont.)

1) Identificar sistema: sistema como um todo ou desmembrado?

- escolher o sistema de acordo com o número de equações e incógnitas (buscar sempre sistemas isostáticos)

- para o sistema como um todo, não se considera o esforço (interno) entre a polia e a barra (não interessam nesta análise, mas poderiam interessar no caso de dimensionamento do fio).

- sistema como um todo:

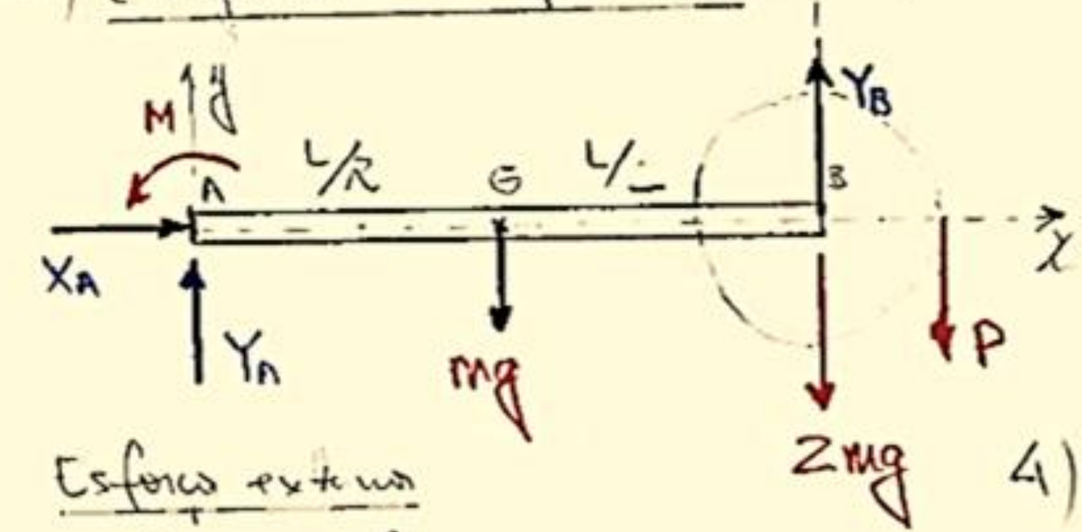
  → 3 incógnitas (reações) ⇒ 2 em A + 1 em B

  → 3 equações de equilíbrio ⇒ $R_x=0$, $R_y=0$, $M_z=0$.

- logo, neste problema, pode-se considerar o sistema como um todo

❑ Exercício 1 (cont.)

2) Diagrama de Corpo Livre (DCL)



Esforços externos

Ativos e Reativos

3) Equações de Equilíbrio

$\vec{R}=\vec{0} \rightsquigarrow R_x=0: \boxed{X_A=0}$

$R_y=0: Y_A-3mg-P+Y_B=0$

$\vec{M}_A=\vec{0} \rightsquigarrow M_z^A=0: M-mg\frac{L}{2}-2mgL-P(L+R)+Y_B L=0$

4) Resolvendo sistema linear

$Y_A+Y_B=P+3mg$

$Y_B=-\frac{M}{L}+\frac{5mg}{2}+\frac{PR}{L}+P$

$Y_A=\frac{M}{L}+\frac{mg}{2}-\frac{PR}{L}$

PME 3100 – Mecânica I

Estática II

(Treliças)

Prof. Francisco J. Profito
fprofito@usp.br

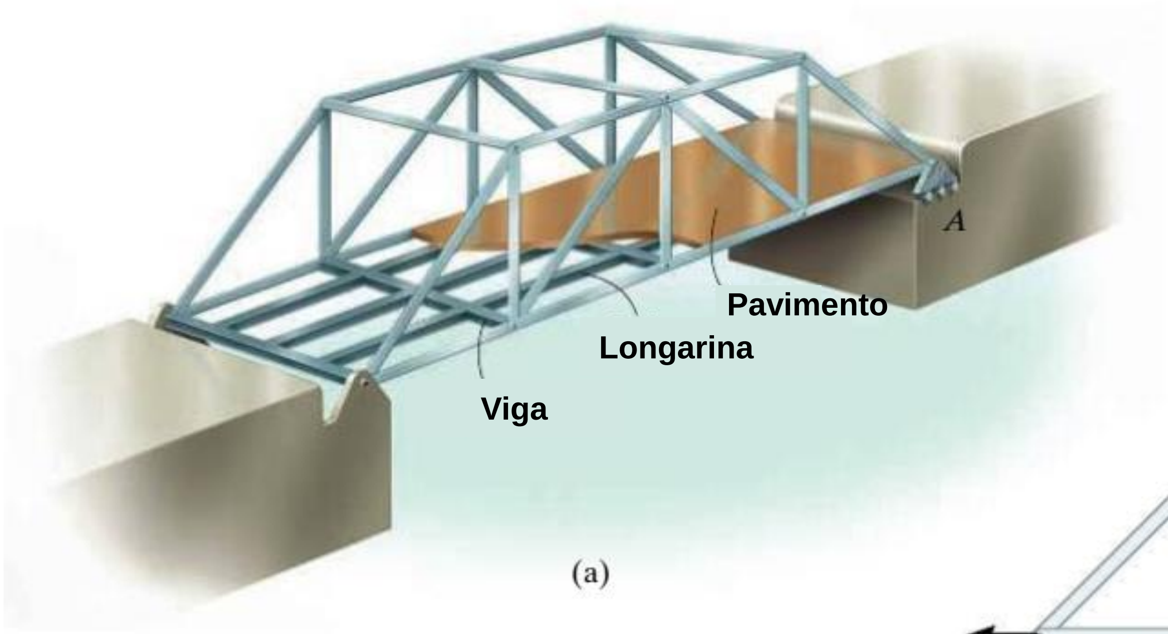
❑ Motivação e Objetivos

- Aplicar os conceitos de equilíbrio estático para a análise de estruturas compostas por barras interconectadas em suas extremidades por meio de articulações.
- Distinguir barras de treliça de barras biarticuladas genéricas.
- Determinar os **esforços atuantes nos suportes e nas barras** que compõem uma treliça.
- Apresentar os métodos de solução para treliças:
  - Método dos nós;
  - Método das seções.

Exemplos de treliças aplicadas na construção de guindastes e megaestruturas. Fonte [1,2].

Motivação e Objetivos

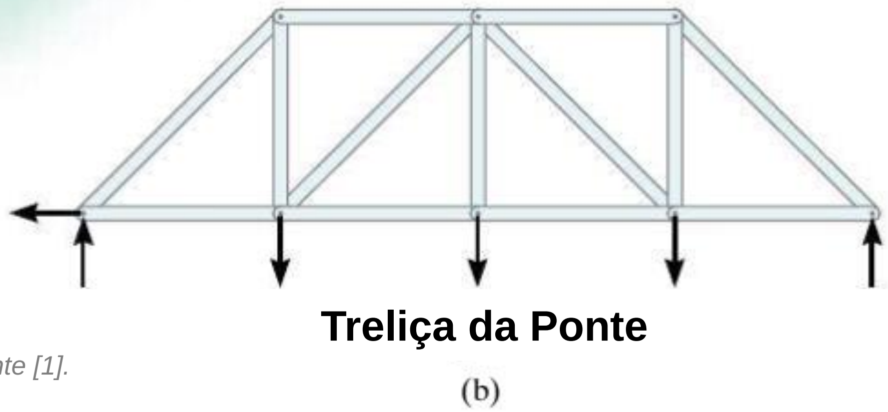
- Treliças são comumente utilizadas em estruturas de pontes e telhados, bem como em construções de plataformas, guindastes e torres de transmissão.



Transmissão dos carregamentos

Pavimento → Longarinas → Vigas → Articulações das treliças laterais → Vínculos da estrutura

Geralmente um apoio simples é utilizado como vínculo para permitir a acomodação da estrutura no caso de vibrações e dilatações térmicas.



Exemplos de treliças utilizada para a construção de pontes. Fonte [1].

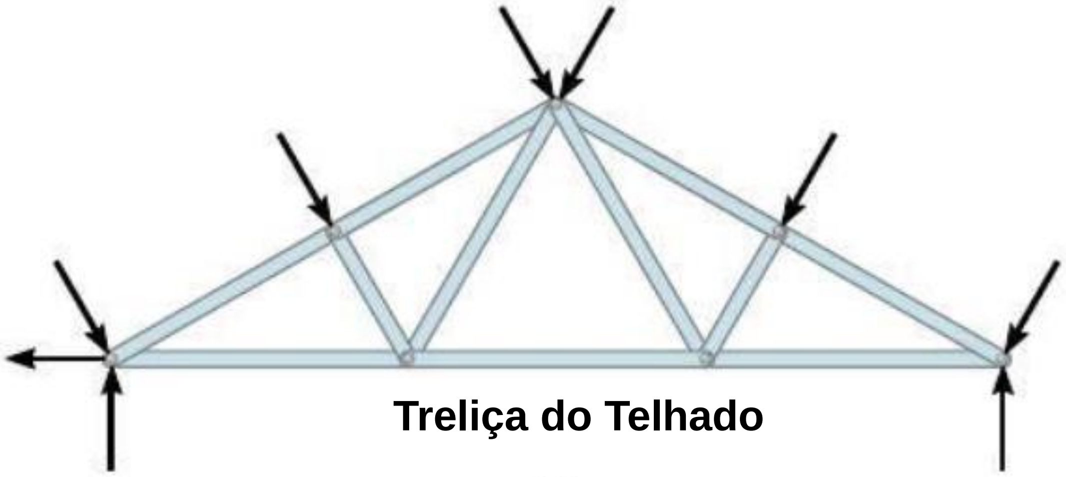
Motivação e Objetivos

- Treliças são comumente utilizadas em estruturas de pontes e telhados, bem como em construções de plataformas, guindastes e torres de transmissão.

Transmissão dos carregamentos

Telhado → Terças → Articulações das treliças laterais → Vínculos da estrutura

(a)



(b)

Exemplos de treliças utilizada para a construção de telhados. Fonte [2].

Barras Biarticuladas e Barras de Treliça

- Considere o equilíbrio estático de uma barra biarticulada, admitindo as seguintes hipóteses:
  - A barra é rígida e de formato genérico;
  - A barra é articulada nas extremidades A e B (barra desmembrada de uma estrutura);
  - Sistema de coordenadas Axy, tal que o eixo Ax coincide com a reta que liga as extremidades A e B da barra;
  - Carregamento lateral $\vec{P} = \left(P_x\hat{\imath} + P_y\hat{\jmath}\right)$ ao longo da barra.

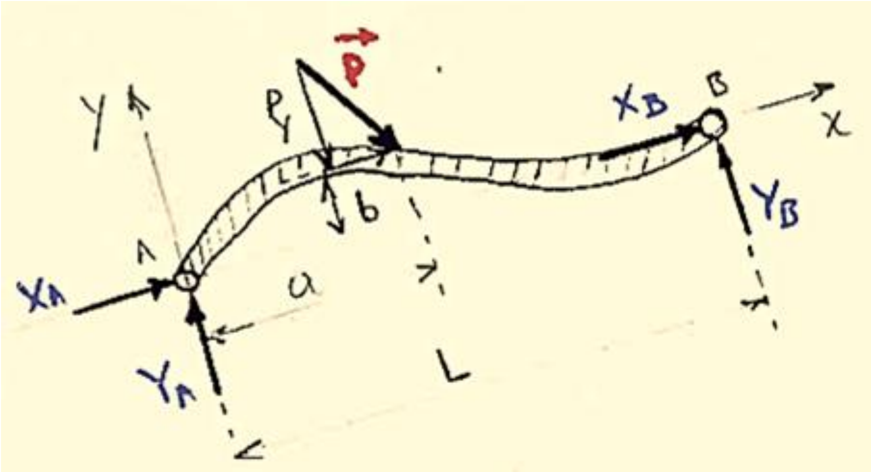


Diagrama de corpo livre de uma barra biarticulada rígida e de formato genérico.

- Aplicando as condições de equilíbrio estático à barra, tem-se:

$$\begin{matrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\mathrm{A}} = \vec{0} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} R_x = X_{\mathrm{A}} + X_{\mathrm{B}} + P_x = 0 \\ R_y = Y_{\mathrm{A}} + Y_{\mathrm{B}} + P_y = 0 \\ M_{\mathrm{A}z} = Y_{\mathrm{B}}L - P_y a - P_x b = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{Y_{\mathrm{A}} = P_y - \frac{bP_x + aP_y}{L} \quad ; \quad Y_{\mathrm{B}} = \frac{bP_x + aP_y}{L} \quad ; \quad X_{\mathrm{A}} = -X_{\mathrm{B}} - P_x}$$

(Análogo na direção *z*)

Barras Biarticuladas e Barras de Treliça

- ***Barra de Treliça:*** **caso particular** de barra biarticulada cujos esforços externos aplicados ao longo da barra são **nulos**, ou seja, $\vec{\boldsymbol{P}} = \vec{\mathbf{0}}$.

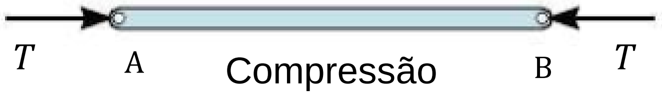
- Dessa forma, os esforços nos vínculos são simplificados, como segue:

$$\boxed{Y_A = Y_B = 0 \quad ; \quad Z_A = Z_B = 0 \quad ; \quad X_A = -X_B}$$

- No equilíbrio, uma *barra de treliça* é sujeita apenas a forças na sua direção axial (ou longitudinal). Tais esforços podem ser:
  - Tração: $X_A < 0$ e $X_B > 0$
  - Compressão: $X_A > 0$ e $X_B < 0$

Atenção

Barra de Treliça $\neq$ Barra Biarticulada



Barras sujeitas a forças de tração e compressão. Fonte: adaptado de [F2]

- **Apenas uma única força de reação** está associada a uma barra de treliça (tração ou compressão), geralmente uma incógnita do problema.

- A presença de barras de treliça restringe o número de incógnitas na solução de problemas de equilíbrio estático.

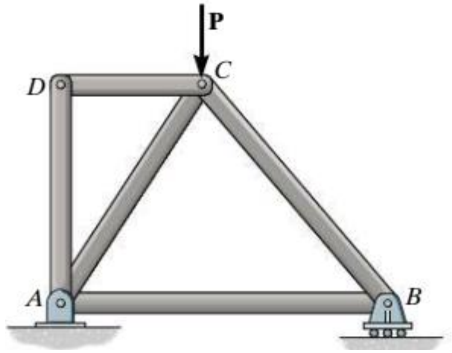
Treliças

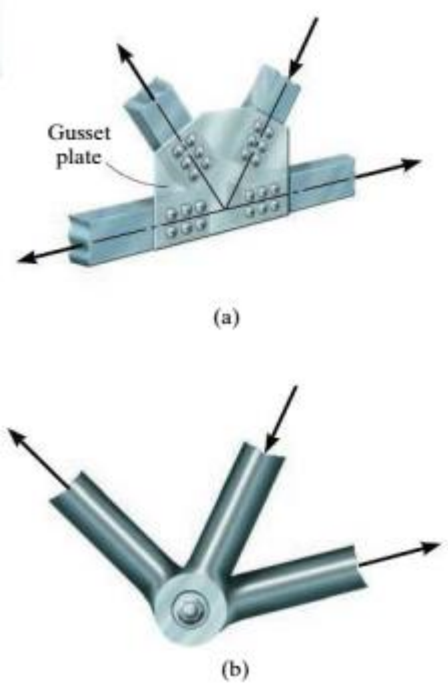
- Treliças são estruturas compostas por barras interconectadas em suas extremidades (barras de treliça) por meio de articulações, também denominadas **nós**.

- Nessas estruturas, admite-se que os carregamentos externos são aplicados diretamente nos nós.
  - Por definição, esforços externos não devem ser aplicados ao longo de barras de treliça.
  - O peso de barras de treliça é geralmente desprezado. Quando se deseja considerá-lo na análise, o peso deve ser distribuído nos nós da estrutura.

- Barras de treliça são interconectadas (nós) por parafusos, pinos ou placas de reforço soldadas (‘*gusset plate*’).

- Admite-se que essas conexões atuem como articulações correspondentes ao ponto de intersecção das linhas de centro das barras conectadas.





Exemplo de uma treliça simples e dos dispositivos utilizados para a conexão das barras que compõem a estrutura. Fonte: [2]

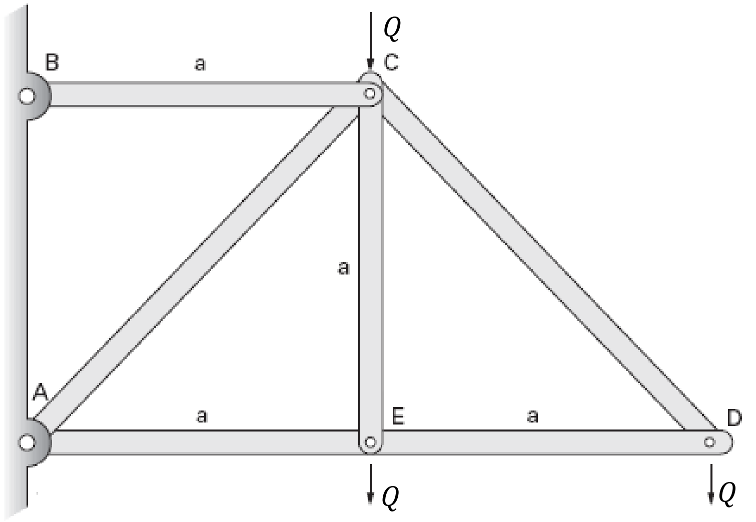
Métodos de Solução

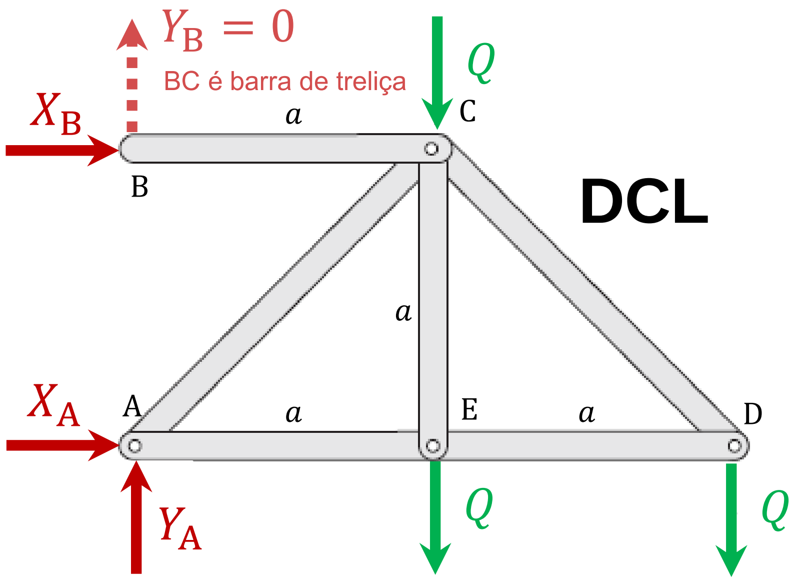
- O objetivo principal da solução de problemas de treliças consiste na determinação dos seguintes esforços:
  - Reações atuantes nos vínculos responsáveis por manter a estrutura em equilíbrio estático;
  - Forças atuantes (tração ou compressão) em cada barra que compõe a estrutura.

- Para a apresentação dos métodos de solução, considere a treliça ao lado.

- Para o cálculo das reações nos vínculos, recomenda-se inicialmente a análise da estrutura completa (sem o desmembramento das barras).

- No exemplo dado, mesmo que sustentada por duas articulações, a estrutura é **isostática**, pois a barra BC é uma barra de treliça, admitindo esforço apenas na direção horizontal.

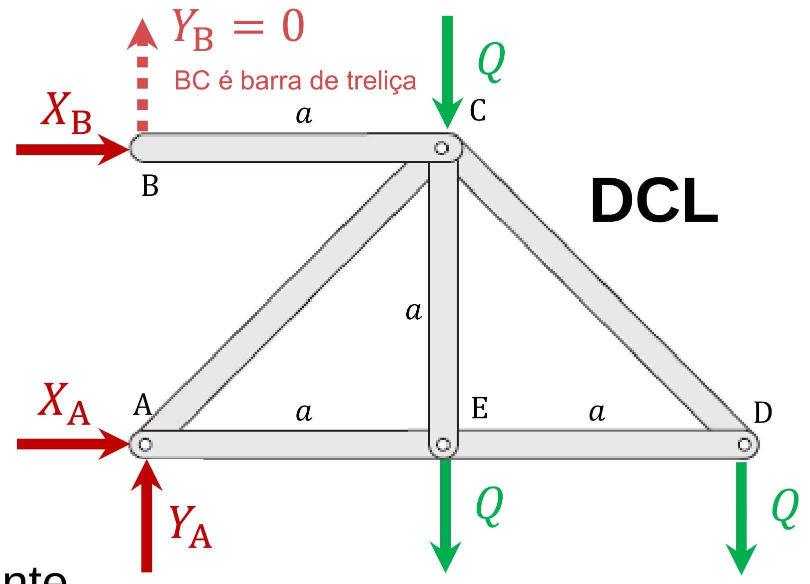




Métodos de Solução

- Aplicando as condições de equilíbrio estático **para a estrutura completa** (ver DCL ao lado), tem-se:

$$\begin{matrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\mathrm{A}} = \vec{0} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} R_x = X_{\mathrm{A}} + X_{\mathrm{B}} = 0 \\ R_y = Y_{\mathrm{A}} - 3Q = 0 \\ M_{\mathrm{A}z} = -X_{\mathrm{B}}a - 2Qa - 2Qa = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{\mathrm{A}} = 4Q \\ Y_{\mathrm{A}} = 3Q \\ X_{\mathrm{B}} = -4Q \end{cases}$$



- Nem sempre é possível determinar os esforços de reação diretamente considerando o sistema completo. Isso só é possível se o sistema for isostático.

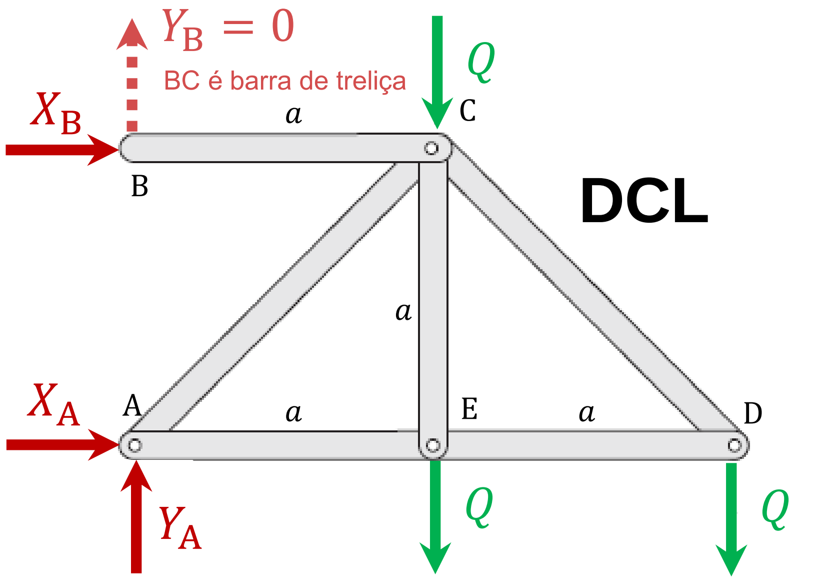
- Número de incógnitas do problema completo:
  - Reações vinculares;
  - 1 incógnita por barra de treliça (força de tração ou compressão);
  - Sempre verificar se número de incógnitas = número de equações

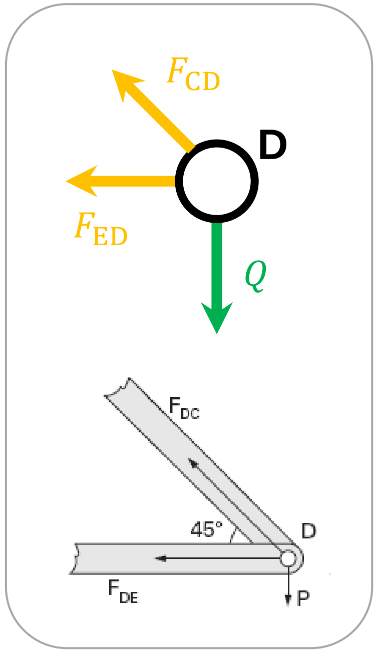
Para o problema dado:
4 reações vinculares + 6 forças nas barras = 10 incógnitas

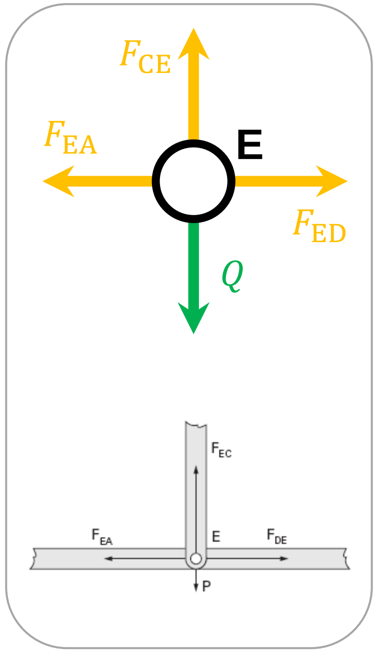
❑ Métodos de Solução: Método dos Nós

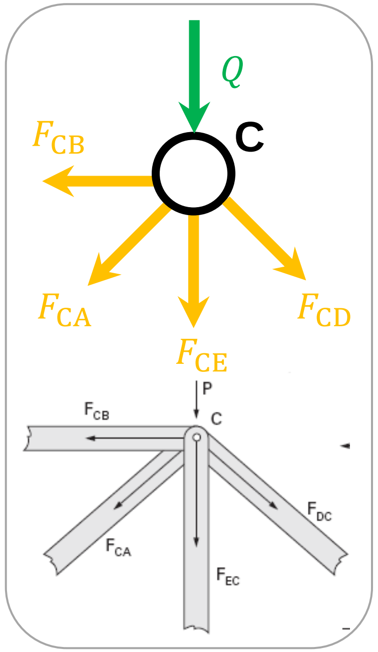
➢ **Método dos Nós:**

1) Desmembrar **completamente** a treliça (nós + barras);
2) Construir o DCL de **cada nó**;
3) Obter as equações de equilíbrio de **cada nó** (3 equações no espaço; 2 equações no plano).

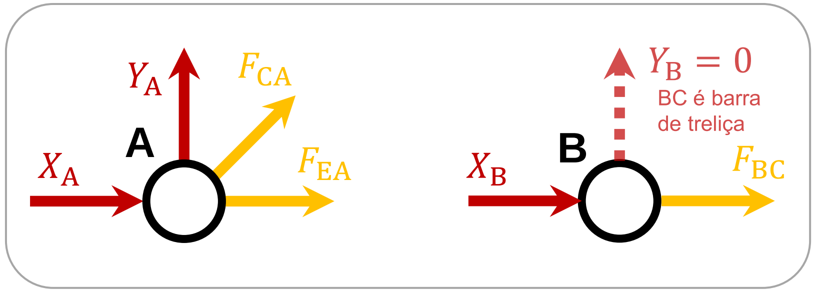








Dica: adotar inicialmente forças de tração nas barras (divergentes nos nós)

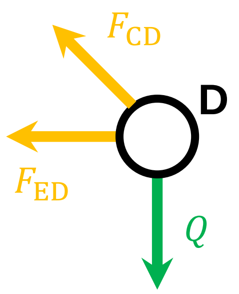


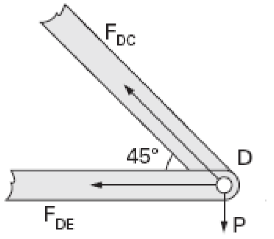
Métodos de Solução: Método dos Nós

- Após a obtenção das equações de equilíbrio de **cada nó**, recomenda-se iniciar a solução pelo equilíbrio do nó com **menos incógnitas**.

- Para o exemplo dado, considere o **nó D**:

$$\vec{R}_{\mathrm{D}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x = -F_{\mathrm{ED}} - F_{\mathrm{CD}}\cos\alpha = 0 \\ R_y = -Q + F_{\mathrm{CD}}\operatorname{sen}\alpha = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{\mathrm{ED}} = -Q & \text{(compressão)} \\ F_{\mathrm{CD}} = \sqrt{2}Q & \text{(tração)} \end{cases}$$



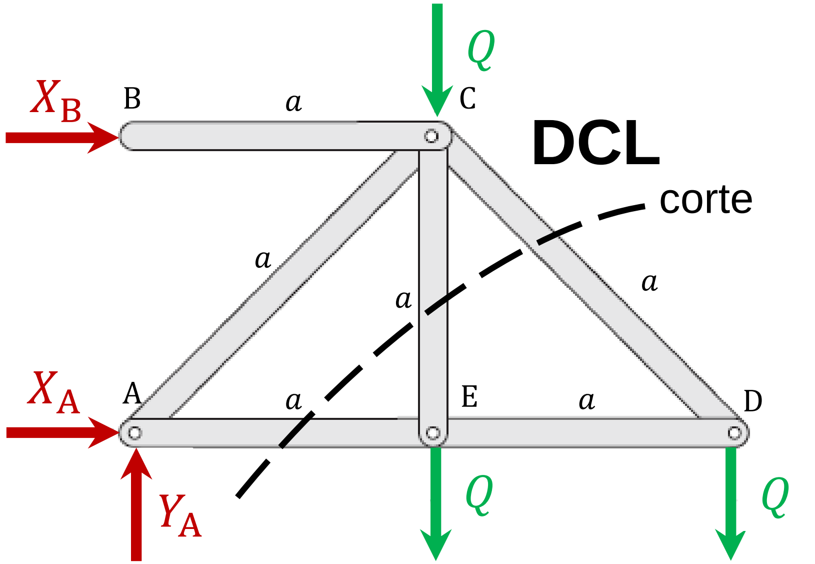


- Procedendo da forma análoga para os outros nós, obtém-se:

$$\begin{cases} X_{\mathrm{A}} = 4Q \\ Y_{\mathrm{A}} = 3Q \\ X_{\mathrm{B}} = -4Q \\ Y_{\mathrm{B}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{\mathrm{CE}} = Q \\ F_{\mathrm{EA}} = -Q \\ F_{\mathrm{CB}} = 4Q \\ F_{\mathrm{CA}} = -3\sqrt{2}Q \end{cases}$$

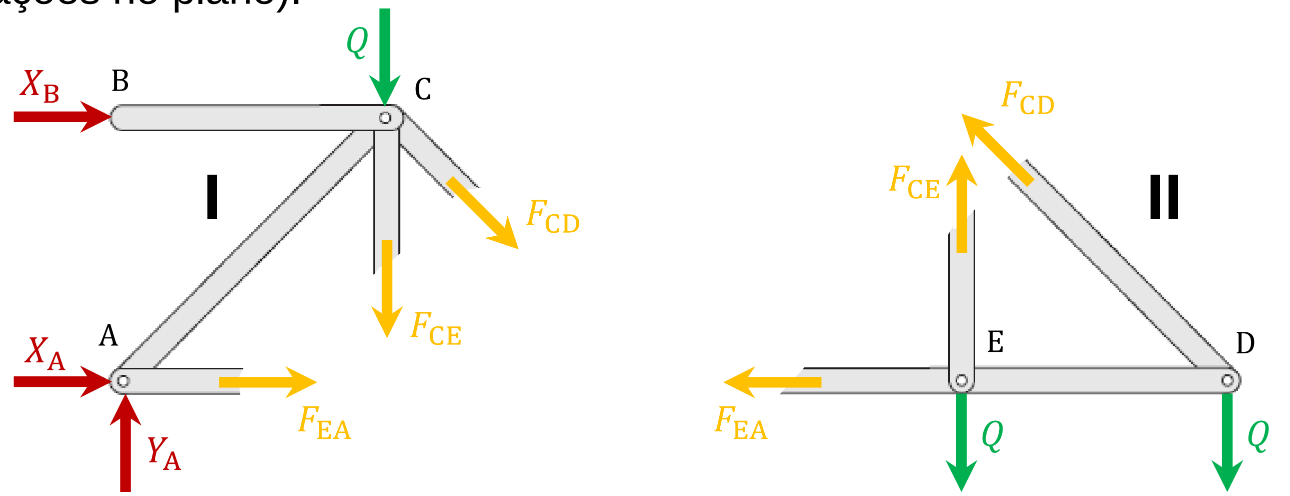
Confira!

❑ Métodos de Solução: Método das Seções



- ***Método das Seções***: adequado para se calcular diretamente as forças atuantes em **barras específicas** da estrutura.
  1) Desmembrar a treliça em **duas partes** por meio de um corte que passe por **até três barras**, incluindo naturalmente as barras em que se deseja determinar os esforços.
  2) Construir o **DCL de cada parte** desmembrada (atenção para a transmissão dos esforços).
  3) Obter as **equações de equilíbrio de cada parte** desmembrada (6 equações no espaço; 3 equações no plano).

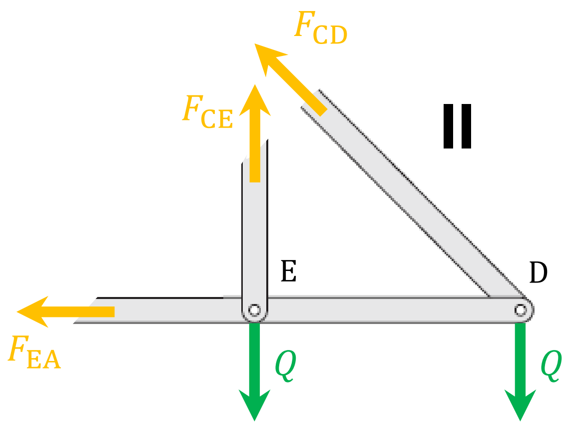
- Para o exemplo dado:



Métodos de Solução: Método das Seções

- Considerando o equilíbrio da parte II:

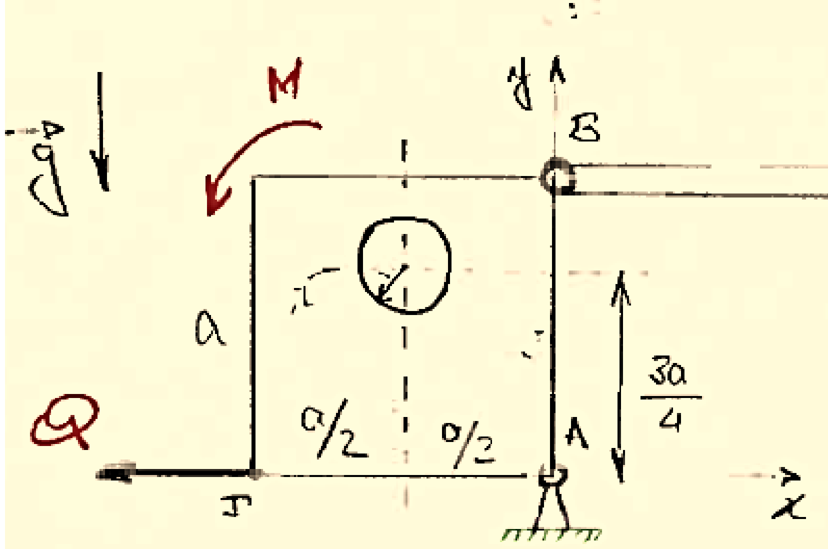
$$
\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{0}\\ \vec{M}_{\mathrm{E}} &= \vec{0}\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{cases}
R_x = 0 : & -F_{\mathrm{EA}} - F_{\mathrm{CD}}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0\\
R_y = 0 : & F_{\mathrm{CE}} + F_{\mathrm{CD}}\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2Q = 0\\
M_{\mathrm{E}z} = 0 : & -Qa + F_{\mathrm{CD}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}a = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
F_{\mathrm{EA}} = -Q\\
F_{\mathrm{CE}} = Q\\
F_{\mathrm{CD}} = \sqrt{2}Q
\end{cases}
$$



- Os esforços reativos podem ser obtidos a partir do equilíbrio da parte I.

Confira!

Exercício 1



- Placa quadrada homogênea de densidade superficial $\bar{\sigma}$, com furo de raio $r = a/8$
- Barra BC de comprimento '2a' e massa desprezível.
- Força $\vec{Q}$ e binário $\vec{M}$ aplicados ao sistema.

- Calcular:

(a) coordenadas do baricentro da placa.

(b) reações vinculares.

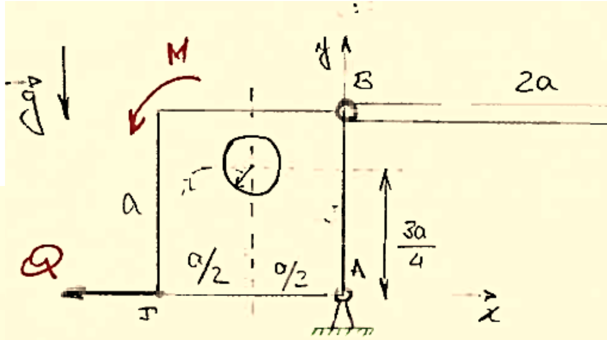
Exercício 1 (cont.)

a) Por simetria, $\boxed{x_G = -\frac{a}{2}}$

$$(m_\square - m_\circ)\, y_G = m_\square \frac{a}{2} - m_\circ \frac{3a}{4} \longrightarrow \cancel{\rho}\left(\cancel{a^2} - \pi \frac{\cancel{a^2}}{64}\right) y_G = \cancel{\rho}\, \cancel{a^2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{\cancel{\rho}\,\pi}{64}\, \cancel{a^2} \cdot \frac{3a}{4}$$

$$\left(1 - \frac{\pi}{64}\right) y_G = \frac{a}{2} - \frac{\pi a \cdot 3}{4 \cdot 64} \Longrightarrow \boxed{y_G = \frac{(128 - 3\pi)}{(256 - 4\pi)}\, a}$$

❑ Exercício 1 (cont.)



- Barra B
- Força

b) Considerando o roteiro de solução proposto.

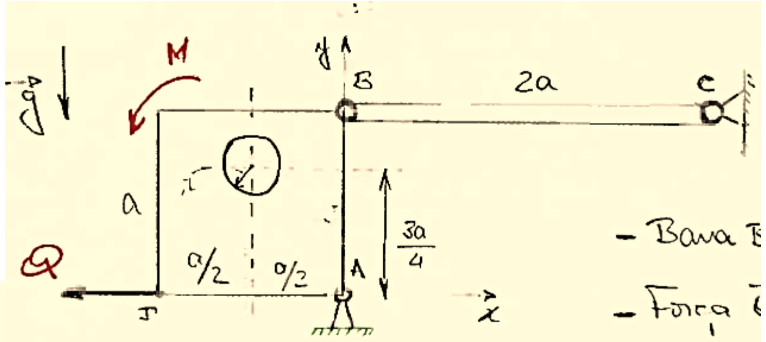
① Identificar o sistema

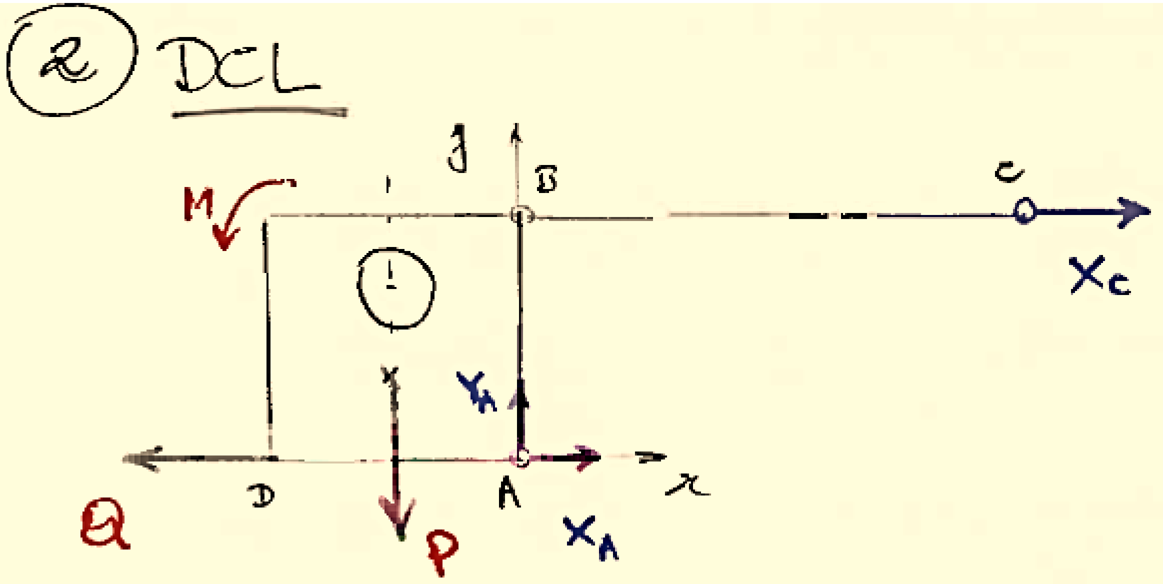
cuidado!

- Número de reações: { - Articulação A: 2 (plano)
  - Articulação B: 1 (BC é barra de treliça)

- Logo, o sistema pode ser analisado como um todo, pois já fornece 3 equações de equilíbrio. (CUIDADO, nem sempre possível!)

❑ Exercício 1 (cont.)

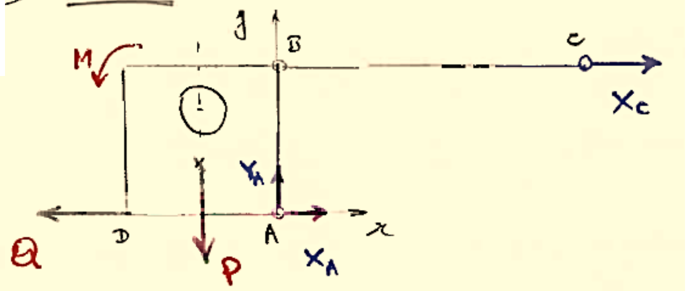




Forças Externas { - ativas
- reativas.

Exercício 1 (cont.)

2) DCL



③ Equação de Equilíbrio

$R_x=0$: $-Q+X_A+X_C=0 \longrightarrow \boxed{X_A = Q - \frac{M}{a} - \frac{P}{2}}$

$R_y=0$: $-P+Y_A=0 \longrightarrow \boxed{Y_A=P}$

$M_A^z=0$: $M+\frac{Pa}{2}-X_C a=0 \longrightarrow \boxed{X_C=\frac{M}{a}+\frac{P}{2}}$

$\boxed{Y_C=0}$ (BC barra treliça)

Sendo: $P = Mg = \rho A g = \rho g(A_\square - A_\circ)$

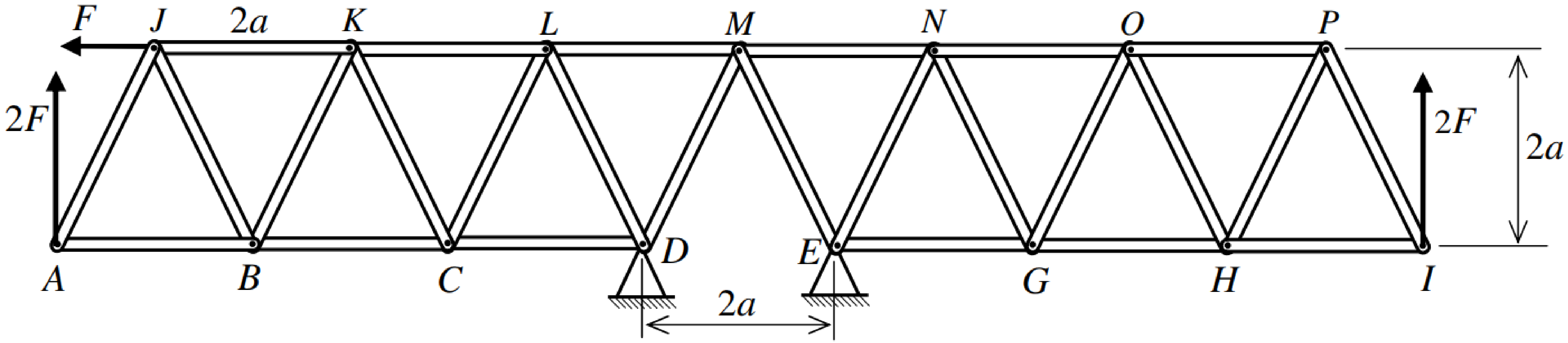
$$P=\rho g\left(a^2-\frac{\pi a^2}{64}\right)$$

$$P=\frac{\rho a^2 g}{64}(64-\pi)$$

❑ Exercício 2

2019 – P1 – Q3

QUESTÃO 3 (3,5 pontos) – Considere a treliça mostrada na figura, formada por barras de massa desprezível que formam triângulos isósceles de base $2a$ e altura $2a$, e suportada por articulações em D e E. Determine, em função de F e a, o valor das forças nas barras JK, LM e IP, indicando se são de tração ou compressão.

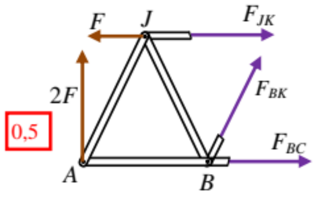


❑ Exercício 2

2019 – P1 – Q3

Solução

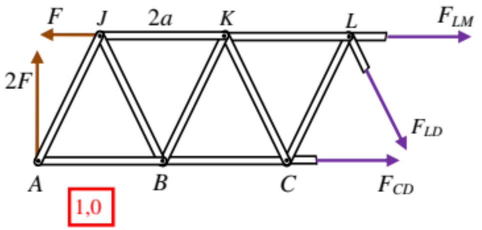
Força na barra *JK*:



$$\sum M_{Bz}=0 \Rightarrow -F_{JK}2a+F2a-2F2a=0 \Rightarrow$$

$\boxed{F_{JK}=-F}$ Compressão 0,5

Força na barra *LM*:



Da geometria:

$$F_{LDx}=\frac{F_{LD}\sqrt{5}}{5} \quad \text{e} \quad F_{LDy}=\frac{F_{LD}2\sqrt{5}}{5}$$

Equações de equilíbrio:

$$\sum F_y=0 \Rightarrow 2F-\frac{F_{LD}2\sqrt{5}}{5}=0 \Rightarrow F_{LD}=\sqrt{5}F$$

$$\sum F_x=0 \Rightarrow -F+F_{LM}+\frac{F_{LD}\sqrt{5}}{5}+F_{CD}=0$$

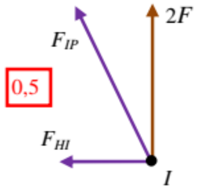
$$\Rightarrow F_{LM}=F-\frac{\sqrt{5}F\sqrt{5}}{5}-F_{CD} \Rightarrow F_{LM}=-F_{CD}$$

$$\sum M_{Lz}=0 \Rightarrow F_{CD}2a-2F5a=0 \Rightarrow F_{CD}=5F$$

$\Rightarrow \boxed{F_{LM}=-5F}$ Compressão 0,5

Força na barra *IP*:

Equilíbrio do nó *I*:

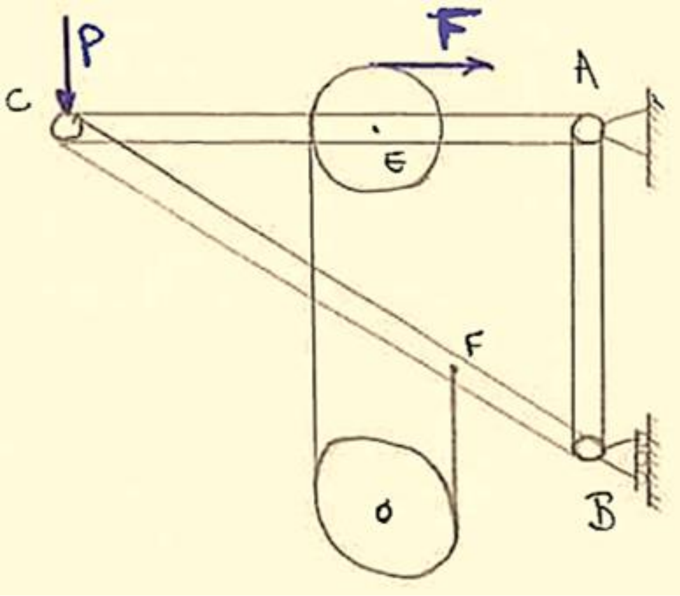


$$|F_{IPy}|=2|F_{IPx}| \Rightarrow |F_{IP}|=\frac{\sqrt{5}}{2}|F_{IPy}|$$

$\sum F_y=0 \Rightarrow 2F+F_{IPy}=0 \Rightarrow F_{IPy}=-2F \Rightarrow \boxed{F_{IP}=-\sqrt{5}F}$ Compressão 0,5

❑ Análise de Barras Biarticuladas vs. Barras de Treliça

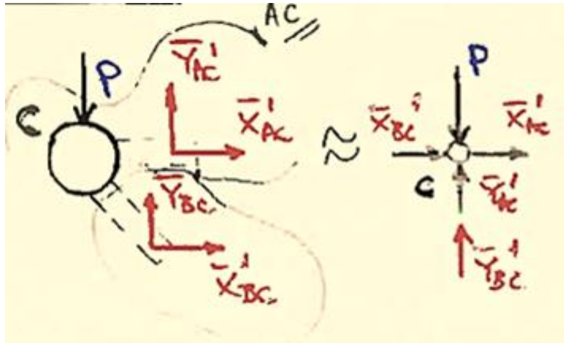
- Para o sistema ao lado, determine:
  - Quais barras são biarticuladas e quais barras são de treliça;
  - Os DCLs dos nós *A*, *B* e *C*;
  - Os DCLs das barras isoladas;
  - Os DCLs das barras + nós.

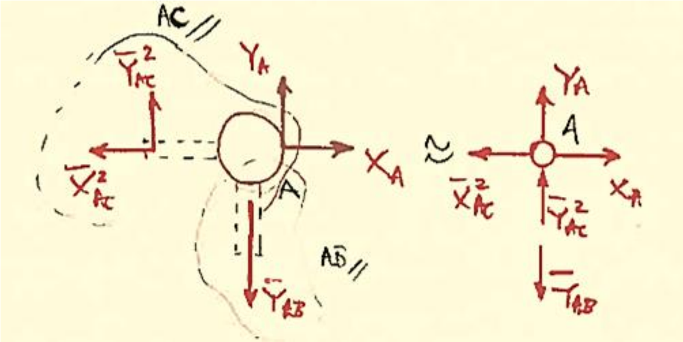


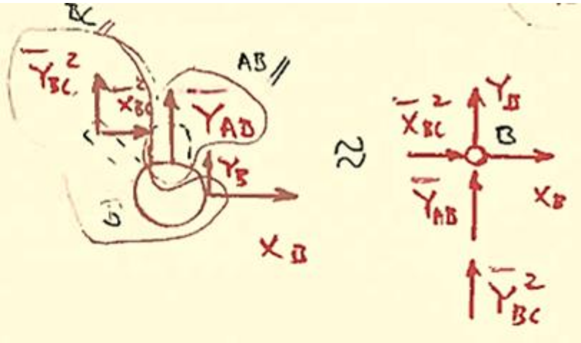
- Barras biarticuladas: *AC* e *BC* ; Barra de treliça: *AB*

<u>**Atenção**</u>: barras de treliça **não** são submetidas a carregamentos ao longo do seu comprimento.

- DCLs dos nós *A*, *B* e *C*:

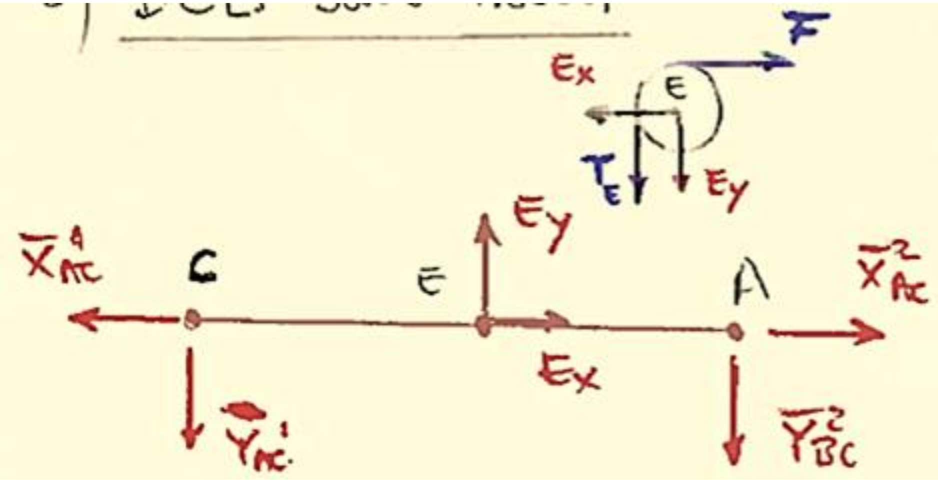


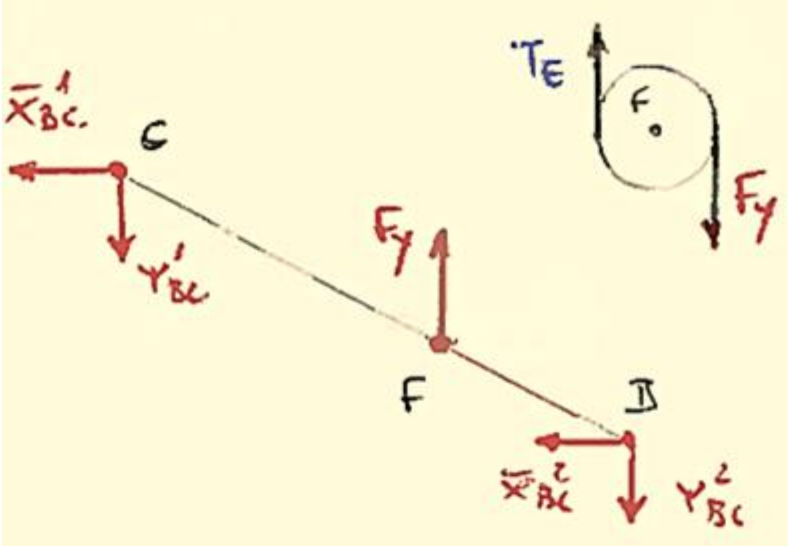


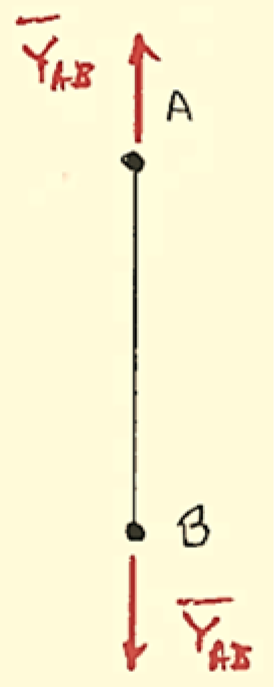


❑ Análise de Barras Biarticuladas vs. Barras de Treliça

- DCLs das barras isoladas:



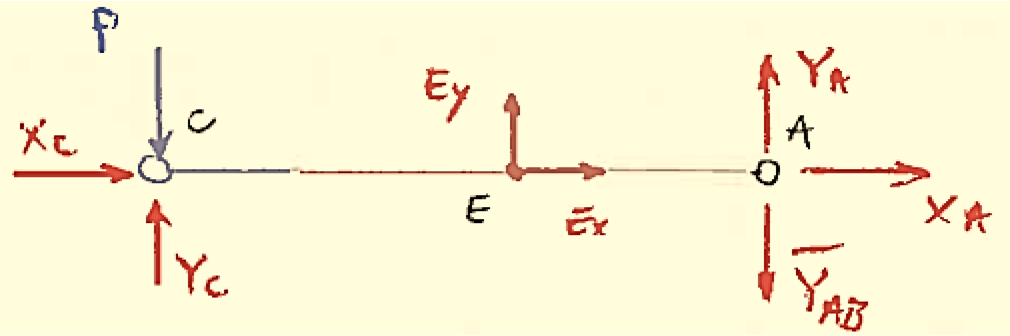


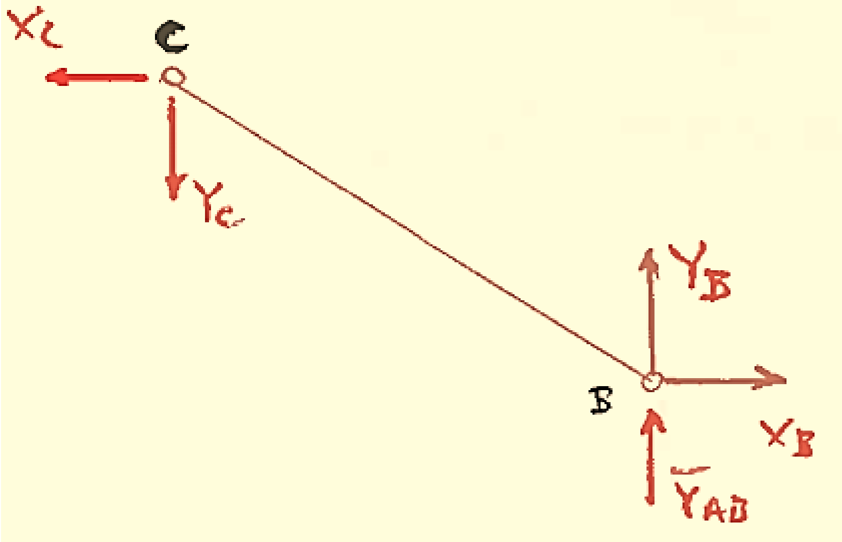


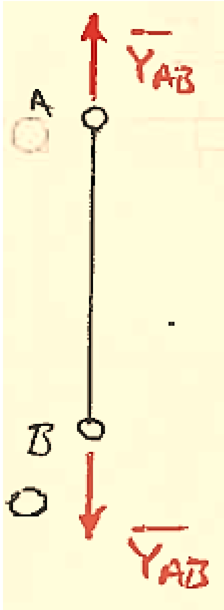
Barra de treliça

❑ Análise de Barras Biarticuladas vs. Barras de Treliça

- DCLs das barras + nós:







Exercício 2

2016 – P1 – Q1

1ª Questão (4.0 pontos): A placa quadrada *ABCD* de lado *a* está no plano *xz*, é homogênea com peso *Q*, está articulada em *A* e *B*, e está presa por um anel (eixo paralelo a *z*) em *C*. A barra *BE* tem peso desprezível e está articulada em *B* e *E*. A polia e seu suporte têm peso desprezível e estão no plano xy, com a barra *FG* paralela a *x*, sendo que a polia suporta o peso $Q\sqrt{2}$ por um fio ideal conectado ao ponto *D* da placa. Pede-se:

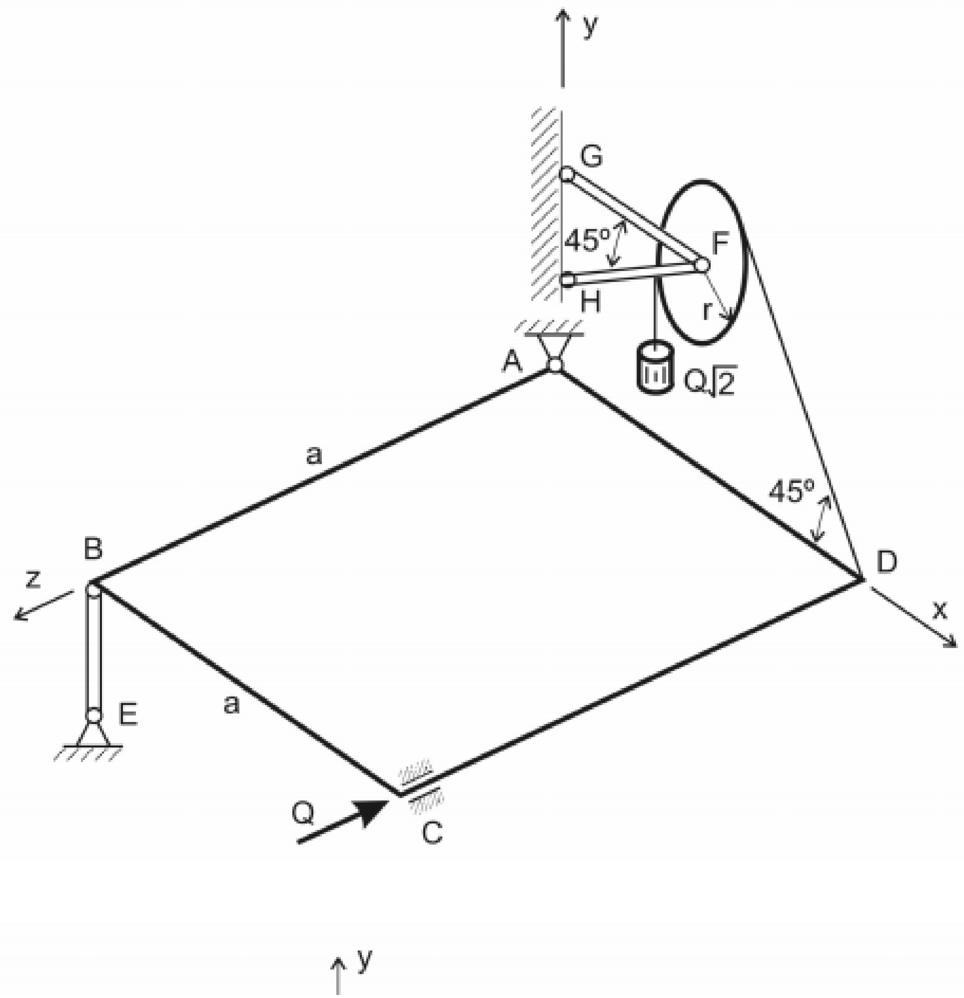
a) Faça o diagrama de corpo livre da placa, da barra *BE* e da polia.

b) Escreva as equações de equilíbrio da placa.

c) Determine as forças atuantes na placa em *C*.

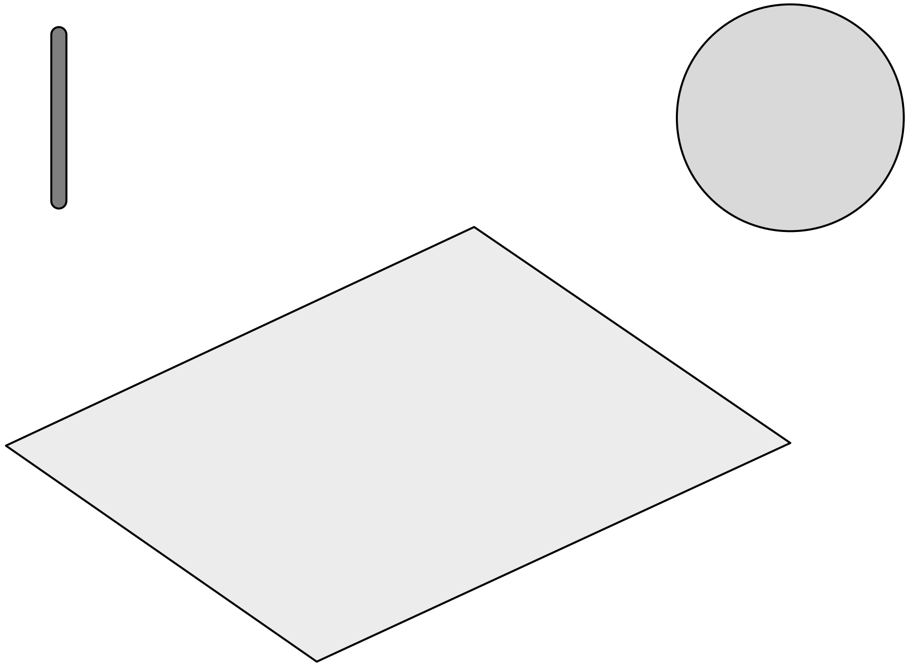
d) Determine a força atuante na barra *FH* do suporte da polia, indicando se é de tração ou compressão.

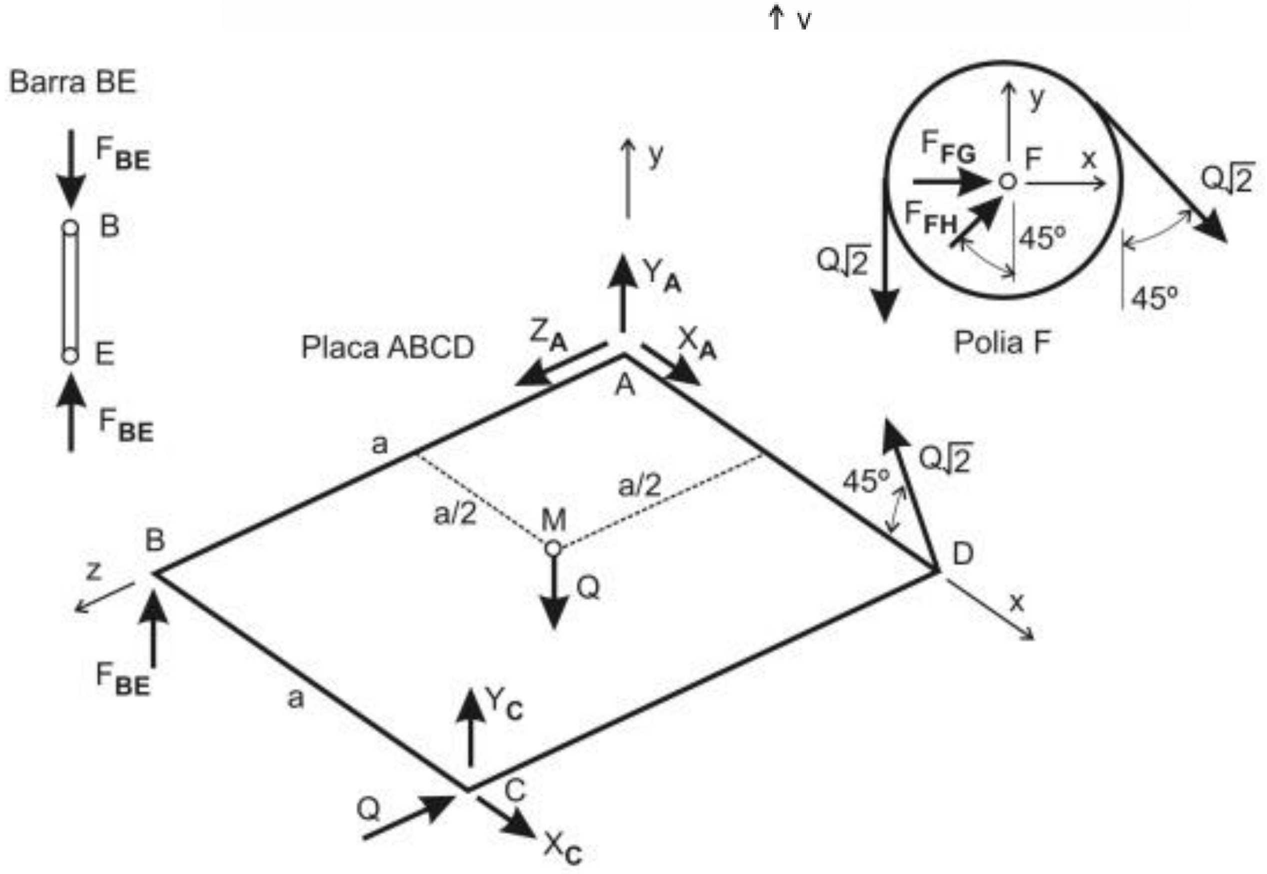
e) O sistema de forças, constituído somente pela força *Q* aplicada em *C* e a força do fio em *D*, é equivalente a uma única força? Justifique.



Exercício 2 (cont.)

2016 – P1 – Q1





Exercício 2 (cont.)

2016 – P1 – Q1

b) Forças na placa:

$\vec{F}_A = X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}\ ;\ (\vec{F}_A; A)$

$\vec{F}_B = F_{BE}\vec{j}\ ;\ (\vec{F}_B; B)$

$\vec{F}_C = X_C\vec{i} + Y_C\vec{j} - Q\vec{k}\ ;\ (\vec{F}_C; C)$

$\vec{F}_D = -Q\vec{i} + Q\vec{j}\ ;\ (\vec{F}_D; D)$

$\vec{F}_M = -Q\vec{j}\ ;\ (\vec{F}_M; M)$

Equações: (1,5 pontos)

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} X_A + X_C - Q = 0 & (1) \\ Y_A + F_{BE} + Y_C + Q - Q = 0 & (2) \\ Z_A - Q = 0 & (3) \end{cases}$$ e

$$\vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -F_{BE} - Y_C + \frac{Q}{2} = 0 & (4) \\ X_C + Q = 0 & (5) \\ Y_C + Q - \frac{Q}{2} = 0 & (6) \end{cases}$$

c) De (5) e (6): $\vec{F}_C = -Q\vec{i} - \frac{Q}{2}\vec{j} - Q\vec{k}$ (0,5 pontos)

d) Para a polia:

$\sum F_y = 0$: $-Q\sqrt{2} - Q + F_{FH}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_{FH} = Q\left(2 + \sqrt{2}\right)$ (compressão)

e) Sistema $\left(-Q\vec{k}; C\right)$ e $\left(\vec{F}_D; D\right)$: $\vec{R} = -Q\vec{i} + Q\vec{j} - Q\vec{k} \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_D = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_D \cdot \vec{R} = 0$

Portanto, o sistema é equivalente a uma única força: a resultante $\vec{R}$ acima, aplicada em D. (0,5 pontos)

❑ Referências

[1] Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.

[2] Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 14th edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2017.

[3] França L.N.F., Matsumura A.Z. **Mecânica Geral**, 3ª edição, Edgard Blücher, 2011.