



PME 3100 – Mecânica I

Sistema de Esforços

Francisco J. Profito

fprofito@usp.br



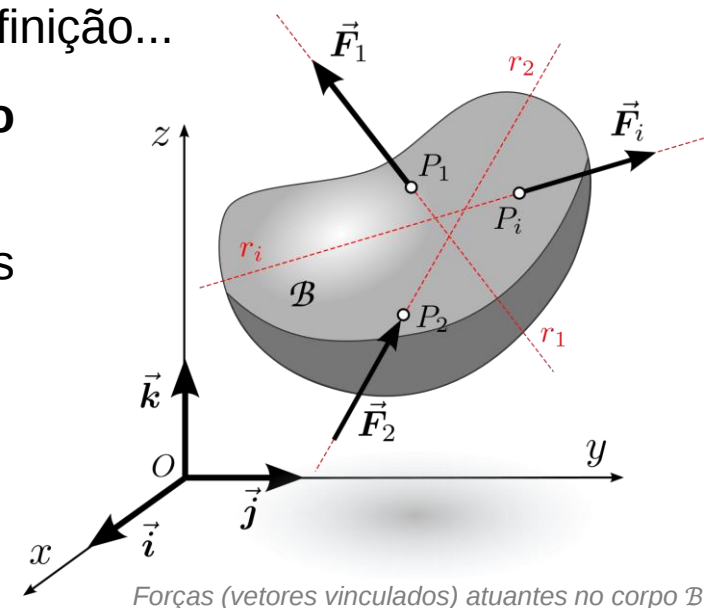
❑ Objetivos

- Iniciar a formalização vetorial da Mecânica Newtoniana. Importante para a solução de problemas 3D.
- Definir os vetores força, momento de força e momento em relação a um eixo.
- Aplicar de forma sistemática conceitos de Álgebra Vetorial para o estudo de corpos submetidos a um conjunto arbitrário de esforços (forças e momentos binários). **Importante para a construção de diagramas de corpo livre necessários para a solução de problemas de estática e dinâmica.**
- Apresentar os conceitos de sistemas de esforços equivalentes e redução de sistemas.
- Apresentar os conceitos de momento mínimo e eixo central.

□ Força

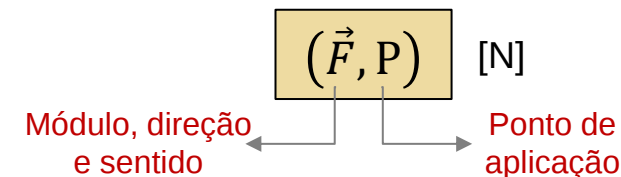
- O que é força, no sentido físico mais fundamental? Conceito de difícil definição...
- Possível definição de força: **medida quantitativa associada a interação mecânica entre corpos materiais.**
- Na Mecânica Clássica, os sistemas são submetidos a duas categorias fundamentais de forças:

- Forças de contato:
 - relacionadas com a **interação mecânica direta** entre os corpos;
 - transmissão através das superfícies dos corpos;
 - Ex.: forças hidrostática, hidrodinâmica (lubrificação), aerodinâmica, etc.
- Forças de campo:
 - relacionadas com a ação à **distância** entre os corpos;
 - transmissão através do volume/estrutura dos corpos;
 - Ex.: forças gravitacional e eletromagnética.



Forças (vetores vinculados) atuantes no corpo B.

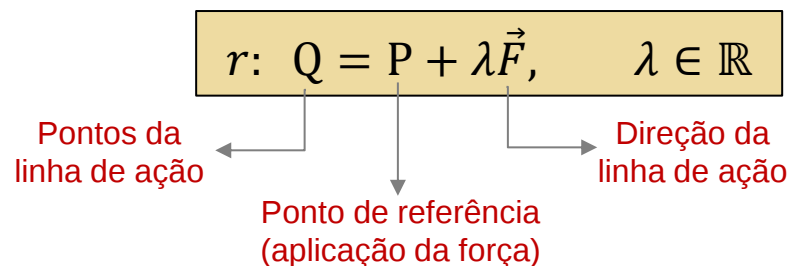
Notação



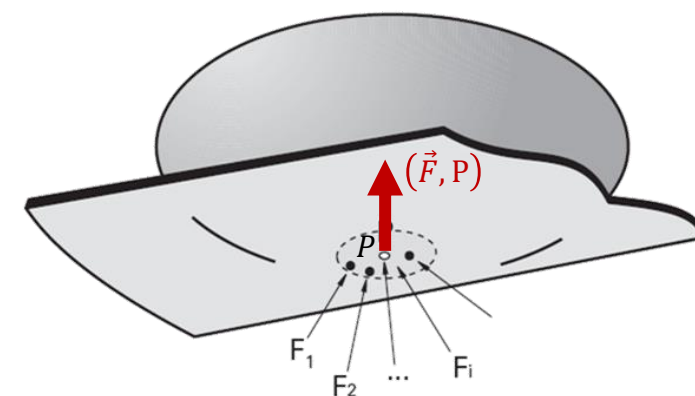
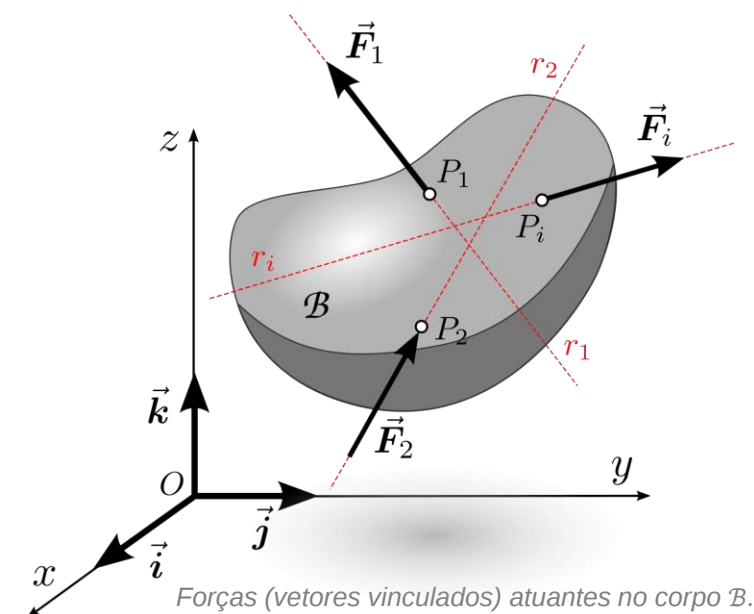
- A grandeza força é representada por um **vetor vinculado aplicado em um ponto específico do corpo** ao qual atua (módulo, direção, sentido e ponto de aplicação).

□ Força

- Linha de ação de uma força:



- Princípio da Transmissibilidade: em um **corpo rígido**, o vetor força pode ser admitido com sendo um **vetor deslizante**, ou seja, $\vec{F}$ pode deslizar ao longo de sua linha de ação **sem alterar seu efeito físico** sobre o corpo.
- Na realidade, forças não são aplicadas em **pontos** específicos de um corpo, o que seria fisicamente impossível (pressão infinita).
- Uma **força concentrada** é resultante da pressão de contato distribuída em uma área muito reduzida (em relação às dimensões do corpo) em torno do “ponto” admitido para a aplicação da força.



Distribuição de pressão da contato em torno do ponto de aplicação de uma força concentrada. Fonte [1].

❑ Momento de Força

- Momento de força é definido como a medida **quantitativa da tendência de rotação de um corpo em torno de um ponto** devido à ação de uma força. Matematicamente:

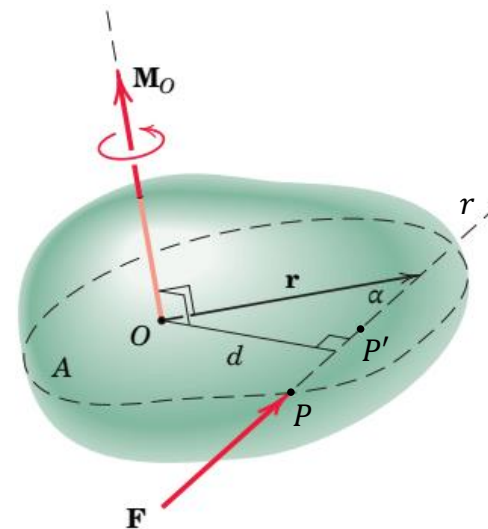
$$\vec{M}_O \triangleq (\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{F} \quad [\text{N.m}]$$

Vetor momento de força com respeito ao polo O Vetor posição entre o ponto de aplicação da força e o polo do momento Vetor força aplicado no ponto P

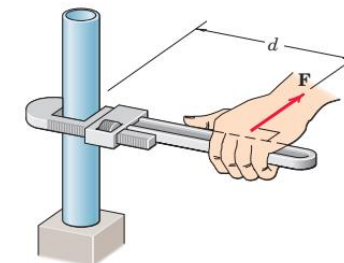
- A magnitude do momento é dada por:

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{M}_O\| &= \|\vec{P} - \vec{O}\| \|\vec{F}\| \sin \alpha \\ d &= \|\vec{P} - \vec{O}\| \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad \|\vec{M}_O\| = \|\vec{F}\| d$$

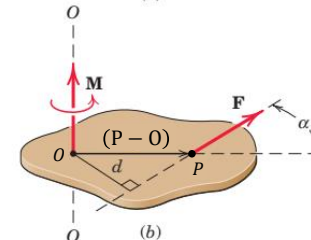
- d : braço do momento (distância entre a linha de ação da força e o polo do momento);
- quanto maior d , maior a tendência de giro do corpo.



Tendência de rotação de um corpo devido ao momento gerado pela força $(\vec{F}, P)$. Fonte [2].



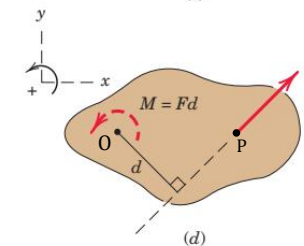
(a)



(b)



(c)



(d)

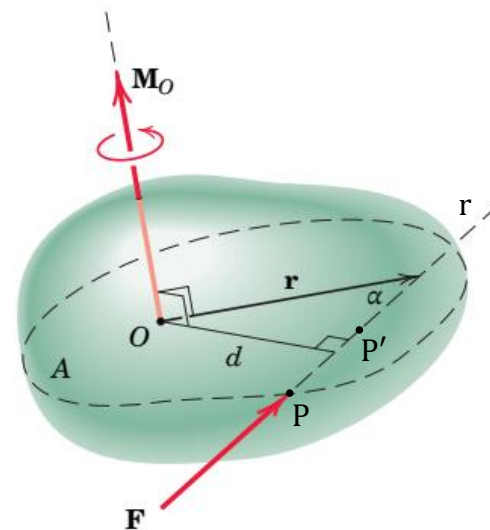
Momento aplicado por uma chave inglesa a um tubo vertical. Fonte: adaptado de [2].

□ Momento de Força

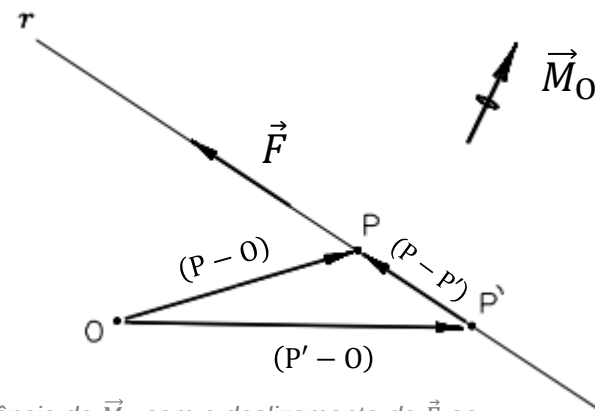
- $\vec{M}_O$ pode ser interpretado como a medida **quantitativa da tendência de rotação do corpo em torno do eixo** que passa por O e é ortogonal ao plano definido por O e $\vec{F}$.
- Propriedades de $\vec{M}_O$:
 - É um vetor vinculado ao polo do momento;
 - É uma grandeza **relativa**, ou seja, para uma mesma força $\vec{F}$, o momento em geral varia com o polo escolhido;
 - **Não** é alterado quando $\vec{F}$ desliza ao longo de sua linha de ação.

Prova: para $P' \in r$ (linha de ação de $\vec{F}$),

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (P' - O) \wedge \vec{F} = [(P - O) + (P' - P)] \wedge \vec{F} \\ &= (P - O) \wedge \vec{F} + \underbrace{(P' - P) \wedge \vec{F}}_{= \vec{0},} = (P - O) \wedge \vec{F} = \vec{M}_O \\ &\quad \text{pois } (P' - P) \parallel \vec{F}\end{aligned}$$



Tendência de rotação de um corpo devido ao momento gerado pela força $(\vec{F}, P)$. Fonte [2].



Invariância de $\vec{M}_O$ com o deslizamento de $\vec{F}$ ao longo de sua linha de ação. Fonte: adaptado de [3].

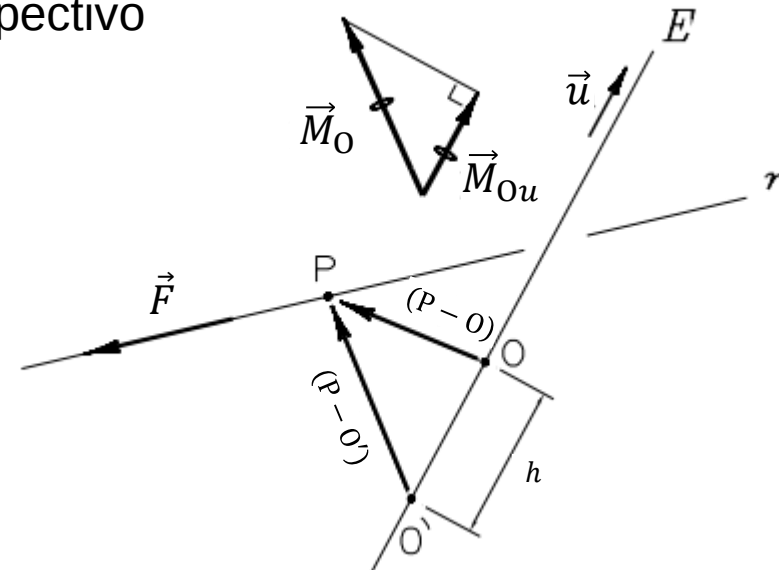
❑ Momento em Relação a um Eixo (Torque)

- Dado $\vec{M}_O$ e um **eixo que passa por O** orientado pelo versor $\vec{u}$, o respectivo momento em relação ao eixo $O\vec{u}$ é dado por:

$$M_{Ou} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{M}_{Ou} = (\vec{M}_O \cdot \vec{u})\vec{u} \quad [\text{N.m}]$$

- Propriedades de M_{Ou} :

- Também denominado **torque**;
- Representa a tendência de giro em torno do eixo $O\vec{u}$;
- É a projeção de $\vec{M}_O$ no eixo $O\vec{u}$.
- **Não** é alterado caso outro polo $O' \in O\vec{u}$ seja considerado como referência:



Momento em relação a um eixo. Fonte: adaptado de [3]

$$\begin{aligned} M_{O'u} &= \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = [(P - O') \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u} = \{[(O - O') + (P - O)] \wedge \vec{F}\} \cdot \vec{u} \\ &= [(O - O') \wedge \vec{F} + (P - O) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u} = \underbrace{[(O - O') \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u}}_{= \vec{0}, \text{ pois } [(O - O') \wedge \vec{F}] \perp \vec{u}} + [(P - O) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u} \\ &= [(P - O) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = M_{Ou} \end{aligned}$$

□ Momento em Relação a um Eixo (Torque)

➤ Casos particulares:

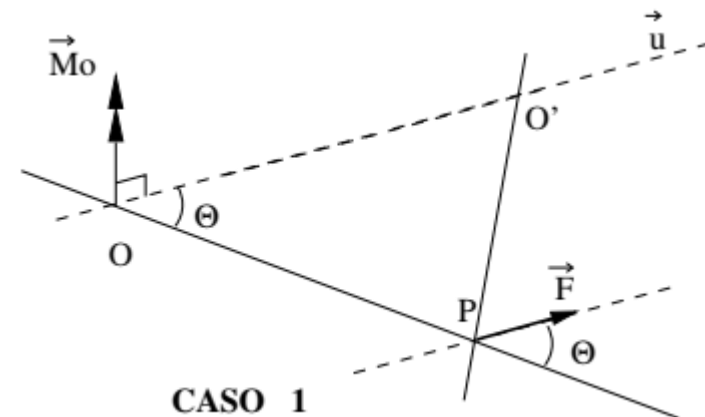
- Caso 1: Se a linha de ação de $\vec{F}$ for **paralela** ao eixo $O\vec{u}$, então $M_{Ou} = 0$

Para $\vec{F} \parallel \vec{u}$, $\vec{F} = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{M}_O = (\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{F} = (\vec{P} - \vec{O}) \wedge \lambda \vec{u} = \lambda (\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{u}$$

$$M_{Ou} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = [\lambda (\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{u}] \cdot \vec{u} = 0$$

$$= \vec{0}, \text{ pois } [(\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{u}] \perp \vec{u}$$



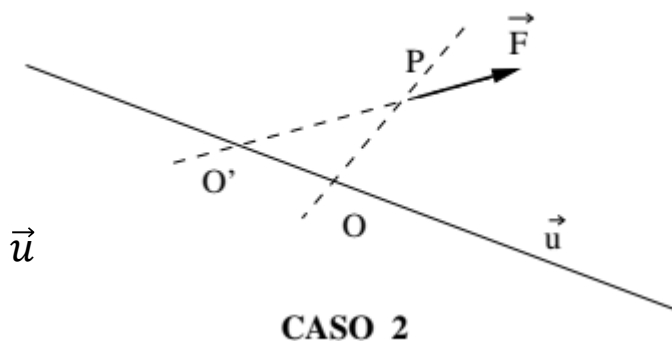
- Caso 2: Se a linha de ação de $\vec{F}$ intercepta o eixo $O\vec{u}$, então $M_{Ou} = 0$

Para $\vec{F} \nparallel \vec{u}$, $\vec{F} = \lambda (\vec{P} - \vec{O}')$, $\vec{O}' \in O\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{M}_{O'} = (\vec{P} - \vec{O}') \wedge \vec{F} = \vec{0}, \text{ pois } (\vec{P} - \vec{O}') \parallel \vec{F}$$

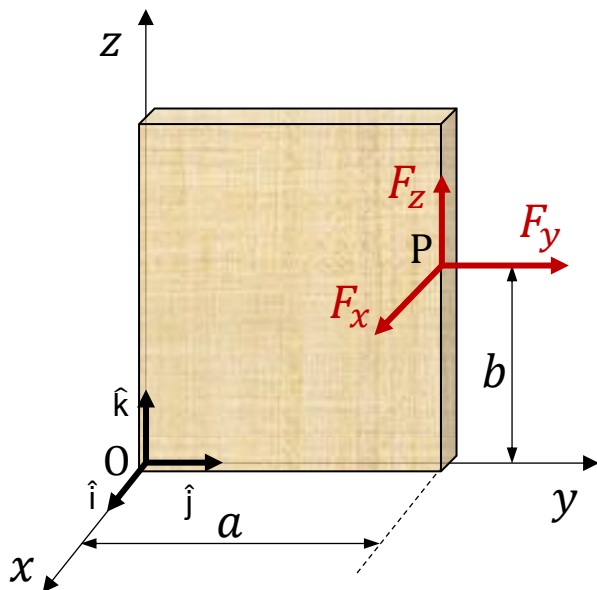
$$M_{O'u} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow [(\vec{P} - \vec{O}') \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u} = [(\vec{P} - \vec{O}) \wedge \vec{F} + (\vec{O} - \vec{O}') \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u}$$

$$= \underbrace{\vec{M}_O \cdot \vec{u}}_{= M_{Ou}} + \underbrace{[(\vec{O} - \vec{O}') \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u}}_{= 0, \text{ pois } [(\vec{O} - \vec{O}') \wedge \vec{F}] \perp \vec{u}} = M_{Ou} = 0$$



Casos particulares de momento em relação ao eixo
Fonte: adaptado de [4]

❑ Exercício 1



➤ Considere uma porta que abre e fecha em relação ao eixo Oz . Intuitivamente, qual componente de $\vec{F}$ é responsável pela rotação da porta? Pede-se:

- Calcule o momento de $\vec{F}$ com respeito ao ponto O ?
- Calcule o momento resultante em relação ao eixo Oz ?

Solução

a) Cálculo de $\vec{M}_O$:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \vec{F} = (a\hat{j} + b\hat{k}) \wedge (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}) \\ &= (aF_x)\hat{j} \wedge \hat{i} + (aF_y)\hat{j} \wedge \hat{j} + (aF_z)\hat{j} \wedge \hat{k} + (bF_x)\hat{k} \wedge \hat{i} + (bF_y)\hat{k} \wedge \hat{j} + (bF_z)\hat{k} \wedge \hat{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = (aF_z - bF_y)\hat{i} + (bF_x)\hat{j} - (aF_x)\hat{k}}$$

b) Cálculo de M_{Oz} :

$$\boxed{M_{Oz} = \vec{M}_O \cdot \hat{k} = -aF_x}$$

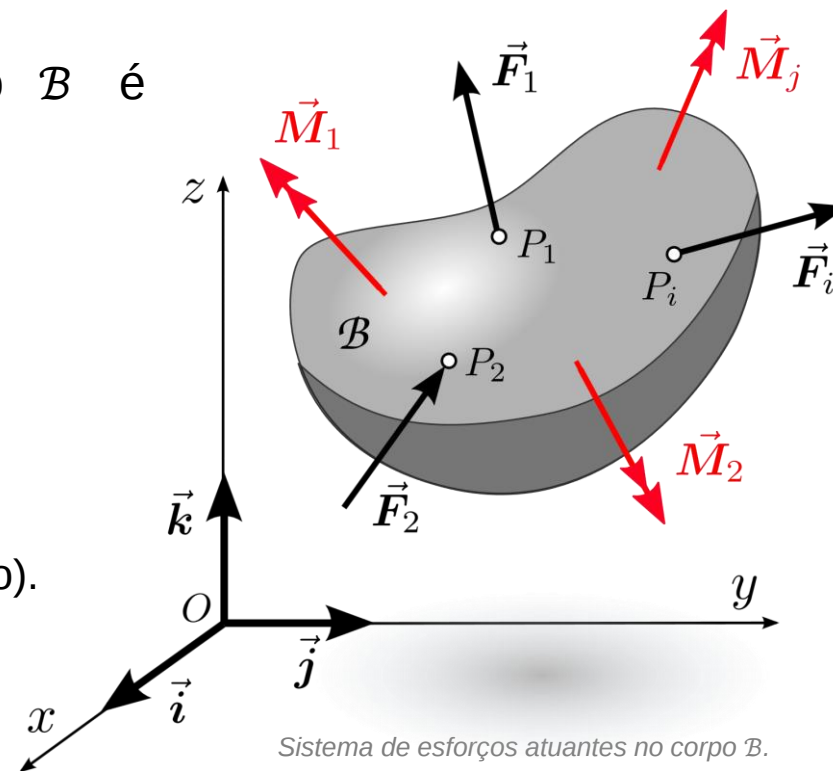
- M_{Oz} é medida da tendência de rotação da porta em torno do eixo Oz .
- F_x é a componente da força responsável pela rotação da porta.

❑ Sistema de Esforços

- Esforços = forças e momentos binários.
- O **conjunto** de forças e momentos binários aplicados em um dado corpo recebe o nome de sistema de esforços.
- Um sistema de esforços atuante em um corpo genérico $\mathcal{B}$ é representado por:

$$\mathbb{S} = \begin{cases} (\vec{F}_i, P_i), & i = 1, 2, \dots, n \\ \vec{M}_j, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

- $(\vec{F}_i, P_i)$: forças $\vec{F}_i$ aplicadas nos pontos $P_i \in \mathcal{B}$;
 - $\vec{M}_j$: momentos binários (momentos aplicados diretamente ao corpo).
- Sistema de esforços são caracterizados por dois vetores resultantes: $\vec{R}(\mathbb{S})$ e $\vec{M}_O(\mathbb{S})$.



Sistema de esforços atuantes no corpo $\mathcal{B}$.

❑ Sistema de Esforços

- Força Resultante: soma vetorial de todas as forças $(\vec{F}_i, P_i)$ atuantes em $\mathcal{B}$:

$$\vec{R}(\mathcal{S}) = \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}, \quad R_x = \sum_{i=1}^n F_{x_i}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{y_i}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{z_i}$$

- A força resultante $\vec{R}$ é um **vetor livre** (não possui ponto de aplicação ou reta suporte);
- Não se define momento da força resultante.

- Momento Resultante: soma vetorial dos momentos de todas as forças $(\vec{F}_i, P_i)$ com respeito ao **mesmo** polo 0, mais os momentos binários aplicados diretamente a $\mathcal{B}$:

$$\vec{M}_0(\mathcal{S}) = \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

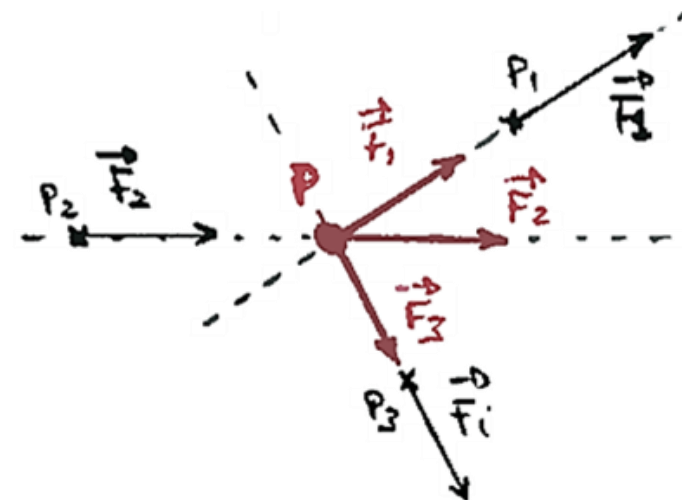
- O momento resultante $\vec{M}_0$ é um **vetor vinculado** ao polo 0;
- Os momentos binários são momentos independentes do polo.

□ Teorema de Varignon (Forças Concorrentes)

- Considere um sistema de esforços $\mathcal{S}$ composto **somente** por forças **concorrentes** no ponto P .
- É possível deslizar todas as forças de $\mathcal{S}$ de modo que coincidam no ponto de convergência P .
- Nesse caso, o momento resultante de $\mathcal{S}$ com respeito a um polo arbitrário O é dado por:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (P - O) \wedge \vec{F}_i = (P - O) \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}_{= \vec{R}}$$

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{R}$$



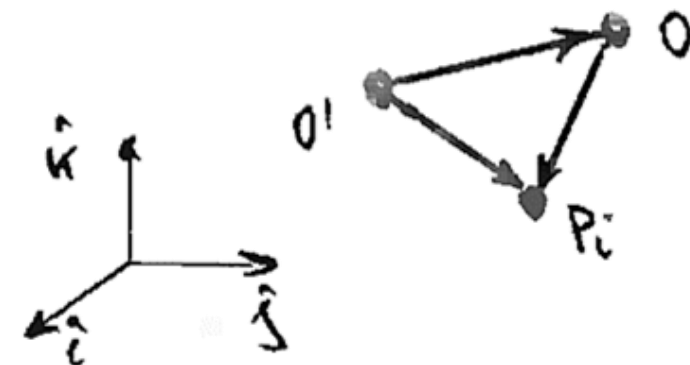
Sistema de forças concorrentes no ponto P .

- A expressão acima é **válida somente** para sistemas de esforços compostos por **forças concorrentes** (e.g. forças atuantes em uma partícula).

□ Teorema de Transporte de Momentos

- Dado um sistema de esforços $\mathcal{S}$ caracterizado pelos vetores resultantes $\vec{R}$ e $\vec{M}_O$, o momento resultante de $\mathcal{S}$ com respeito a **outro polo** arbitrário O' pode ser obtido diretamente através da Fórmula de Mudança de Polo.
- Considere o momento resultante de $\mathcal{S}$ com respeito ao **polo** arbitrário O' :

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O'} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i - O') \wedge \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = \sum_{i=1}^n [(\mathbf{P}_i - O) + (O - O')] \wedge \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i - O) \wedge \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j}_{= \vec{M}_O} + \sum_{i=1}^n (O - O') \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}_{= \vec{R}}\end{aligned}$$



Composição vetorial para a dedução do Teorema de Transporte de Momentos.

$$\boxed{\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}} \quad \begin{cases} \text{se } \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O \\ \text{se } (O - O') \parallel \vec{R}, \forall O' \Rightarrow \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O \end{cases} \quad (\text{condições de } \mathbf{independência} \text{ do momento com o polo})$$

- Portanto, conhecendo-se $\vec{R}$ e $\vec{M}_O$, $\vec{M}_{O'}$ pode ser determinado **sem** a necessidade de se calcular os momentos de cada força $(\vec{F}_i, \mathbf{P}_i) \in \mathcal{S}$ com respeito a O' .

❑ Momento Binário (ou Binário de Forças)

- Considere um sistema de esforços S composto por um **par forças** de mesmo módulo e direção, porém com sentidos opostos e linhas de ação distintas:

$$S = \begin{cases} (\vec{F}_1, P_1) : \vec{F}_1 = -F\hat{j}, P_1 = \frac{d}{2}\hat{i} \\ (\vec{F}_2, P_2) : \vec{F}_2 = F\hat{j}, P_2 = -\frac{d}{2}\hat{i} \end{cases}$$

- Força resultante:

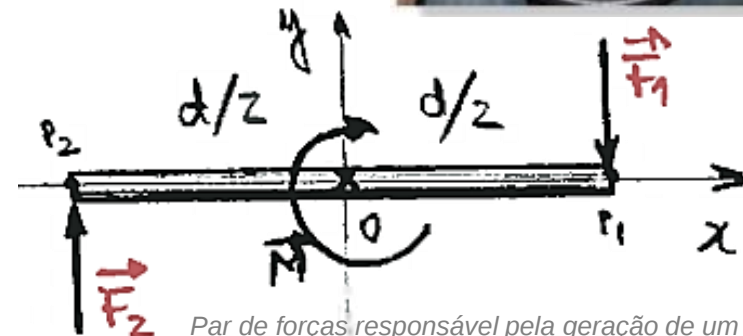
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{R} = \vec{0}}$$

- Momento resultante:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^2 (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 = \frac{d}{2}\hat{i} \wedge -F\hat{j} - \frac{d}{2}\hat{i} \wedge F\hat{j} = -\frac{Fd}{2}\hat{k} - \frac{Fd}{2}\hat{k} = \boxed{(-Fd)\hat{k}}$$

$$\vec{M}_{P_1} = \sum_{i=1}^2 (P_i - P_1) \wedge \vec{F}_i = (P_1 - P_1) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - P_1) \wedge \vec{F}_2 = -d\hat{i} \wedge F\hat{j} = \boxed{(-Fd)\hat{k}}$$

$$\vec{M}_{P_2} = \sum_{i=1}^2 (P_i - P_2) \wedge \vec{F}_i = (P_1 - P_2) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - P_2) \wedge \vec{F}_2 = d\hat{i} \wedge -F\hat{j} = \boxed{(-Fd)\hat{k}}$$



Par de forças responsável pela geração de um momento binário em uma barra retilínea.

O momento resultante
independe do polo!
(Momento Binário)

❑ Momento Binário (ou Binário de Forças)

➤ Observações e generalizações sobre o momento binário:

- A força resultante $\vec{R}$ é sempre **nula**;
- O momento resultante é um vetor livre e **independente** do polo:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (\vec{O} - \vec{O}') \wedge \underbrace{\vec{R}}_{=\vec{0} \text{ (sempre!)}} \Rightarrow \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$$

- O módulo do momento binário depende **apenas** da distância entre as linhas de ação do par de forças.
- Representa a forma de se aplicar um momento (torque) “**diretamente**” a um corpo. (Em última instância, a aplicação de um momento binário envolve a ação de um par de forças, daí a designação “Binário de Forças”).
- Induz rotação pura ao corpo, pois $\vec{R} = \vec{0}$.
- No caso de **corpos flexíveis**, o ponto de aplicação do binário é importante devido à distribuição local dos esforços internos.

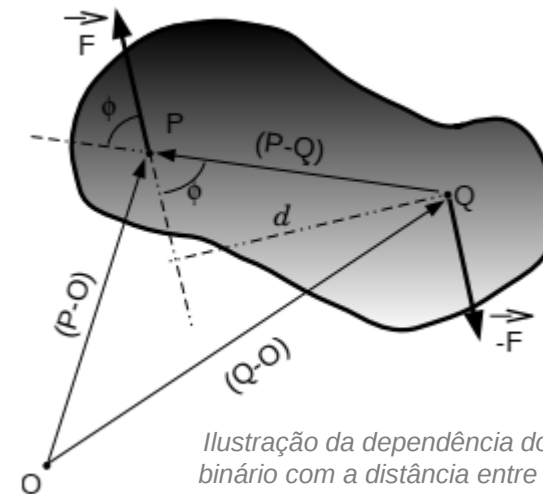


Ilustração da dependência do módulo do binário com a distância entre as linhas de ação do par de forças. Fonte [F4].

$$\vec{M}_Q = (\vec{P} - \vec{Q}) \wedge \vec{F}$$

$$\|\vec{M}_Q\| = \|\vec{P} - \vec{Q}\| \cdot \|\vec{F}\| \sin \phi$$

$$d = \|\vec{P} - \vec{Q}\| \sin \phi$$

⇓

$$\boxed{\|\vec{M}_Q\| = \|\vec{F}\| d}$$

□ Invariante Escalar

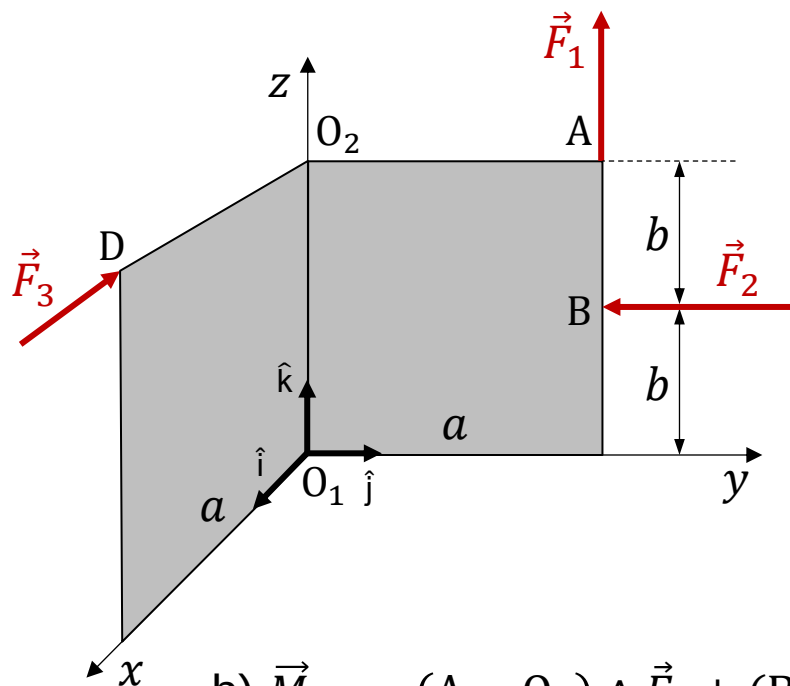
- O invariante escalar é um parâmetro (escalar) que caracteriza um dado sistema de esforços. Considerando o Teorema de Transporte de Momentos, tem-se:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R} \quad (\cdot \vec{R}) \quad (\text{multiplicação escalar em ambos os lados})$$

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + \underbrace{[(O - O') \wedge \vec{R}] \cdot \vec{R}}_{= \vec{0}, \text{ pois } [(O - O') \wedge \vec{R}] \perp \vec{R}} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R}}$$

- Propriedades do invariante escalar:
- **Independente** do polo com respeito ao qual o momento é calculado;
 - **Independente** da base escolhida para a representação dos vetores;
 - O par de vetores $(\vec{R}, \vec{M}_O)$ caracteriza **completamente** um dado sistema de esforços.

Exercício



- Duas placas, uma no plano Oxz e outra no plano Oxy são sujeitas ao sistema de forças:

$$(\vec{F}_1, A) = F_1 \hat{k}, \quad (\vec{F}_2, B) = -F_2 \hat{j}, \quad (\vec{F}_3, D) = -F_3 \hat{i}$$

- Determine: $\vec{R}$, $\vec{M}_{O_1}$, $\vec{M}_{O_2}$, M_z e I

Solução

$$a) \vec{R} = \Sigma \vec{F}_i = \boxed{-F_3 \hat{i} - F_2 \hat{j} + F_1 \hat{k}}$$

$$b) \vec{M}_{O_1} = (A - O_1) \wedge \vec{F}_1 + (B - O_1) \wedge \vec{F}_2 + (D - O_1) \wedge \vec{F}_3 = aF_1 \hat{i} + bF_2 \hat{i} - 2bF_3 \hat{j} = \boxed{(aF_1 + bF_2) \hat{i} - 2bF_3 \hat{j}}$$

$$c) \vec{M}_{O_2} = \vec{M}_{O_1} + (O_1 - O_2) \wedge \vec{R} = (aF_1 + bF_2) \hat{i} - 2bF_3 \hat{j} - 2b \hat{k} \wedge (-F_3 \hat{i} - F_2 \hat{j} + F_1 \hat{k}) = \boxed{(aF_1 - bF_2) \hat{i}}$$

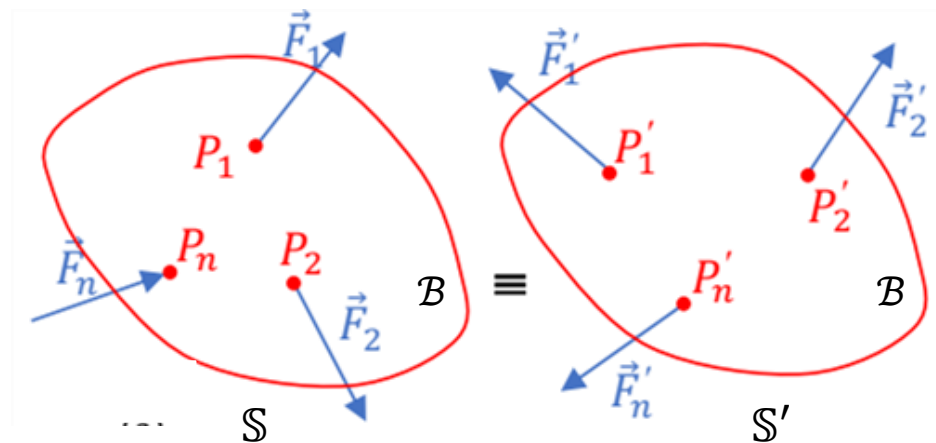
$$d) M_z = \vec{M}_{O_1} \cdot \hat{k} = \vec{M}_{O_2} \cdot \hat{k} = \boxed{0}$$

$$e) I = \vec{M}_{O_1} \cdot \vec{R} = \vec{M}_{O_2} \cdot \vec{R} = \boxed{F_3(bF_2 - aF_1)}$$

❑ Sistemas de Esforços Equivalentes

- Dois sistemas de esforços $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ são equivalentes se, e somente se, eles **produzem os mesmos efeitos físicos** sobre o corpo ao qual atuam.
- Sistemas equivalentes possuem as seguintes propriedades:
 - Mesma força resultante ($\vec{R}$) e mesmo momento com respeito a um polo arbitrário O ($\vec{M}_O$).
(De fato, o par de vetores $(\vec{R}, \vec{M}_O)$ caracteriza completamente um sistema de esforços)
 - Mesmo valor do invariante escalar (I).
(Atenção: somente $\vec{R}$ e I não caracterizam unicamente um sistema de esforços)
- Matematicamente:

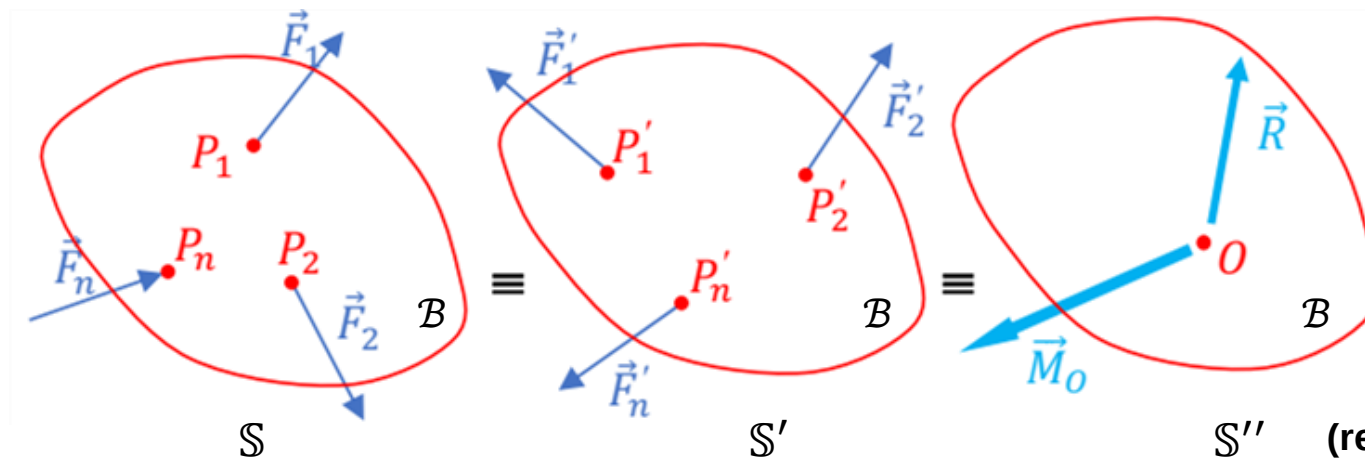
$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}(\mathcal{S}) = \vec{R}(\mathcal{S}') \\ \vec{M}_O(\mathcal{S}) = \vec{M}_O(\mathcal{S}') \end{cases}$$



Sistemas de esforços equivalentes atuantes sobre o corpo B . Fonte [5]

❑ Redução de Sistemas de Esforços

- Reduzir um sistema de esforços consiste em obter um outro sistema, **mais simples**, que seja equivalente ao sistema original.
- **Todo** sistema de esforços pode ser reduzido a um sistema equivalente composto pela força resultante aplicada em um ponto arbitrário O do corpo e um momento binário igual ao momento resultante com respeito ao ponto O (**redução de sistemas a dois vetores aplicados a um único ponto**).



- Equivalência de sistemas:

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}''$$

- Qual o melhor ponto para reduzir o sistema?

(redução a dois vetores aplicados a um único ponto)

Sistemas de esforços equivalentes atuantes sobre o corpo B e redução de sistemas a dois vetores aplicados em um único ponto. Fonte [5].

□ Redução de Sistemas de Esforços

➤ Casos particulares de redução de sistemas:

- **Caso I** – $\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O = \vec{0}$, $I = 0$ (Equilíbrio Estático)
 - Momento nulo com respeito a qualquer polo, isto é: $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R} = \vec{0}$
 - Problemas de equilíbrio estático que serão abordados posteriormente.
- **Caso II** – $\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, $I = 0$ (Momento Binário)
 - Momento **não** nulo e invariante com o polo, isto é: $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R} = \vec{M}_O$
 - Detalhes já vistos anteriormente.
- **Caso III** – $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, $I = 0$ (Redução a uma Única Força)
 - $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0, \forall O \Leftrightarrow \vec{M}_O \perp \vec{R}$
 - Em tais sistemas, **sempre** existirá um conjunto de pontos (**eixo central, E**) em relação aos quais o momento é **nulo**, ou seja, se $\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow O \in E$.
 - Se esses sistemas forem reduzidos a **quaisquer** pontos de seus respectivos eixos centrais, **apenas** $\vec{R}$ é suficiente para a caracterização completa dos sistemas (redução do sistema a uma única força).
- **Caso IV** – $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, $I \neq 0$ (Redução Geral)
 - Sistemas redutíveis a um momento binário e força resultante aplicados sobre o Eixo Central (redução máxima).

❑ Eixo Central

- Por definição, o momento **depende** da posição do polo escolhido para o seu cálculo.
- Existe algum polo (ou conjunto de polos) cujo **módulo** do momento seja **mínimo**?
Sim! Qual o valor desse momento mínimo e o lugar geométrico dos polos de momento mínimo?
- Considere um sistema de esforços arbitrário caracterizado pelos vetores resultantes $(\vec{R}, \vec{M}_O)$. Decompondo $\vec{M}_O$ na direção de $\vec{R}$, tem-se:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^{\parallel} + \vec{M}_O^{\perp} \quad (\cdot \vec{R}) \quad (\text{multiplicação escalar em ambos os lados})$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_O^{\parallel} \cdot \vec{R} + \underbrace{\vec{M}_O^{\perp} \cdot \vec{R}}_{= 0, \text{ pois } \vec{M}_O^{\perp} \perp \vec{R}} \Rightarrow$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_O^{\parallel} \cdot \vec{R} = I$$

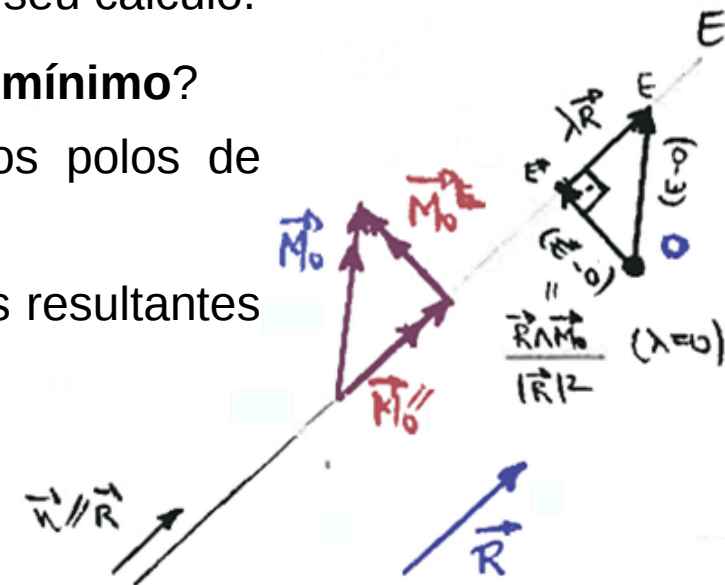
Invariante, constante
para o sistema.

$\vec{M}_O^{\parallel}$ é constante para o sistema, ou seja,
não varia com o polo.

- Admitindo a relação:

$$\|\vec{M}_O\|^2 = \underbrace{\|\vec{M}_O^{\parallel}\|^2}_{\text{constante}} + \underbrace{\|\vec{M}_O^{\perp}\|^2}_{\geq 0} \geq \|\vec{M}_O^{\parallel}\|^2 \geq 0$$

- $\vec{M}_O^{\parallel}$ não varia com o polo e $\|\vec{M}_O^{\parallel}\|$ é o valor do **momento mínimo** do sistema.
- $\vec{M}_O^{\perp}$ é a única componente que pode variar com o polo.



Plano definido pelos vetores $\vec{R}$ e $\vec{M}_O$ para a
determinação do eixo central E.

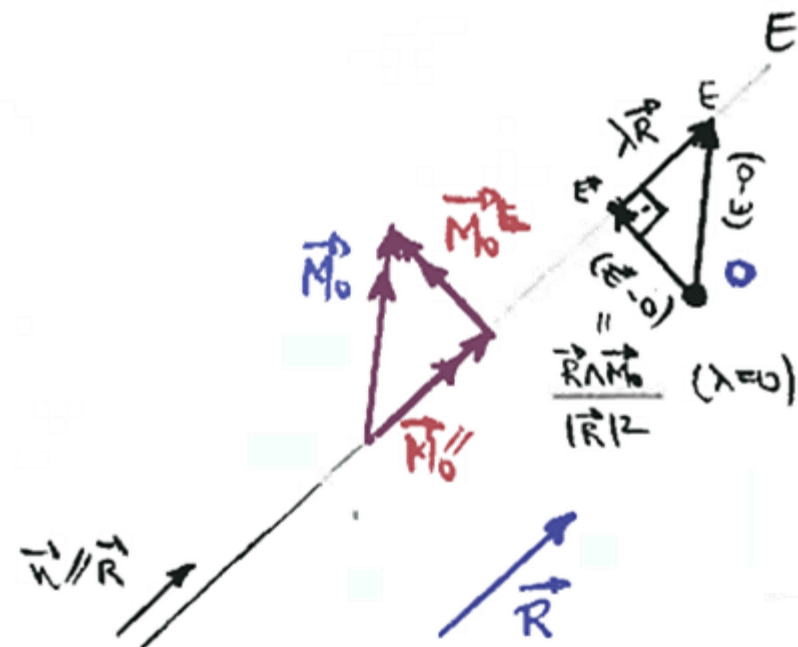
□ Eixo Central

- Utilizando a definição de momento em relação a um eixo:

$$\vec{M}_{\min} = \vec{M}_O^{\parallel} = (\vec{M}_O \cdot \vec{u})\vec{u} \quad \text{com} \quad \vec{u} \parallel \vec{R} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$$

$$\vec{M}_{\min} = \frac{(\vec{M}_O \cdot \vec{R})}{\|\vec{R}\|^2} \vec{R} = \left(\frac{I}{\|\vec{R}\|^2} \right) \vec{R} \Rightarrow M_{\min} = \|\vec{M}_{\min}\| = \frac{|I|}{\|\vec{R}\|}$$

O momento mínimo é
invariante com o polo



Plano definido pelos vetores $\vec{R}$ e $\vec{M}_O$ para a
derivação do eixo central E.

- Lugar geométrico dos polos de momento é mínimo (Eixo Central):

$$\underbrace{\vec{M}_E}_{= \vec{M}_{\min}} = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R}, \quad \forall E \text{ pertencente ao eixo central}$$

$$\underbrace{(E - O) \wedge \vec{R}}_{\vec{x} \wedge \vec{v}} = \underbrace{(\vec{M}_O - \vec{M}_{\min})}_{\vec{w}} \quad \Rightarrow \quad (E - O) = \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M}_O - \vec{M}_{\min})}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}$$

(equação vetorial)

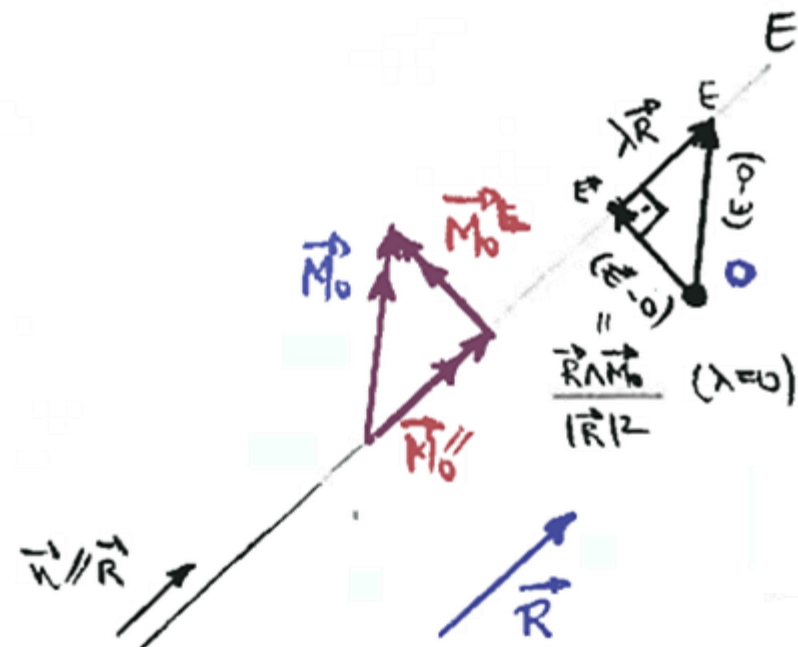
❑ Eixo Central

- Lugar geométrico dos polos de momento é mínimo (Eixo Central):

$$(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M}_O - \vec{M}_{\min})}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O - \overbrace{\vec{R} \wedge \vec{M}_{\min}}^{= \vec{0}, \text{ pois } \vec{M}_{\min} = \vec{M}_O^{\parallel} \parallel \vec{R}}}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}$$

- Portanto, a equação geral do Eixo Central é dada por:

$$E = O + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



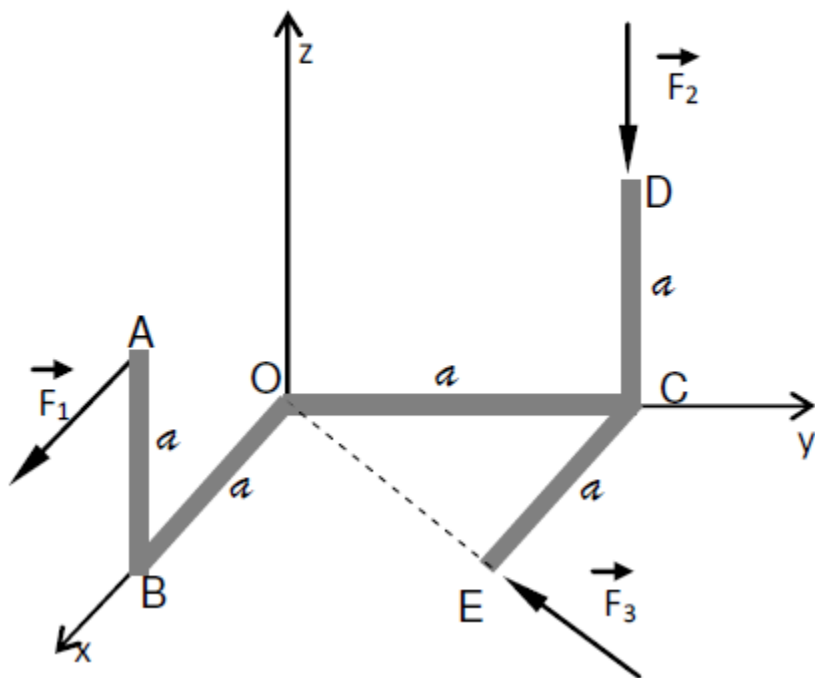
Plano definido pelos vetores $\vec{R}$ e $\vec{M}_O$ para a derivação do eixo central E .

- O Eixo Central é uma reta cujos pontos E são polos de momento mínimo.
- O Eixo Central é **paralelo** a $\vec{R}$.
- **Redução máxima** de um sistema de esforços arbitrário (caso IV):
 - $\vec{R}$ aplicado em um ponto qualquer do Eixo Central, isto é: $(\vec{R}, E)$
 - $\vec{M}_E = \vec{M}_{\min} \parallel \vec{R}$ (**Eixo Central = Eixo de Momento Mínimo**)

Força e torque na direção do eixo central
(analogia com a “chave de fenda”)

❑ Exercício (P1-Q1-2014)

Questão 1(3,0 pontos):



A peça $ABOCDE$ é formada por cinco barras rígidas soldadas e submetida ao sistema de forças $S: (\vec{F}_1, A), (\vec{F}_2, D)$ e $(\vec{F}_3, E)$. Sabendo-se que o módulo de todas essas forças é F e que cada barra possui comprimento a e massa desprezível, pedem-se:

- (a) determinar a resultante e o momento em O ;
- (b) obter um sistema equivalente a S em B ;
- (c) o vetor momento mínimo;
- (d) o lugar geométrico dos pontos em que o momento é mínimo.

Itens adicionais:

- (e) o momento com respeito ao eixo EO ;
- (f) Se o sistema é redutível a uma única força.



□ Exercício (P1-Q1-2014)

e) Vetor unitário paralelo a EO:

$$\vec{u} = \frac{a(\hat{i} + \hat{j})}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\sqrt{2}(\hat{i} + \hat{j})}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto: } M_{EO} &= \vec{M}_O \cdot \vec{u} = aF(-1, 1, 0) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0) \\ &= \frac{\sqrt{2}aF}{2}(-1 + 1 + 0) \Rightarrow M_{EO} = 0 \end{aligned}$$

Observe a diferença entre momento mínimo com respeito aos pontos do eixo central e o momento em relação ao eixo EO.

As componentes dos momentos com respeito aos pontos do eixo EO na direção desse eixo são nulas, mas nada foi dito sobre a componentes perpendiculares. Logo, os módulos dos momentos com respeito aos pontos de EO não são, necessariamente, mínimos.

No caso dos momentos com respeito aos pontos do eixo central, as componentes na direção desse eixo são iguais e não nulas, e as componentes perpendiculares são todas nulas. Entretanto, os módulos do momento são iguais e mínimos.

$$\begin{aligned} \text{e) } I &= \vec{M}_O \cdot \vec{R} = aF(-1, 1, 0) \cdot F\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right) \\ &= aF^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) \Rightarrow I = -aF^2 \end{aligned}$$

Como $I \neq 0$, o sistema não é redutível a uma única força.

(a) (1,0)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = F\vec{i} - F\vec{k} - F\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\therefore \vec{R} = F\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} - F\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - F\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = (A - O) \wedge \vec{F}_1 + (D - O) \wedge \vec{F}_2 + (E - O) \wedge \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_O = a(\vec{i} + \vec{k}) \wedge F\vec{i} - a(\vec{j} + \vec{k}) \wedge F\vec{k} - a(\vec{i} + \vec{j}) \wedge F\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{M}_O = aF(-\vec{i} + \vec{j})$$

(b) (1,0)

$$\vec{M}_B = \vec{M}_O + (O - B) \wedge \vec{R}$$

$$\vec{M}_B = aF(-\vec{i} + \vec{j}) + (-a\vec{i}) \wedge F\left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_B = aF\left(-\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right)$$

(c) (0,5)

$$\vec{M}_{\min} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} = \frac{aF(-\vec{i} + \vec{j}) \cdot F\left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \vec{k}\right)}{F^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + F^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + F^2} \vec{R} = \frac{aF^2\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{F^2(3 - \sqrt{2})} \vec{R}$$

$$\vec{M}_{\min} = -\frac{a}{(3 - \sqrt{2})} \vec{R}$$

(d) (0,5)

$$(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} = \frac{aF^2}{F^2(3 - \sqrt{2})} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \lambda \vec{R}$$

$$(E - O) = \frac{a}{(3 - \sqrt{2})}(\vec{i} + \vec{j} + (1 - \sqrt{2})\vec{k}) + \lambda \vec{R}$$

❑ Exercício (P1-Q1-2022)

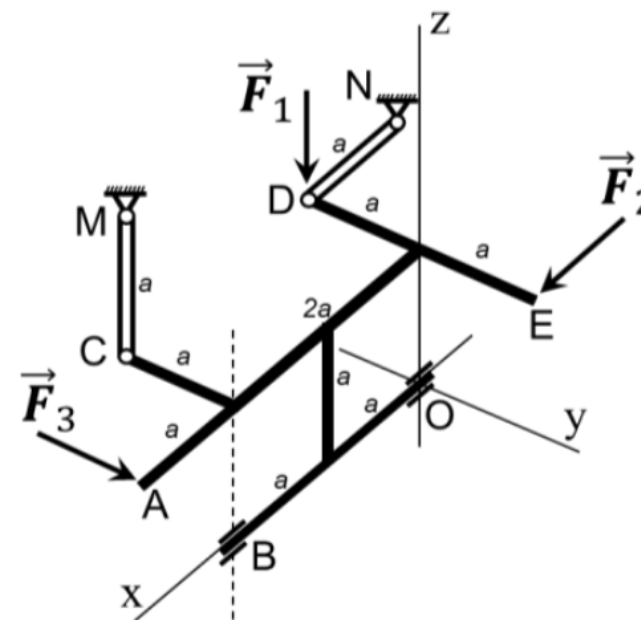
1ª Questão (3,5 pontos). A peça $OBACDE$ mostrada na figura mantém-se em equilíbrio apoiada nos anéis O e B e articulada às barras MC e ND , sendo a barra MC paralela ao eixo Oz e a barra ND paralela ao eixo Ox . Os vínculos em C , D , N e M são articulações ideais e os pesos da peça e das barras MC e ND são desprezíveis. Sobre o sistema são aplicadas as forças $(\vec{F}_1, D)$, com $\vec{F}_1 = -P\vec{k}$; $(\vec{F}_2, E)$, com $\vec{F}_2 = P\vec{i}$ e $(\vec{F}_3, A)$, com $\vec{F}_3 = P\vec{j}$.

Parte 1 – Considerando unicamente o sistema composto pelas forças ativas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$:

- Calcular a resultante do sistema de forças ativas.
- Calcular o momento em relação ao polo E .
- Verificar, justificando sua resposta, se o sistema de forças ativas é redutível a uma única força.
- Calcular o valor do momento mínimo.

Parte 2 – Considerando todo o sistema:

- Fazer o diagrama de corpo livre da peça $OBACDE$.
- Calcular as reações vinculares nos pontos B , M , N e O .





❑ Exercício (P1-Q1-2022)

RESOLUÇÃO

Parte 1

a) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = P\vec{i} + P\vec{j} - P\vec{k}$ (0,5 ponto)

b) $\vec{M}_E = (D - E) \wedge \vec{F}_1 + (E - A) \wedge \vec{F}_2 + (A - D) \wedge \vec{F}_3$
 $\Rightarrow \vec{M}_E = (-2a\vec{j}) \wedge -P\vec{k} + \vec{0} + (3a\vec{i} - a\vec{j}) \wedge P\vec{j}$
 $\Rightarrow \vec{M}_E = 2aP\vec{i} + 3aP\vec{k}$ (0,5 ponto)

c) Invariante escalar $I = \vec{M}_E \cdot \vec{R} = 2aP^2 - 3aP^2$, portanto $I = -aP^2 \neq 0$. O sistema não pode ser reduzido a uma força (0,5 ponto)

d) $\vec{M}_{min} = \frac{I}{|\vec{R}|^2} \vec{R} = \frac{-aP^2}{3P^2} (P\vec{i} + P\vec{j} - P\vec{k}) \Rightarrow \vec{M}_{min} = \frac{-aP}{3} (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ (0,5 ponto)

Parte 2

e) Veja diagrama de corpo livre ao lado. (1,0 ponto)

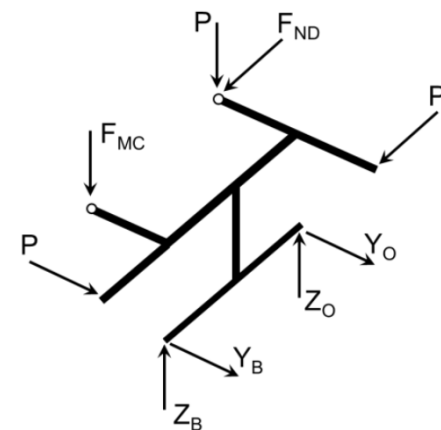
f) Equações de equilíbrio:

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = P + F_{ND} = 0 \\ \sum F_y = Y_O + Y_B + P = 0 \\ \sum F_z = Z_O + Z_B - P - F_{MC} = 0 \end{cases} \quad \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M_{Ox} = Pa + F_{MC}a - Pa = 0 \\ M_{Oy} = Pa + F_{ND}a - 2Z_Ba + 2F_{MC}a = 0 \\ M_{Oz} = -Pa + F_{ND}a + 2Y_Ba + 3Pa = 0 \end{cases}$$

(0,5 ponto)

Resolvendo o sistema linear de equações para as variáveis $(Y_O, Z_O, Y_B, Z_B, F_{ND}, F_{MC})$, obtêm-se:

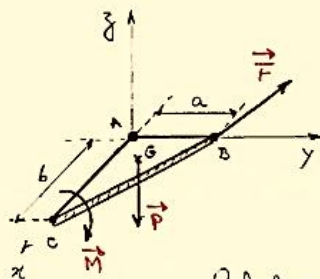
$$Y_O = \frac{-P}{2} \quad Y_B = \frac{-P}{2} \quad F_{ND} = -P \quad Z_O = P \quad Z_B = 0 \quad F_{MC} = 0$$





Exercício

* Exercício



- Placa homogênea localizada no plano xy
- Sistema de Forças e Momentos:

$$\begin{cases} (\vec{F}, C) = -P\hat{k} \\ (\vec{F}, B) = m\hat{i} + n\hat{j} + P\hat{k} \\ \vec{M} = \left(-\frac{2aP}{3}\right)\hat{i} - \left(\frac{6P}{3}\right)\hat{j} + am\hat{k} \quad (\text{binômio}) \end{cases}$$

- Calcular:
- $\vec{R}, \vec{M}_B, M_B^y$
 - Sistema reduzível a única força? Por quê?
 - Eixo de momentos mínimos (valores e pontos)

$$a) \vec{R} = \sum \vec{F}_i = -P\hat{k} + m\hat{i} + n\hat{j} + P\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = m\hat{i} + n\hat{j}}$$

$$\vec{M}_B = \sum (P_i - B) \wedge \vec{r}_i + \sum \vec{M}_j = (G - B) \wedge \vec{P} + \left(\frac{D - B}{O}\right) \wedge \vec{F} + \vec{M}$$

$$(G - B) = (G - A) + (A - B) = \frac{6}{3}\hat{i} + \frac{a}{3}\hat{j} - a\hat{j} = \frac{6}{3}\hat{i} - \frac{2a}{3}\hat{j}$$

$$\vec{M}_B = \left(\frac{6}{3}\hat{i} - \frac{2a}{3}\hat{j}\right) \wedge -P\hat{k} - \frac{2aP}{3}\hat{i} - \frac{6P}{3}\hat{j} + am\hat{k}$$

$$= \frac{6P}{3}\hat{j} + \frac{2aP}{3}\hat{i} - \frac{2aP}{3}\hat{i} - \frac{6P}{3}\hat{j} + am\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_B = am\hat{k}}$$

$$M_B^y = \vec{M}_B \cdot \hat{j} = 0 //$$

- b) Para sistema reduzível a única força: $\begin{cases} \vec{R} \neq 0 \checkmark \\ \vec{I} = \vec{R}_B \cdot \vec{R} = 0 \checkmark \end{cases}$ SIM, o sistema é reduzível a única força.

Exercício

$$d) M_{min} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{R}|} \therefore \boxed{M_{min} = 0} \quad (E-B) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{AB}}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} \quad (14)$$

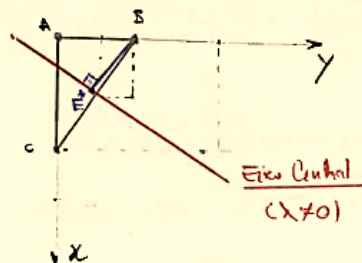
$$(E-B) = \frac{(m\hat{i} + n\hat{j}) \wedge (a n \hat{i})}{(m^2 + n^2)} + \lambda (m\hat{i} + n\hat{j})$$

$$= \frac{-an\hat{j} + amn\hat{i}}{m^2 + n^2} + \lambda (m\hat{i} + n\hat{j}) \quad \therefore (E-B) = \frac{amn\hat{i} - an^2\hat{j}}{(m^2 + n^2)} + \lambda (m\hat{i} + n\hat{j}) \quad \lambda \in \mathbb{R} //$$

- Para estudar o eixo central é conveniente definir o vetor $\vec{r} = (E-B)$ tal que $\vec{r} \perp \vec{R} \quad \lambda \neq 0$:

$$(E-B) = \frac{am(n\hat{i} - n\hat{j})}{m^2 + n^2}$$

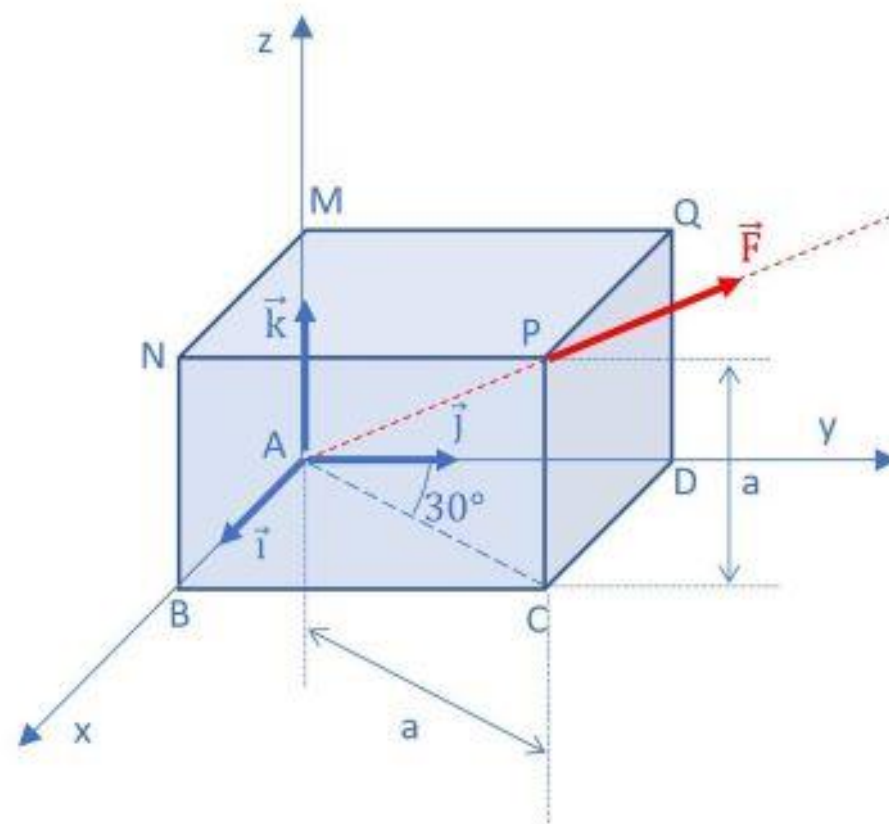
- Considerando o plano xy da placa:



Exercício

Na figura apresentada abaixo mostra-se um paralelepípedo ABCDMNPQ sujeito a uma força $\vec{F}$, de magnitude F , aplicada ao vértice P. Considerando o sistema de coordenadas $Oxyz$ e a base de versores $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, pede-se:

- A expressão do vetor $(P - A)$.
- A expressão da magnitude ρ do vetor $(P - A)$.
- A expressão do vetor $\vec{F}$.
- A expressão do momento de $\vec{F}$ com respeito ao polo C.





❑ Referências

- [1] França L.N.F., Matsumura A.Z. **Mecânica Geral**, 3ª edição, Edgard Blücher, 2011.
- [2] Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Statics**, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.
- [3] Tenenbaum, R. A. **Fundamentals of Appiled Dynamics**, Springer-Verlag New York, Inc. 2004.
- [4] Trigo F.C. **Notas de Aula de Mecânica I**. Escola Politécnica da USP, 2020.
- [5] Martins F. P. R. **Notas de Aula de Mecânica I**. Escola Politécnica da USP, 2020.