



PME 3100 – Mecânica I

Revisão de Álgebra Vetorial

Francisco J. Profito

fprofito@usp.br



❑ Objetivos

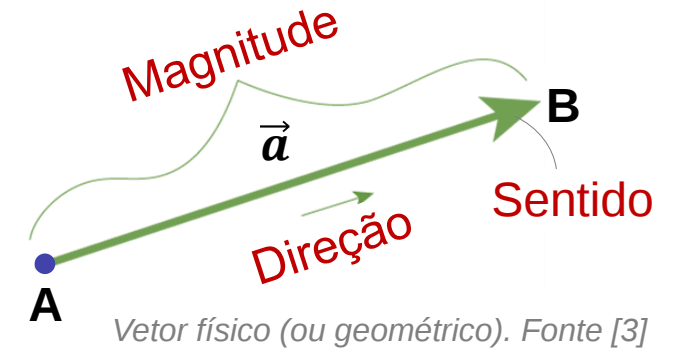
- Revisar conceitos fundamentais de Álgebra Vetorial necessários para o desenvolvimento da Mecânica Newtoniana (ou Mecânica Vetorial)
- Apenas o uso prático desses conceitos serão revisados. Uma apresentação mais detalhada pode ser encontrada em [1].

□ Grandezas Físicas

- Grandezas escalares: são grandezas físicas representadas por um único **número real** (escalar) que quantifica a **magnitude** da grandeza associada. Ex.:
 - Massa: m
 - Tempo: t
 - Temperatura: T
 - Energia: E
 - Trabalho: W
- Grandezas vetoriais: são grandezas físicas associadas a **direções específicas** no espaço. Portanto, além da magnitude, a **orientação** ao longo da qual essas grandezas atuam é necessária para a sua completa representação. Ex.:
 - Força: $\vec{F}$
 - Momento: $\vec{M}_O$
 - Velocidade e aceleração instantâneas: $\vec{v}_P$ e $\vec{a}_P$
 - Velocidade e aceleração angulares: $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$
 - Quantidade de movimento e quantidade de movimento angular: $\vec{Q}$ e $\vec{H}_O$

❑ Vetores

- Na Mecânica Newtoniana, eventos físicos ocorrem em um espaço Euclidiano tridimensional de **pontos** $\mathcal{E}$.
- Vetores são definidos como elementos pertencentes a um espaço **vetorial** Euclidiano tridimensional $\mathcal{V}$. Qualquer vetor $\vec{a} \in \mathcal{V}$ pode ser **representado** de duas formas:
 - Vetor Físico (ou geométrico): segmento de reta orientado que liga dois pontos arbitrários $A, B \in \mathcal{E}$.
 - Possui módulo, direção e sentido;
 - Representação **independente** do sistema de coordenadas e base de vetores associada.

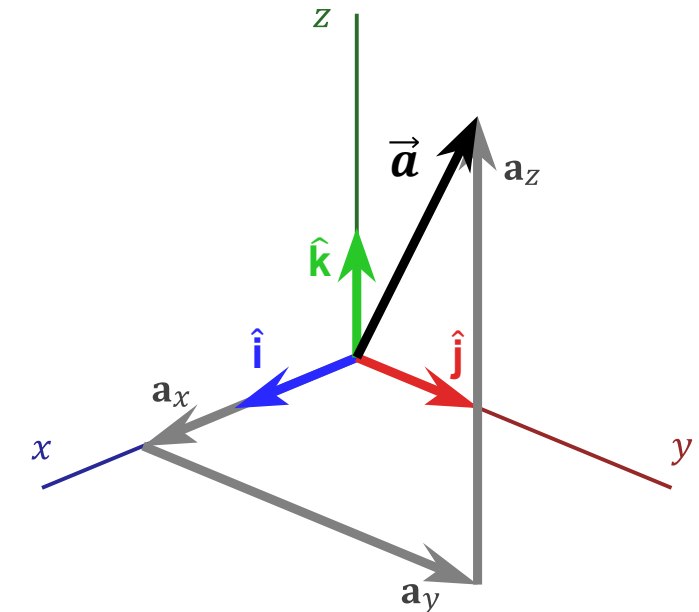


Vetor físico (ou geométrico). Fonte [3]

❑ Vetores

- Na Mecânica Newtoniana, eventos físicos ocorrem em um espaço Euclidiano tridimensional de **pontos** $\mathcal{E}$.
- Vetores são definidos como elementos pertencentes a um espaço **vetorial** Euclidiano tridimensional $\mathcal{V}$. Qualquer vetor $\vec{a} \in \mathcal{V}$ pode ser **representado** de duas formas:
 - Vetor Algébrico (ou coordenado): expresso por meio de componentes escalares associadas a uma base de vetores específica.
 - Representação **dependente** do sistema de coordenadas e base de vetores associada;
 - Considerando um sistema de coordenadas cartesiano $Oxyz$ associado a base de vetores ortonormais $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \in \mathcal{V}$, tem-se:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = (a_x, a_y, a_z) \rightarrow [a] = [a_x, a_y, a_z]^T$$



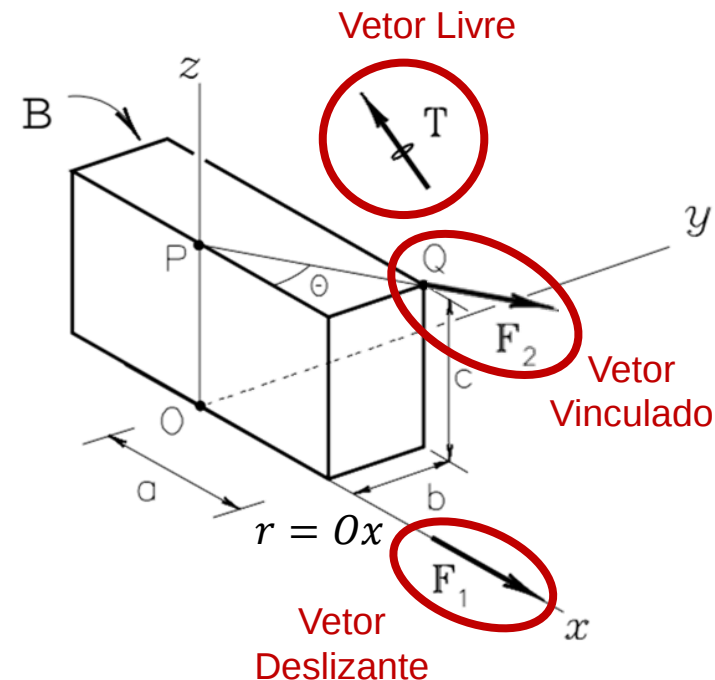
Vetor algébrico (ou coordenado). Fonte [3]

❑ Vetores

➤ Dependendo da disposição espacial, 3 tipos de vetores podem ser definidos:

- Vetor Livre: não possui ponto de aplicação, ou seja, o vetor é livre no espaço. Representação: módulo, direção e sentido. $\vec{T}$
- Vetor Deslizante: aplicado em qualquer ponto pertencente à sua linha de ação. Esse tipo de vetor pode se mover (deslizar) ao longo de sua linha de ação, mantendo o mesmo efeito físico sobre o corpo ao qual é aplicado. Representação: módulo, direção, sentido, e reta suporte de aplicação. $(\vec{F}_1, r)$
- Vetor Vinculado: aplicado em um ponto específico do corpo. Representação: módulo, direção, sentido, e ponto de aplicação. $(\vec{F}_2, Q)$.
Força é um vetor vinculado.

➤ Todas as operações e manipulações vetoriais são definidas para vetores livres.



Esforços aplicados em um bloco rígido **B**. Vetor livre ($\vec{T}$), vetor deslizante ($\vec{F}_1$) e vetor vinculado ($\vec{F}_2$). Fonte [2]

❑ Propriedades e Operações Vetoriais

- As propriedades e operações vetoriais apresentadas a seguir são válidas para:
 - $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{V}$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, onde $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial Euclidiano tridimensional;
 - $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ expressos na mesma base de versores $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \in \mathcal{V}$, ou seja, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ e $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$
- Propriedades básicas:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Adição é comutativa

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

Adição é associativa

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Adição possui elemento identidade $\vec{0}$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Adição possui elemento inverso

$$\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$$

Multiplicação é comutativa

$$\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$$

Multiplicação é associativa

$$1 \vec{a} = \vec{a}$$

Multiplicação possui elemento identidade 1

$$(\lambda + \mu)(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Propriedades distributiva de adição e multiplicação

❑ Propriedades e Operações Vetoriais

- Soma, subtração e multiplicação por escalar:

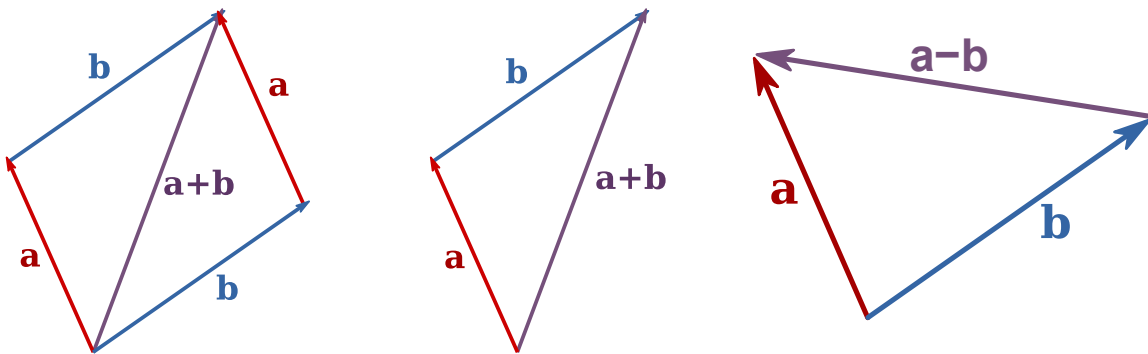
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k} \quad \text{Soma}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k} \quad \text{Subtração}$$

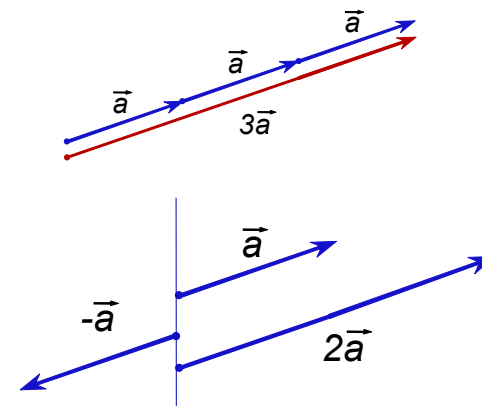
$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x)\hat{i} + (\lambda a_y)\hat{j} + (\lambda a_z)\hat{k} \quad \text{Multiplicação por escalar}$$

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \text{Magnitude}$$

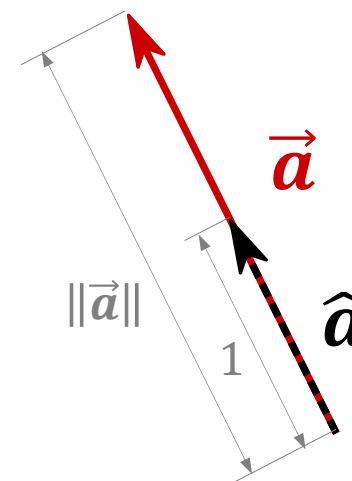
$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \rightarrow \vec{a} = \|\vec{a}\|\hat{a} \quad \text{Vetor unitário (versor)}$$



Soma e subtração de vetores. Regra do paralelogramo. Fonte [3]



Multiplicação de vetor por escalar. Fonte [3]



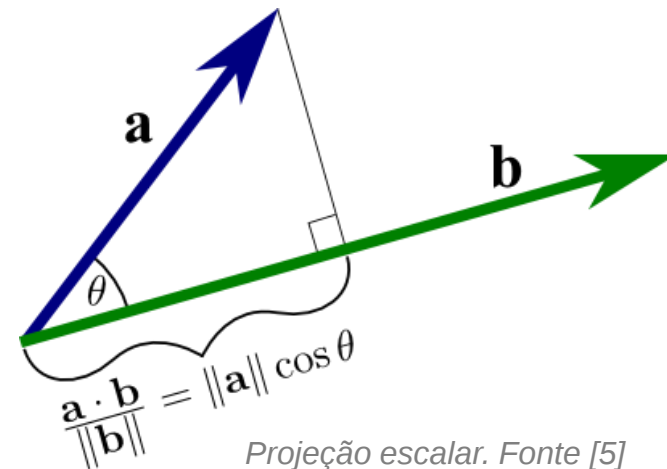
Magnitude e vetor unitário. Fonte [3]

□ Produto Escalar

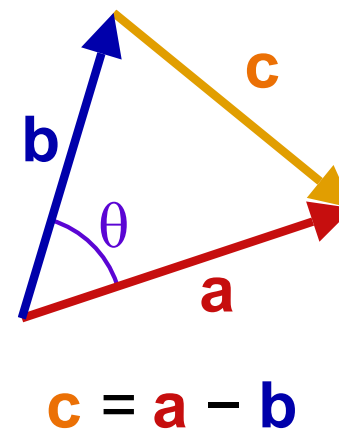
- O produto escalar entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definido por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- O resultado do produto escalar é um número inteiro (*escalar*).
- Geometricamente, representa o produto da magnitude de um dos vetores ($\vec{b}$) pela **projeção ortogonal** do outro vetor ($\vec{a}$) sobre o primeiro.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	Comutativa
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$	Distributiva
$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$	Multiplicação por escalar
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} 0, & \vec{a} = \vec{0} \text{ ou } \vec{b} = \vec{0} \\ 0, & \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{a} \perp \vec{b} \\ \ \vec{a}\ \ \vec{b}\ , & \vec{a} \parallel \vec{b} \end{cases}$	Positividade, paralelismo e ortogonalidade
$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$	Lei dos cossenos
$ \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \ \vec{a}\ \ \vec{b}\ $	Inequação de Schwarz
$\vec{x} \cdot \vec{a} = C \rightarrow \vec{x} = \frac{C \vec{a}}{\ \vec{a}\ ^2} + \vec{s} \wedge \vec{a}, \quad \forall \vec{s} \in \mathbb{E}^3 \text{ e } \vec{a} \neq \vec{0}$	Equação vetorial



Lei dos cossenos. Fonte [6]

❑ Produto Vetorial

- O produto vetorial entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definido por:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta) \hat{n}$$

- O resultado do produto vetorial é um vetor com as seguintes características:

- Magnitude: $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$ (área do paralelogramo com lados $\|\vec{a}\|$ e $\|\vec{b}\|$)
- Direção: **ortogonal** ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ($\hat{n}$)
- Sentido: definido pela regra da mão-direita

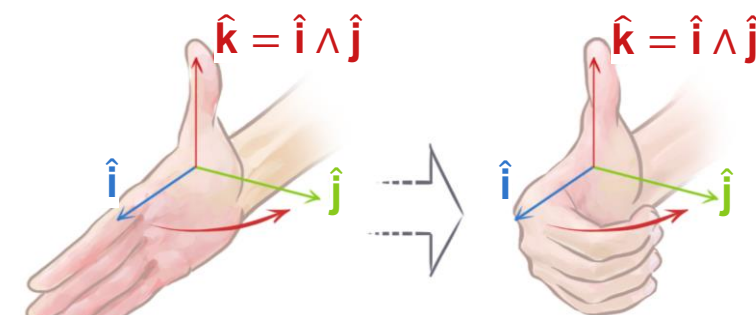
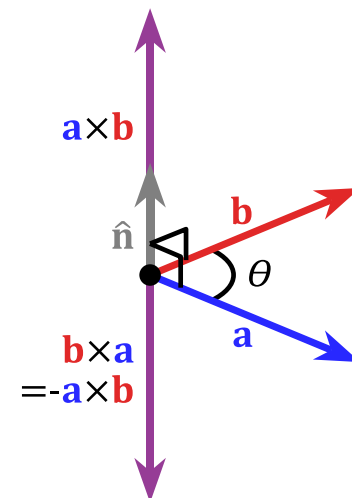
- Cálculo:

- Método algébrico (determinante):

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

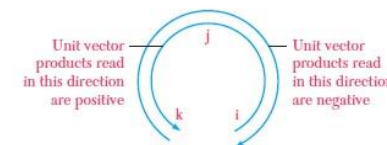
- Método geométrico (propriedade distributiva + “regra da mão-direita”):

$$\begin{aligned} (a_x \hat{i}) \wedge (b_x \hat{i} - b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) &= (a_x b_x) \underbrace{(\hat{i} \wedge \hat{i})}_{= \vec{0}} - (a_x b_y) \underbrace{(\hat{i} \wedge \hat{j})}_{= \hat{k}} + (a_x b_z) \underbrace{(\hat{i} \wedge \hat{k})}_{= -\hat{j}} \\ &= -(a_x b_y) \hat{k} - (a_x b_z) \hat{j} \end{aligned}$$



Produto vetorial definido a partir da regra da mão-direita. Fonte [7]

$$\begin{aligned} \hat{i} \wedge \hat{i} &= \hat{j} \wedge \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{k} = \vec{0} \\ \hat{i} \wedge \hat{j} &= -\hat{j} \wedge \hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j} \wedge \hat{k} &= -\hat{k} \wedge \hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k} \wedge \hat{i} &= -\hat{i} \wedge \hat{k} = \hat{j} \end{aligned}$$



❑ Produto Vetorial

➤ Propriedades

$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$	Distributiva
$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$	Anti -comutativa
$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$	Não -associativa
$(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\lambda \vec{b})$	Multiplicação por escalar
$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{cases} 0, & \vec{a} = \vec{0} \text{ ou } \vec{b} = \vec{0} \\ 0, & \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{a} \parallel \vec{b} \\ \ \vec{a}\ \ \vec{b}\ , & \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$	Paralelismo e ortogonalidade
$\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0 \text{ e } \vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$	
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$	Produto escalar triplo (volume do paralelepípedo definido por $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$)
$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \wedge (\vec{a} \cdot \vec{b})$	Produto vetorial triplo
$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$	Identidade de Jacobi
$\ \vec{a} \wedge \vec{b}\ ^2 = \ \vec{a}\ ^2 \ \vec{b}\ ^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$	Identidade de Lagrange
$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \rightarrow \vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\ \vec{a}\ ^2} + \lambda \vec{a}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ e } \lambda \neq 0$	Equação vetorial



□ Derivada Temporal de Vetores

- Para $\forall \vec{a}(t), \vec{b}(t) \in \mathcal{V}$ e $\forall \lambda(t) \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades para a derivada no tempo de vetores são válidas:

$$\frac{d}{dt}(\lambda \vec{a}) = \frac{d\lambda}{dt} \vec{a} + \lambda \frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\lambda} \vec{a} + \lambda \dot{\vec{a}}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}$$

Regra do produto

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt} = \dot{\vec{a}} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \dot{\vec{b}}$$

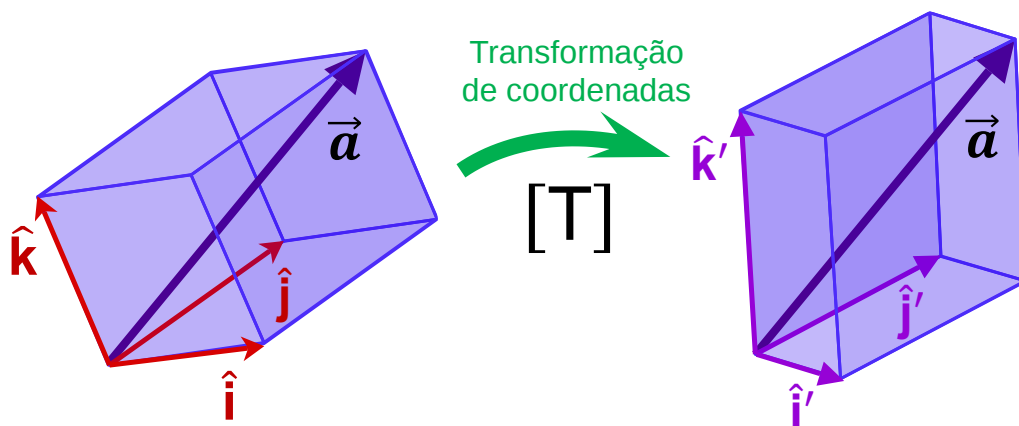
$$\frac{d\vec{a}}{dt} = (\dot{a}_x \hat{i} + \dot{a}_y \hat{j} + \dot{a}_z \hat{k}) + (a_x \dot{\hat{i}} + a_y \dot{\hat{j}} + a_z \dot{\hat{k}})$$

Atenção para a possibilidade de **diferenciação dos versores**.

Mais detalhes serão apresentados no tópico Cinemática do Corpo Rígido.

❑ Transformação de Coordenadas e Invariância de Vetores

- Vetores são elementos matemáticos **invariantes** ao sistema de coordenadas e a base de vetores associada utilizados para a sua **representação**.
- Esta característica está relacionada com a **natureza tensorial dos vetores**. De fato, grandezas escalares e vetoriais são casos especiais de tensores de ordem 0 e 1, respectivamente.
- Um mesmo vetor pode ser expresso em diferentes bases de vetores (sistemas de coordenadas). Neste caso, as **componentes** escalares do vetor serão em geral distintas e dependentes da base escolhida.
- As componentes de um vetor $\vec{a}$ expresso em **duas bases distintas** $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ e $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ são correlacionadas pela transformação de coordenadas resumida a seguir:



Transformação de coordenadas de vetores. Fonte [4]

$$[a] = [T][a']$$

Coordenadas na base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ Matrizes de mudança de base Coordenadas na base $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$



□ Referências

- [1] Camargo, I., Boulos, P., **Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial**, 3ª edição, Ed. Prentice Hall, 2005.
- [2] Tenenbaum, R. A. **Fundamentals of Applied Dynamics**, Springer-Verlag New York, Inc. 2004.
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_vector
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Change_of_basis
- [5] https://mathinsight.org/image/dot_product_projection
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Dot_product
- [7] https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product