



PME 3100 – Mecânica I

Dinâmica do Corpo Rígido

Prof. Francisco J. Profito

fprofito@usp.br



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos

2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)

❑ Motivação e Objetivos

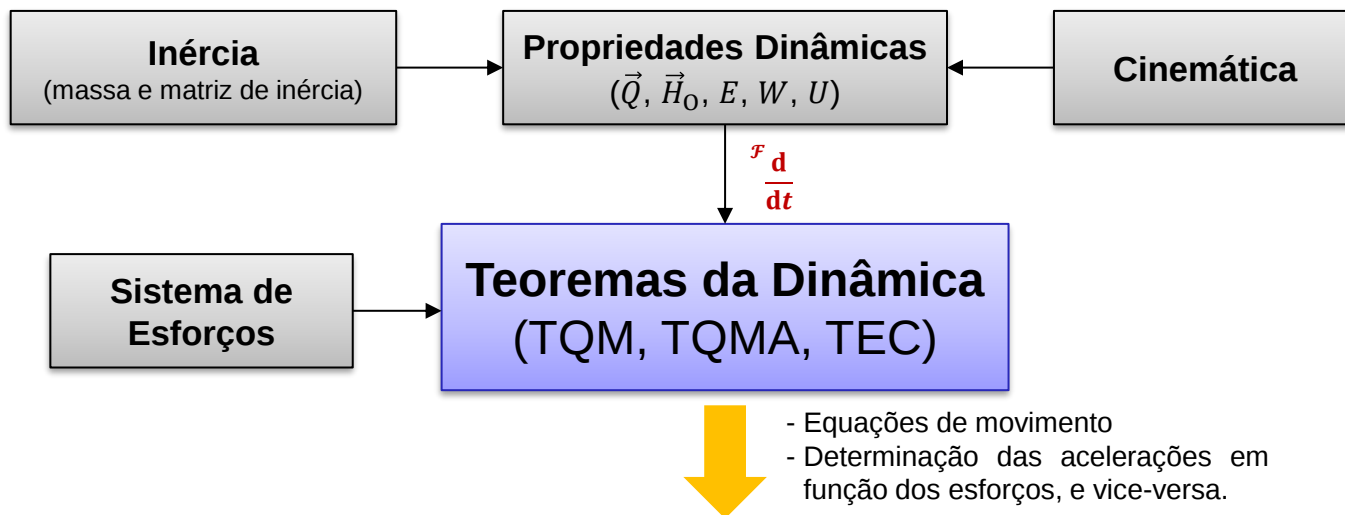
- O estudo da dinâmica consiste na análise do movimento de sistemas (partículas, sistemas de partículas e corpos) no espaço sujeitos à ação de esforços (forças e momentos).
- A análise do movimento é realizada através da **integração dos conceitos de Esforços, Cinemática e Inércia**.
- A combinação dos conceitos de **Esforços, Cinemática e Inércia** dá origem à definição das seguintes **Propriedades Dinâmicas** fundamentais:
 - Quantidade de Movimento ($\vec{Q}$)
 - Quantidade de Movimento Angular ($\vec{H}_O$)
 - Energia Cinética (E)
 - Trabalho (W)
 - Energia Potencial (U)



Robôs utilizados na linha de montagem de automóveis (acima), e braço de robô executando uma variedade de movimentos no espaço (abaixo). Em ambos os casos, o estudo da dinâmica é importante para o desenvolvimento de sistemas de controle para o funcionamento adequado dos sistemas. Fonte [1].

❑ Motivação e Objetivos

- A associação entre **Esforços e Variação Temporal das Propriedades Dinâmicas** dá origem aos seguintes **Teoremas da Dinâmica Vetorial**:
 - Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
 - Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
 - Teorema da Energia Cinética (TEC)
- Neste curso, se dará ênfase ao estudo da **dinâmica de corpos rígidos** baseada nos princípios da **Mecânica de Newton-Euler**.



Suspensão de um automóvel. As molas e amortecedores que compõem o sistema devem ser cuidadosamente selecionados para proporcionar dirigibilidade. Fonte [1].

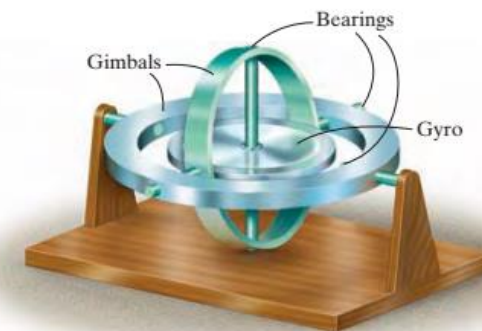


Ilustração de um giroscópio. Esse sistema é utilizado em sistemas de navegação inercial e em outros dispositivos de controle direcional e estabilização. Fonte [2].

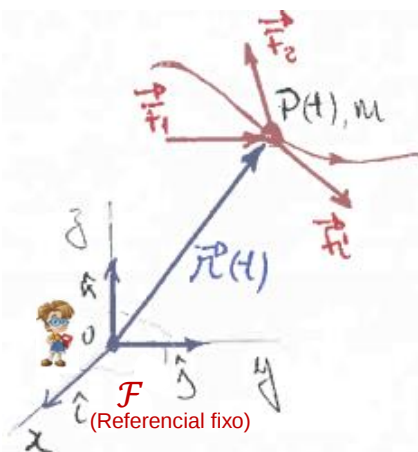


Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
- 2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido**
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)

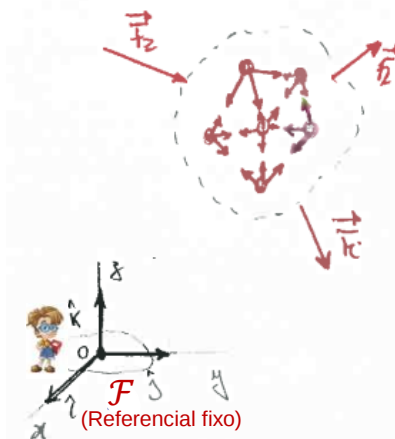
❑ Sistema de Partículas e Corpo Rígido

Partícula



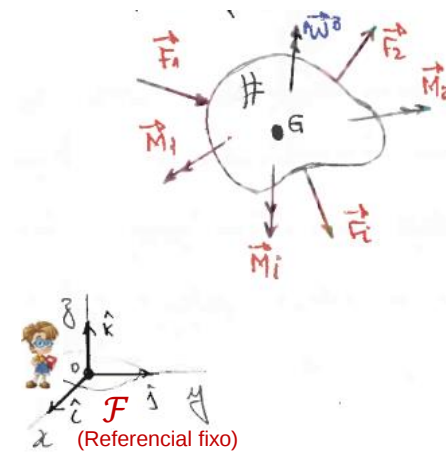
- Dimensões desprezíveis em relação às distâncias percorridas;
- Não possui estrutura interna definida (e.g. estrutura molecular/atômica);
- Massa concentrada em um único ponto cuja localização no espaço é dado pelo vetor posição $\vec{r}_P(t)$;
- Não possui rotação própria, logo apenas movimento de translação é definido
- Inexistência de forças internas;
- Leis de Newton foram definidas originalmente para partículas.

Sistema de Partículas



- Conjunto de partículas P_i de massa m_i ;
- Cinemática depende do movimento de cada partícula que compõe o sistema;
- O movimento **global** do sistema pode ser representado utilizando o conceito de centro de massa;
- Sistema **como um todo** pode rotacionar;
- Forças internas devido à interação entre as partículas devem ser consideradas na análise (geralmente se cancelam mutuamente).

Corpo Rígido



- Conjunto de partículas rigidamente conectadas, ou seja, as distâncias entre as partículas que compõem o corpo não variam com o movimento.
- Dimensões físicas não variam quando submetido a esforços.
- Possui rotação própria;
- O movimento arbitrário de um corpo rígido consiste na sobreposição de translação (3 GLs) e rotação (3 GLs).



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
- 3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)**
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)

□ Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)

- A quantidade de movimento **linear** de um sistema composto por N partículas P_i de massa m_i e velocidade $\vec{v}_i$ em relação a um referencial fixo (inercial) $\mathcal{F}$ é definida por:

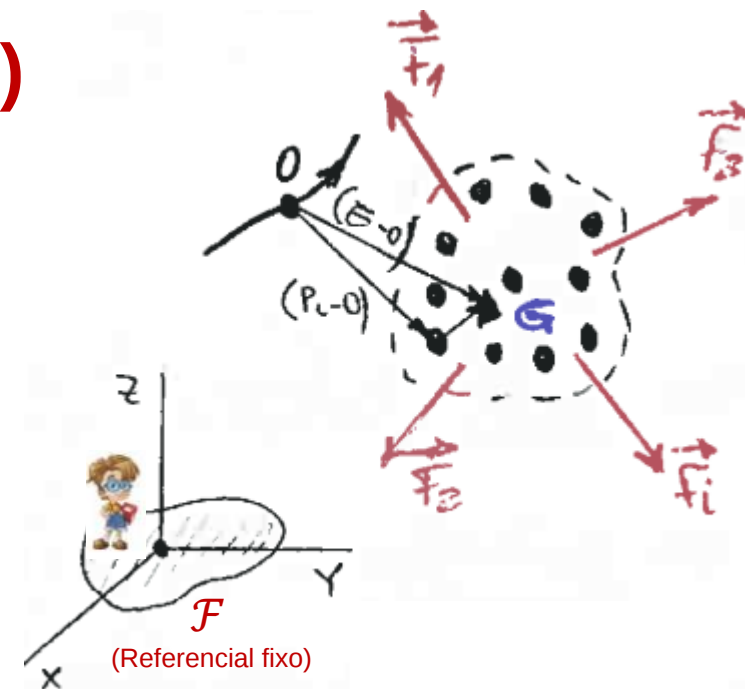
$$\vec{Q} \triangleq \sum_{i=1}^N \vec{Q}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (1)$$

- Derivando no tempo a expressão geral do centro de massa do sistema, e admitindo a **massa de cada partícula constante**, tem-se:

$$m(\mathbf{G} - \mathbf{O}') = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}') \Rightarrow \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} [m(\mathbf{G} - \mathbf{O}')] = \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}') \right]$$

$$m \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} (\mathbf{G} - \mathbf{O}') = \sum_{i=1}^N m_i \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}') \Rightarrow m(\vec{v}_G - \vec{v}_{O'}) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{O'}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - \vec{v}_{O'} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i}_{=m}$$

$$m\vec{v}_G - \cancel{m\vec{v}_{O'}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - \cancel{m\vec{v}_{O'}} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_G \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = m\vec{a}_G} \quad (2)$$

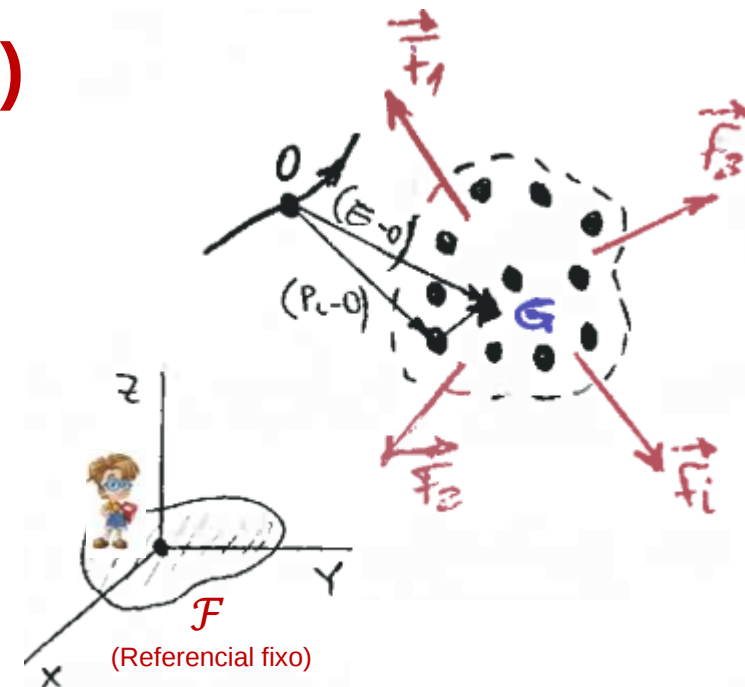


□ Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)

- Substituindo a Eq. (2) na Eq. (1), a expressão final da quantidade de movimento **linear** de um sistema partículas é dada por:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \Rightarrow \boxed{\vec{Q} = m \vec{v}_G} \quad (3)$$

- A expressão acima é igualmente válida para corpos rígidos, uma vez que não é necessária a aplicação de nenhuma relação cinemática para a determinação de $\vec{Q}$ em função do centro de massa do sistema.



- Considerando a variação temporal da quantidade de movimento linear (Eq. 1) em relação a um referencial inercial, e admitindo a **massa de cada partícula constante**, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{{}^F d\vec{Q}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{Q}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{{}^F d\vec{Q}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \right] = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{{}^F d\vec{v}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \quad \left(\begin{array}{l} = m \vec{a}_G \text{ (Eq. 2)} \\ \text{Somatório de todas as forças, internas e externas, atuantes no sistema.} \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{R}_i}_{\substack{\text{Resultante das forças internas e} \\ \text{externas atuantes em cada partícula } P_i}} = m \vec{a}_G \quad (4) \end{aligned}$$

= $\vec{R}_i$ (2ª Lei de Newton)

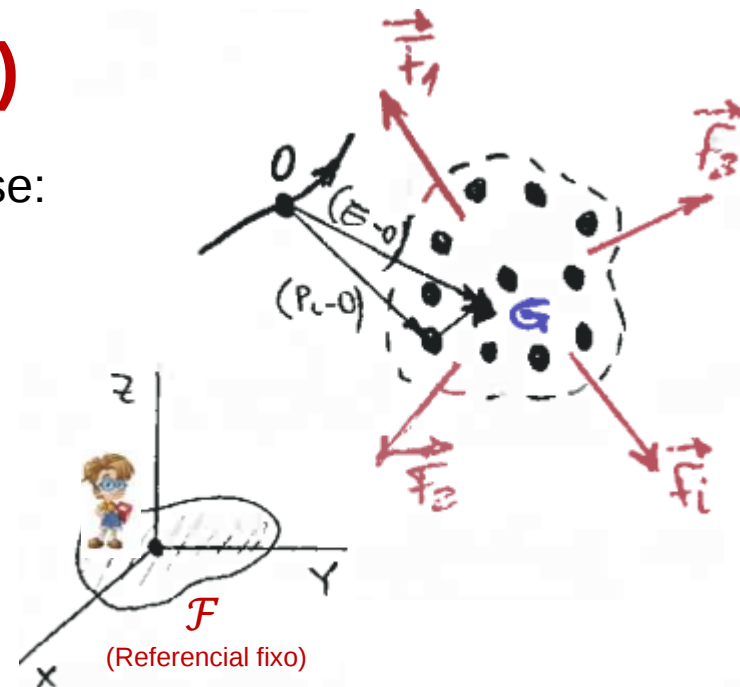
Somatório de **todas** as forças, internas e externas, atuantes no **sistema**.

□ Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)

- Separando as forças internas e externas atuantes nas partículas, tem-se:

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{R}_i^{\text{ext}} + \vec{R}_i^{\text{int}}) = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{\text{int}} = \vec{R}_{\text{ext}} + \vec{R}_{\text{int}} = m\vec{a}_G$$

- $\vec{R}_{\text{ext}}$: resultante de **todas** as forças atuantes no sistema devido à **ações externas** ao sistema;
- $\vec{R}_{\text{int}}$: resultante de **todas** as forças atuantes no sistema devido às **interações entre as partículas** do sistema.

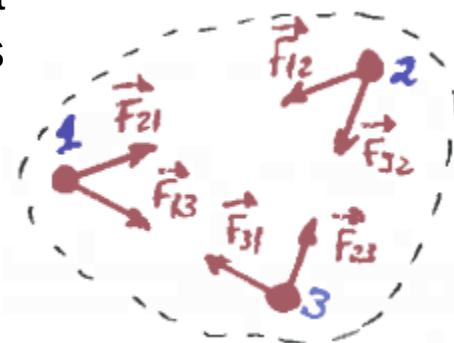


- A partir do Princípio da Ação-e-Reação (3ª Lei de Newton), a **resultante de todas as forças internas** atuantes nas partículas do sistema **é nula** (forças internas se cancelam mutuamente).

$$\vec{R}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{\text{int}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G} \quad (5)$$

Resultante das
forças externas

Aceleração do centro de massa em
relação a um referencial fixo (inercial) $\mathcal{F}$



Forças internas se
cancelam **mutuamente**:

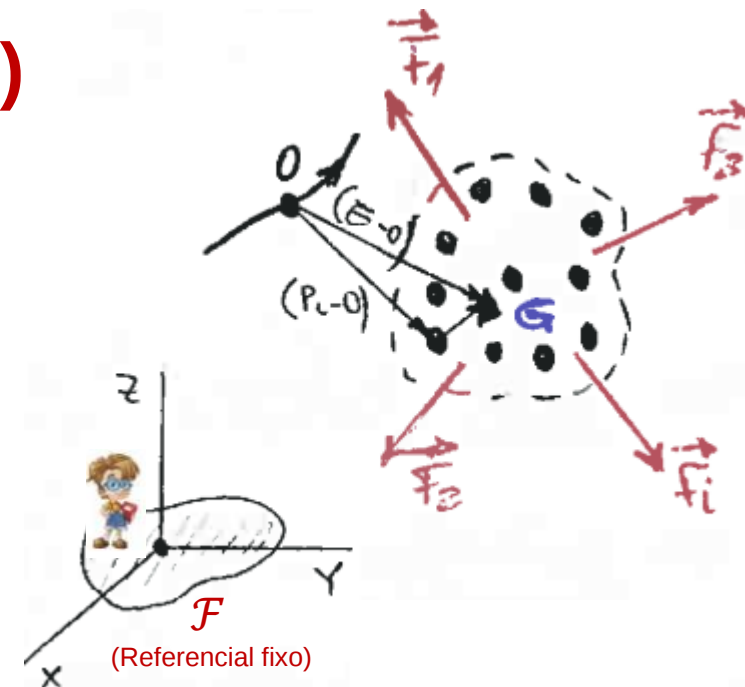
$\vec{R}_i^{\text{int}} \neq \vec{0}$, mas

$$\vec{R}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{\text{int}} = \vec{0}$$

□ Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)

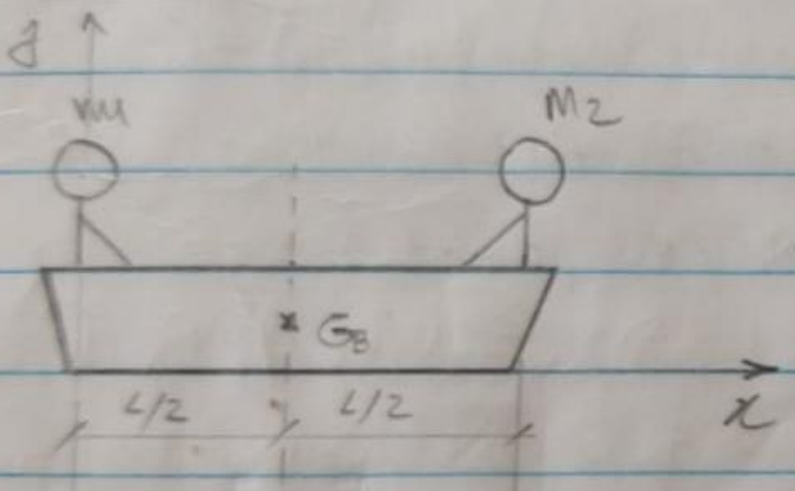
➤ Observações:

- A Eq. (5) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Fisicamente, somente **forças externas** ao sistema podem causar **variação no movimento de translação** do centro de massa do sistema.
- No caso de $\vec{R}_{\text{ext}} = \vec{0}$, o sistema permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (1ª Lei de Newton). Se o sistema está inicialmente em repouso, a posição do centro de massa do **sistema** não varia com o tempo, porém a posição de **cada partícula** pode variar internamente no interior do sistema.
- A distribuição de massa do sistema não influencia o movimento de translação do mesmo.
- O TQM é geralmente utilizado para a determinação de esforços reativos em problemas de dinâmica de corpos rígidos.



Exercício 1

Exercício 1



- Dois homens sentados em um barco de massa M , em repouso.

- Desprezando-se a resistência da água, pede-se o perfil e o deslocamento do barco se os 2 homens trocarem de lugar.



❑ Exercício 1 (cont.)

- Como em estática, o sistema é importante!

- Nesse caso o sistema = 2 barras + barras.

- Para o sistema: TMB: $\vec{M}_A = \vec{R}_{ext} = \vec{0}$

- Como estão no repouso: $\vec{A}_G = \vec{0}$

- Em componentes: $A_{Gx} = 0$
 $V_{Gx} = 0 \Rightarrow X_G^i = X_G^f$

$$X_G^i = \frac{M \cdot \frac{L}{2} + m_2 L}{M + m_1 + m_2}$$

$$X_G^f = \frac{m_2 X_B + M(\frac{L}{2} + X_B) + m_1(L + X_B)}{M + m_1 + m_2}$$

$$\cancel{\frac{ML}{2}} + m_2 L = m_2 X_B + \cancel{\frac{ML}{2}} + X_B M + m_1 L + m_1 X_B$$

$$m_2 L - m_1 L = X_B (M + m_1 + m_2)$$

$$X_B = \frac{(m_2 - m_1)L}{(M + m_1 + m_2)}$$

$m_2 > m_1$; direita
 $m_2 < m_1$; esquerda.



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
- 4. Distribuição de Massa**
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)

❑ Distribuição de Massa

➤ A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento de rotação**.

➤ Momento de Inércia

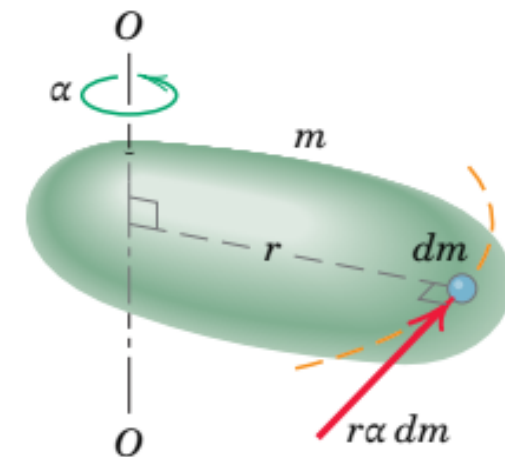
- Medida da distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de um eixo específico**.
- Fisicamente, representa a medida da “resistência” de um sistema em ter seu movimento de rotação em torno de um eixo alterado (inércia de rotação).
- Por definição, o momento de inércia de um sistema (ou corpo) em relação a um eixo Ou arbitrário é dado por:

$$J_{Ou} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Ou} = \int r^2 \rho dV \quad (1)$$

- Grandeza escalar

- Unidade: kg.m^2

- $J_{Ou} \geq 0$



❑ Distribuição de Massa

- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento de rotação**.

- **Momento de Inércia**

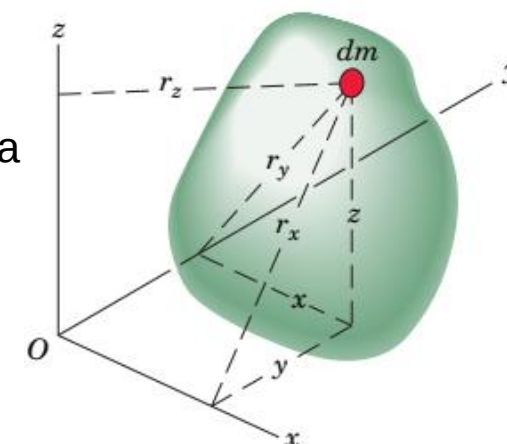
- Considerando um **sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$** , os momentos de inércia **em relação aos eixos coordenados** do sistema podem ser escritos, como segue:

$$J_{Ox} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Ox} = \int (y^2 + z^2) \rho dV$$

$$J_{Oy} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oy} = \int (x^2 + z^2) \rho dV$$

$$J_{Oz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oz} = \int (x^2 + y^2) \rho dV$$

(2)

Movimento no plano Oxy :

$$J_{Oz} = J_{Ox} + J_{Oy}$$

❑ Distribuição de Massa

- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento de rotação**.

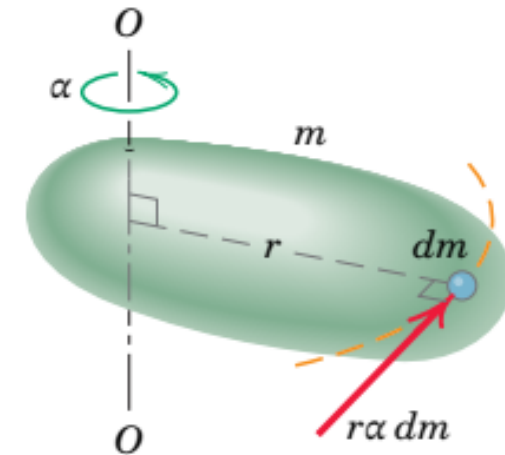
- **Produto de Inércia**

- Medida da distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em relação a um plano específico**.
- Por definição, o produto de inércia de um sistema (ou corpo) em relação a um plano Ouv arbitrário definido pelos eixos Ou e Ov é dado por:

$$J_{Ouv} = \sum_{i=1}^N m_i u_i v_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Ouv} = \int (uv) \rho dV$$

- (3)
- Grandeza escalar
 - Unidade: kg.m^2
 - $J_{Ouv} \geq 0$ ou $J_{Ouv} \leq 0$

onde u_i e v_i são a coordenadas de cada partícula P_i no plano Ouv .



❑ Distribuição de Massa

- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento de rotação**.

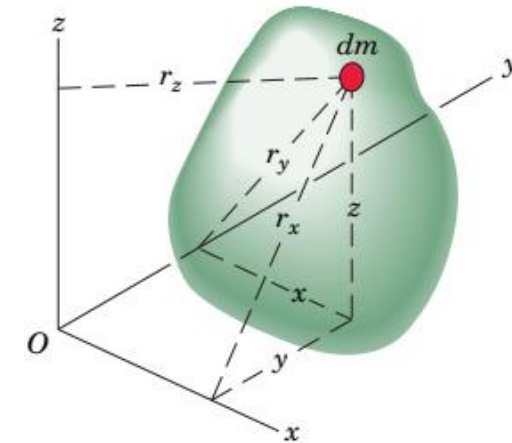
- **Produto de Inércia**

- Considerando um **sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$** , os produtos de inércia em relação aos **planos coordenados** do sistema podem ser escritos, como segue:

$$J_{Oxy} = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oxy} = \int (xy) \rho dV$$

$$J_{Oxz} = \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oxz} = \int (xz) \rho dV$$

$$J_{Oyz} = \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oyz} = \int (yz) \rho dV$$

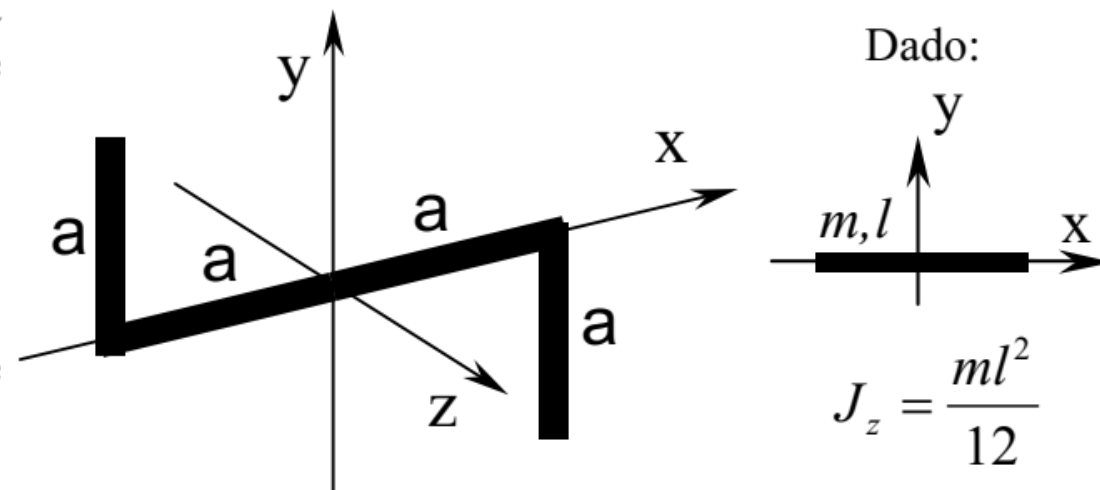


- (4)
- Movimento no plano Oxy : $J_{Oxz} = J_{Oyz} = 0$
 - Produtos de inércia são simétricos:
 $J_{Oxy} = J_{Oyx}$; $J_{Oxz} = J_{Ozx}$; $J_{Oyz} = J_{Ozy}$

❑ Exercício 2 (P3–Q1–2006)

1ª Questão (3,0 pontos) O sistema mostrado na figura encontra-se no plano xy e é composto por quatro barras de comprimento a e densidade linear ρ . Pedem-se:

- a) a massa do sistema e as coordenadas do seu baricentro;
- b) o momento de inércia do sistema em relação ao eixo z ;
- c) o produto de inércia do sistema em relação aos eixos x e z ;
- d) o produto de inércia do sistema em relação aos eixos x e y .





❑ Exercício 2 (P3-Q1-2006)

$$m = 4a\rho$$

0,5

$$G = (0, 0, 0)$$

0,5

$$J_z = \frac{2a\rho(2a)^2}{12} + 2\left\{\frac{a\rho(a)^2}{12} + a\rho\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)\right\} = \frac{2\rho a^3}{3} + \rho a^3\left(\frac{1}{6} + \frac{10}{4}\right) = \frac{2\rho a^3}{3} + \frac{8\rho a^3}{3}$$

0,5

$$J_z = \frac{10\rho a^3}{3}$$

0,5

$$J_{xz} = 0$$

(figura no plano xy)

0,5

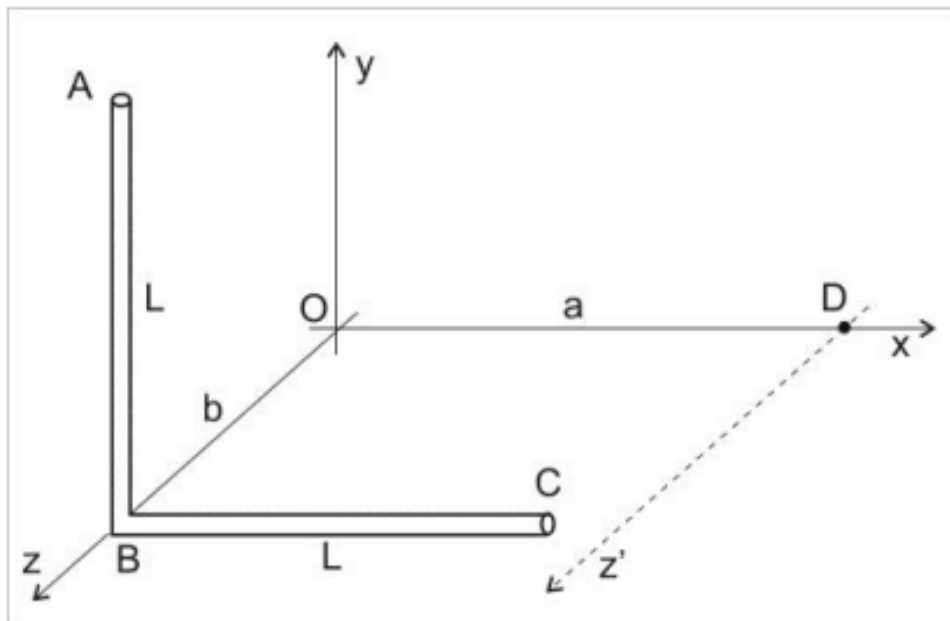
$$J_{xy} = \left\{0 + a\rho(-a)\left(\frac{a}{2}\right)\right\} + \left\{0 + a\rho(a)\left(-\frac{a}{2}\right)\right\}$$

$$J_{xy} = -\rho a^3$$

0,5

❑ Exercício 3 (P3-Q1-2015)

Questão 1 (2,5 pontos): Duas barras esbeltas e homogêneas AB e BO , cada uma com massa m e comprimento L , estão soldadas fazendo uma peça em forma de “L”, conforme mostrado na figura. Pedem-se:



- calcule o momento de inércia J_z e o produto de inércia J_{zy} dessa peça;
- calcule o momento de inércia $J_{z'}$ dessa peça, em relação ao eixo z' paralelo a z e que passa pelo ponto D .



❑ Exercício 3 (P3–Q1–2015)

a)

Momento de inércia:

Barra AB: distância do centro de massa até z : $\frac{L}{2}$

$$J_{ABz} = \frac{mL^2}{12} + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

Barra BC: distância do centro de massa até z : $\frac{L}{2}$

$$J_{BCz} = \frac{mL^2}{12} + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

Assim: $J_z = J_{ABz} + J_{BCz} = \frac{2mL^2}{3}$

(0,5 ponto)

Produto de inércia:

Barra AB: coordenadas do centro de massa : (0; L/2; b)

$$J_{ABzy} = 0 + mb \frac{L}{2} = \frac{mbL}{2}$$

Barra BC: coordenadas do centro de massa : (L/2; 0; b)

$$J_{BCzy} = 0 + m \cdot b \cdot 0 = 0$$

Assim: $J_{zy} = J_{ABzy} + J_{BCzy} = \frac{mbL}{2}$

(1,0 ponto)

b)

Barra AB: distância do centro de massa até z' : $\sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2}$

$$J_{ABz'} = \frac{mL^2}{12} + m \left[a^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] = m \left(\frac{L^2}{3} + a^2 \right)$$

Barra BO: distância do centro de massa até z' : $(a - L/2)$

$$J_{BCz'} = \frac{mL^2}{12} + m \left(a - \frac{L}{2} \right)^2 = m \left(\frac{L^2}{3} + a^2 - aL \right)$$

Assim: $J_{z'} = J_{ABz'} + J_{BCz'} = m \left(\frac{2L^2}{3} + 2a^2 - aL \right)$

(1,0 ponto)



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
- 5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)**
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)

□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

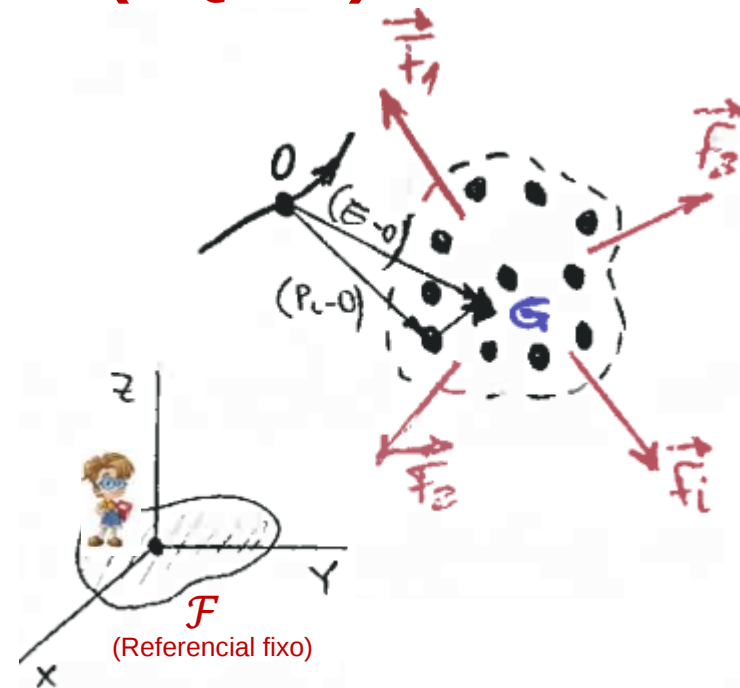
➤ Quantidade de Movimento Angular (Sistema de Partículas)

- A quantidade de movimento **angular** com respeito a um polo O arbitrário de um sistema composto por N partículas materiais P_i de massa m_i e velocidade $\vec{v}_i$, em relação a um referencial fixo (inercial) $\mathcal{F}$, é definida por:

$$\vec{H}_O \triangleq \sum_{i=1}^N \vec{H}_{iO} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{P}_i - O) \wedge \vec{Q}_i \Rightarrow \boxed{\vec{H}_O = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{P}_i - O) \wedge \vec{v}_i} \quad (1)$$

▪ Observações:

- A Eq. (1) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Para um sistema de partículas **qualquer**, é necessário conhecer os valores da massa, posição e velocidade de **cada** partícula para o cálculo de $\vec{H}_O$.
- Para um sistema de partículas **qualquer**, não é possível determinar $\vec{H}_O$ em função das propriedades do centro de massa do sistema.



□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

➤ Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

- Para o caso particular de corpo rígido, a velocidade de cada ponto material P_i do corpo pode ser expressa pela equação do campo de velocidades (vínculo cinemático relacionado à rigidez do corpo):

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{P_i} = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P_i - O) \quad O \in \mathcal{B}, \text{ ou uma extensão rígida do mesmo } (\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0})$$

- Substituindo a expressão acima na Eq. 1:

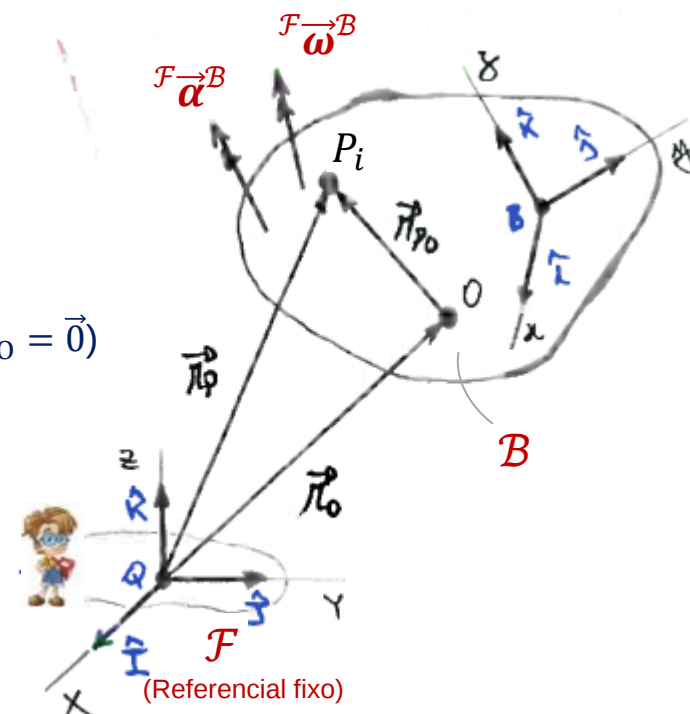
$$\begin{aligned} \vec{H}_O &= \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P_i - O)] \\ &= \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \right]}_{= m(G - O)} \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P_i - O)]}_{\substack{{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} \\ (P_i - O) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}}} \end{aligned}$$

$${ }^{\mathcal{F}} \vec{\omega}^{\mathcal{B}} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

$$(P_i - O) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

Oxyz geralmente solidário a $\mathcal{B}$

$$\longrightarrow J_O({}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}}) \equiv [J]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \}_{Oxyz}$$



Quando Oxyz é solidário a $\mathcal{B}$, a matriz de inércia é constante.

□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

➤ Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

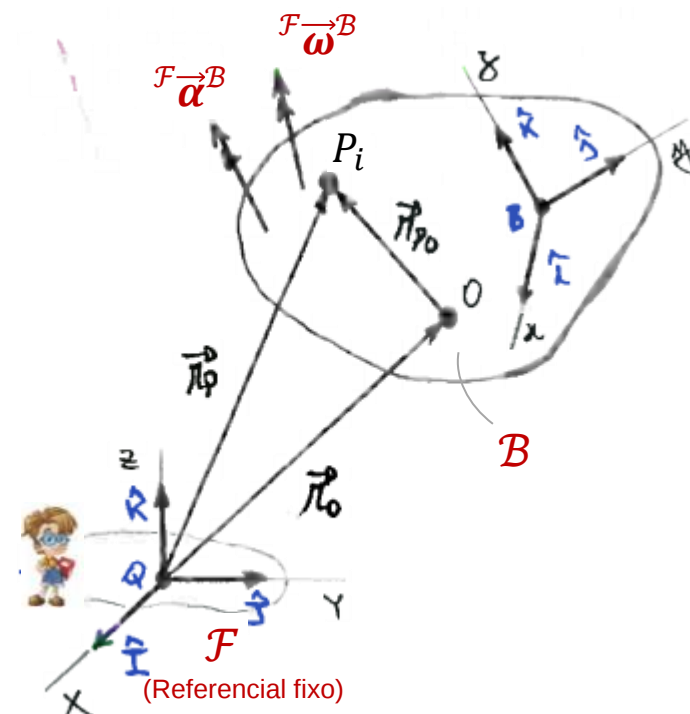
- Finalmente, a expressão da quantidade de movimento angular de um **corpo rígido** com respeito a um polo $O \in \mathcal{B}$ (ou uma extensão rígida do mesmo), é dada por:

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge {}^F\vec{v}_O + [I]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \} \quad (2)$$

▪ Observações:

- A Eq. (2) é válida **apenas para corpos rígidos**.
- O polo O deve pertencer ao corpo rígido, ou ser uma extensão rígida do mesmo ($\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0}$).
- O sistema de coordenadas $Oxyz$ é, em geral, solidário a $\mathcal{B}$, de forma que $[I]_{Oxyz}$ seja constante no tempo.
- Nos casos particulares de $O = G$ e/ou ${}^F\vec{v}_O = \vec{0}$:

$$\vec{H}_O = [I]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \} \quad (3)$$



□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

➤ Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

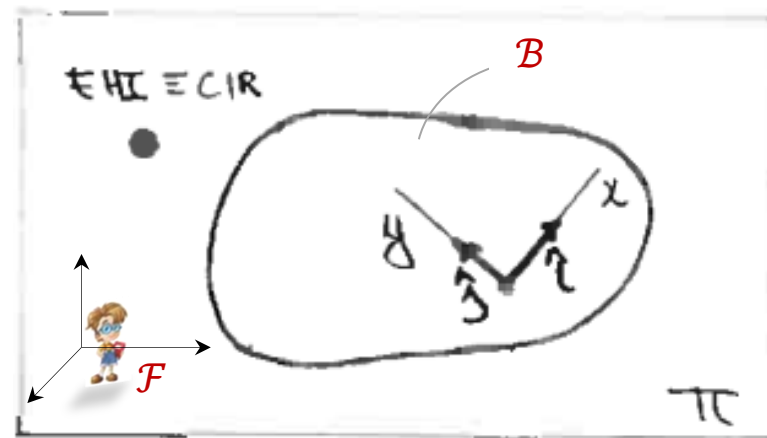
- Em **problemas planos** (plano Oxy), a Eq. 2 é simplificada:

$$\begin{array}{l} {}^F\vec{\omega}^B = \omega \hat{\mathbf{k}} \\ J_{Oxz} = J_{Oyz} = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\vec{H}_O = m(G - O) \wedge {}^F\vec{v}_O + (J_{Oz}\omega)\hat{\mathbf{k}}} \quad (4)$$



$O = G$ e/ou
 ${}^F\vec{v}_O = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{H}_O = (J_{Oz}\omega)\hat{\mathbf{k}}} \quad (5)$$



□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

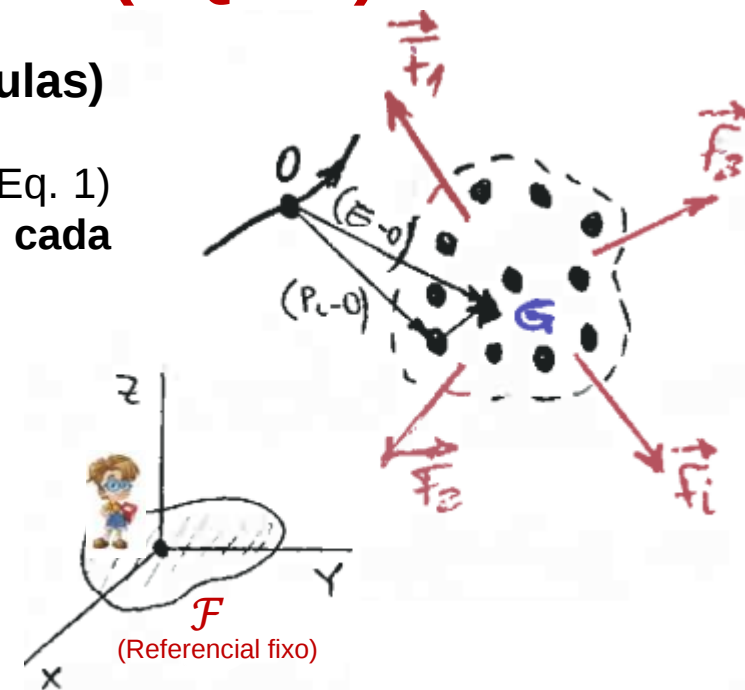
➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Sistema de Partículas)

- Considerando a variação temporal da quantidade de movimento angular (Eq. 1) em relação a um referencial fixo (inercial) $\mathcal{F}$, e admitindo a **massa de cada partícula constante**, tem-se:

$${}^{\mathcal{F}}\frac{d\vec{H}_O}{dt} = {}^{\mathcal{F}}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N \vec{H}_{iO}\right) = \sum_{i=1}^N \left({}^{\mathcal{F}}\frac{d\vec{H}_{iO}}{dt}\right) = \sum_{i=1}^N \left\{{}^{\mathcal{F}}\frac{d}{dt}[(P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i]\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[{}^{\mathcal{F}}\frac{d}{dt}(P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^N \left[(P_i - O) \wedge \underbrace{{}^{\mathcal{F}}\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)}_{= \vec{R}_i = \vec{R}_i^{ext} + \vec{R}_i^{int} \text{ (2ª Lei de Newton)}} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i [\cancel{(\vec{v}_i - \vec{v}_O)} \wedge \vec{v}_i] + \underbrace{\sum_{i=1}^N [(P_i - O) \wedge \vec{R}_i^{ext}]}_{= \vec{M}_O^{ext}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N [(P_i - O) \wedge \vec{R}_i^{int}]}_{= \vec{M}_O^{int}} = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i) \right]}_{= m\vec{v}_G} \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext} + \vec{M}_O^{int}$$

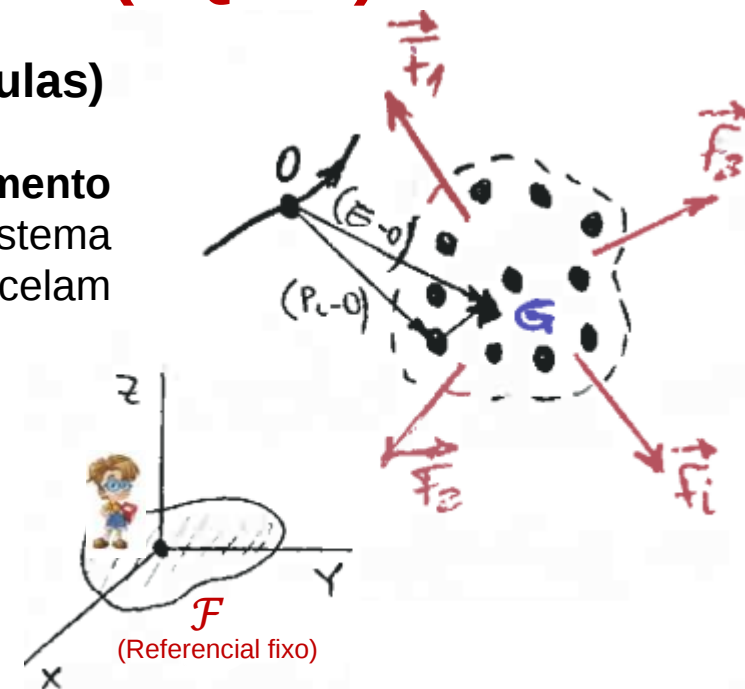


□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Sistema de Partículas)

- A partir do Princípio da Ação-e-Reação (3ª Lei de Newton), o **momento resultante de todas as forças internas** atuantes nas partículas do sistema com respeito ao polo O é **nulo** (momentos das forças internas se cancelam mutuamente). Portanto:

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{H}_O}{dt} = m(\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O) + \vec{M}_O^{ext} \quad (6)$$



- Eq. (6) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.

□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

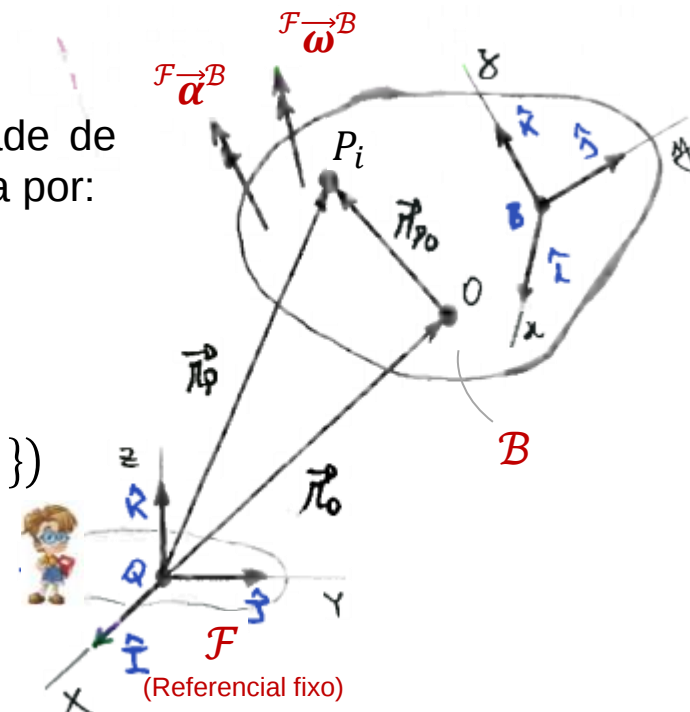
➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

- Para o caso particular de corpo rígido, a variação temporal da quantidade de movimento angular (Eq. 2) em relação a um referencial fixo (inercial) $\mathcal{F}$ é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{H}_O}{dt} &= \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} \left[m(G - O) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + [I]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \} \right] \\ &= m \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} (G - O) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + m(G - O) \wedge \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} ({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O) + \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}) \\ &= m({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_G - \cancel{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O}) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + m(G - O) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O + \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \})\end{aligned}$$

- Portanto:

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{H}_O}{dt} = m({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_G \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O) + m(G - O) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O + \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}) \quad (7)$$



□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

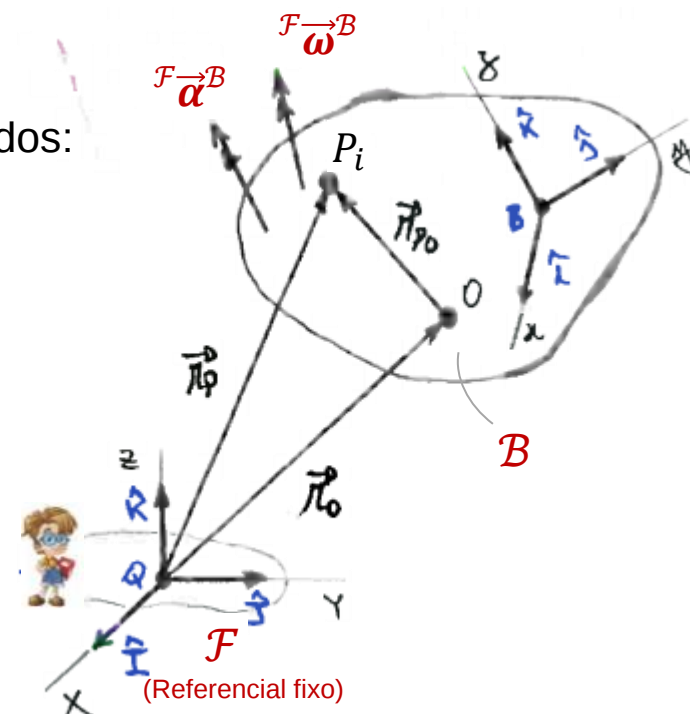
- Igualando as Eq. 6 e 7, obtém-se a expressão final do TQMA para corpos rígidos:

$$\vec{M}_O^{ext} = m(G - O) \wedge {}^F\vec{a}_O + \frac{d}{dt}([I]_{Oxyz}\{{}^F\vec{\omega}^B\}) \quad (8)$$

▪ Observações:

- A Eq. (8) é válida **apenas para corpos rígidos**.
- O polo O deve pertencer ao corpo rígido, ou ser uma extensão rígida do mesmo ($\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0}$).
- O sistema de coordenadas $Oxyz$ é, em geral, solidário a $\mathcal{B}$, de forma que $[I]_{Oxyz}$ seja constante no tempo.
- Nos casos particulares de $O = G$ e/ou ${}^F\vec{a}_O = \vec{0}$:

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d}{dt}([I]_{Oxyz}\{{}^F\vec{\omega}^B\}) \quad (9)$$



□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

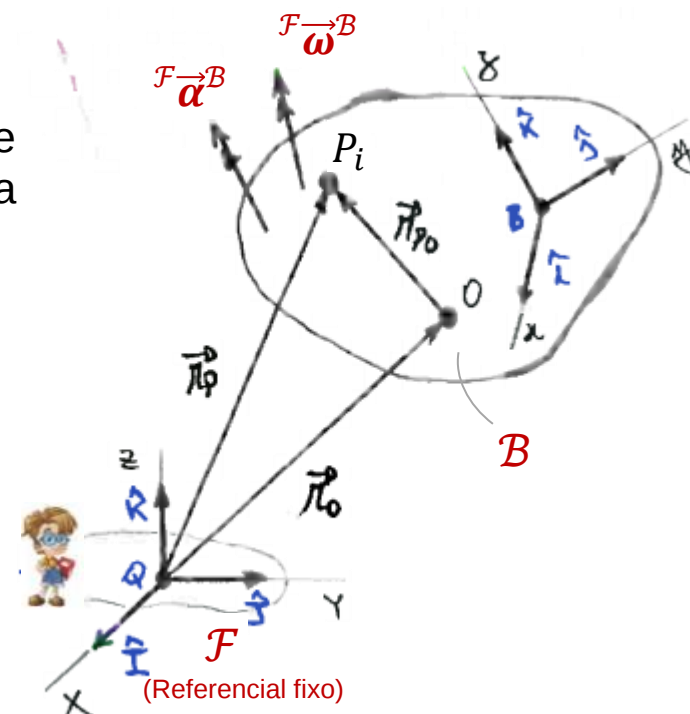
➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

- Admitindo que as grandezas vetoriais são expressas no sistema de coordenadas solidário a $\mathcal{B}$, e aplicando o Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial ao segundo termos do lado direito da Eq. 8, tem-se:

$$\frac{{}^F d}{dt}([I]_{Oxyz}\{{}^F \vec{\omega}^B\}) = \underbrace{\frac{{}^B d}{dt}([I]_{Oxyz}\{{}^F \vec{\omega}^B\})}_{= ([I]_{Oxyz} {}^F \vec{\alpha}^B), \text{ pois } Oxyz \text{ é solidário ao corpo e, portanto, } [I]_{Oxyz} \text{ é constante.}} + {}^F \vec{\omega}^B \wedge ([I]_{Oxyz}\{{}^F \vec{\omega}^B\})$$

- Neste caso:

$$\vec{M}_O^{ext} = \underbrace{m(G - O) \wedge {}^F \vec{a}_O}_{\text{Termo associado à aceleração do polo}} + \underbrace{[I]_{Oxyz} {}^F \vec{\alpha}^B}_{\text{Termo associado à aceleração angular do corpo}} + \underbrace{{}^F \vec{\omega}^B \wedge ([I]_{Oxyz}\{{}^F \vec{\omega}^B\})}_{\text{Momento Giroscópio ("momento das forças de inércia")}} \quad (10)$$



□ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

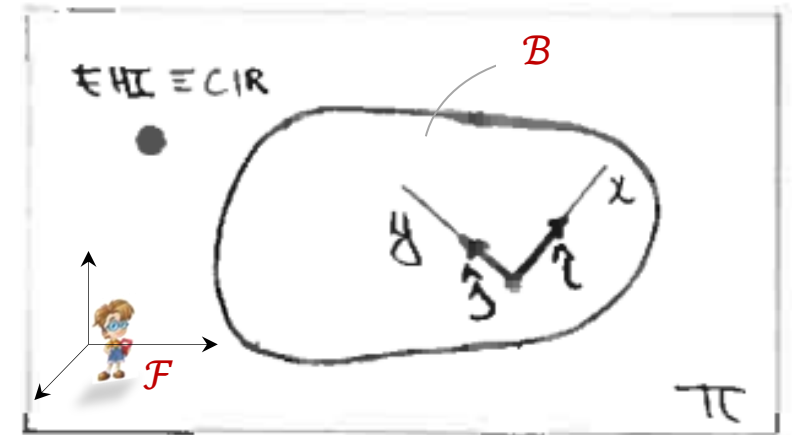
- Em **problemas planos** (plano Oxy), a Eq. 10 é simplificada:

$$\begin{aligned} {}^F\vec{\omega}^B &= \omega \hat{\mathbf{k}} \\ {}^F\vec{\alpha}^B &= \alpha \hat{\mathbf{k}} \\ J_{Oxz} &= J_{Oyz} = 0 \\ \dot{\hat{\mathbf{k}}} &= \vec{0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{{}^F\vec{M}_O^{ext} = m(G - O) \wedge {}^F\vec{a}_O + (J_{Oz}\alpha)\hat{\mathbf{k}}} \quad (11)$$



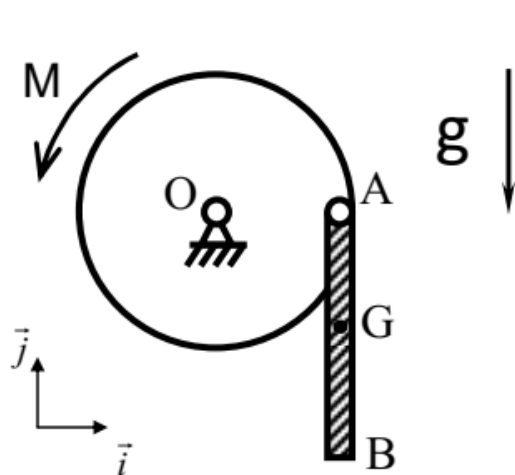
$$\begin{aligned} O &= G \text{ e/ou} \\ {}^F\vec{a}_O &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\boxed{{}^F\vec{M}_O^{ext} = (J_{Oz}\alpha)\hat{\mathbf{k}}} \quad (12)$$



❑ Exercício 5 (P3–Q3–2012)

3ª Questão (3,5 pontos): No sistema mostrado na figura, o disco de massa m e raio R está articulado no ponto A à barra AB, de massa m e comprimento L . Num dado instante, o disco, inicialmente em repouso, é submetido a um binário



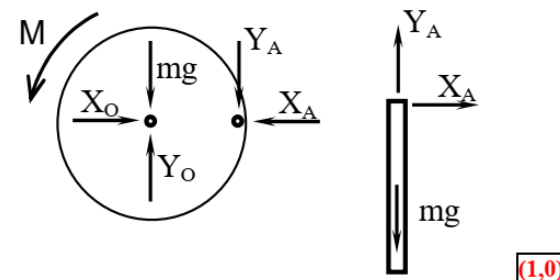
$\vec{M} = M\vec{k}$. Para o instante da aplicação de $\vec{M}$, pede-se:

- Os diagramas de corpo livre do disco e da barra
- A aceleração do ponto A em função da aceleração $\dot{\vec{\omega}}$ do disco
- A aceleração angular $\dot{\vec{\Omega}}$ da barra (sugestão: utilize o polo A)
- A aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do disco e as reações vinculares no ponto A

Dados: para o disco $J_{z_O} = \frac{mR^2}{2}$ e para a barra $J_{z_G} = \frac{mL^2}{12}$

Exercício 5 (P3-Q3-2012)

(a)



(b) Relação cinemática para o disco no instante pedido

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\dot{\omega}} \wedge (\vec{A} - \vec{O}) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{A} - \vec{O})]$$

Como $\vec{a}_A = \vec{0}$ e $\vec{\omega} = \vec{0}$, $\vec{a}_A = \dot{\omega} R \vec{j}$ (0,5)

(c) Teorema do momento angular para a barra, polo A

$$\frac{d}{dt} \left(\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right] I_A [\dot{\Omega}] \right) + m(G - A) \wedge \vec{a}_A = \vec{M}_A$$

Como $\vec{M}_A = \vec{0}$ e $m(G - A) \wedge \vec{a}_A = -m \frac{L}{2} \vec{j} \wedge \dot{\omega} R \vec{j} = \vec{0}$, tem-se $J_{z_A} \dot{\Omega} = 0 \Rightarrow \dot{\Omega} = \vec{0}$ (1,0)

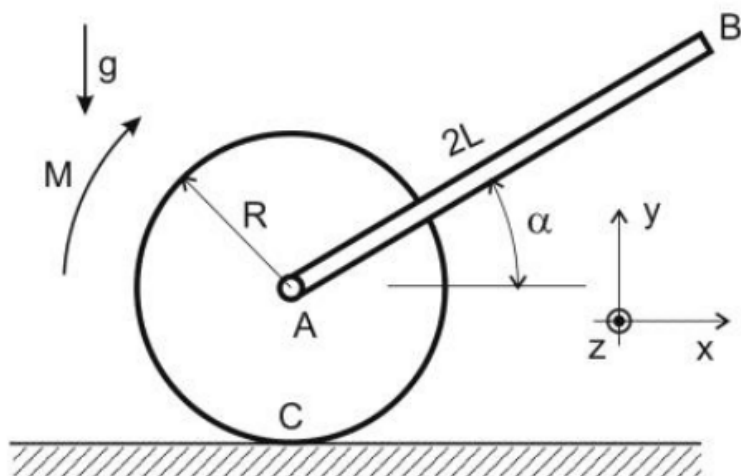
(d) (1,0) Relação cinemática para a barra $\vec{a}_G = \vec{a}_A = \dot{\omega} R \vec{j}$

Teorema do movimento do baricentro para a barra

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_{G_x} = 0 \\ \sum F_y = ma_{G_y} \end{cases} \Rightarrow Y_A - mg = m\dot{\omega}R \quad (I) \text{ e } X_A = 0$$

❑ Exercício 6 (P3–Q3–2015)

Questão 3 (4,0 pontos): O disco homogêneo de centro A , massa $2m$ e raio R está ligado por uma articulação ideal (em A) à barra homogênea AB , que possui massa m e comprimento $2L$. O disco rola sem escorregar sobre o plano horizontal, e deseja-se aplicar a este disco um binário $\vec{M}$, como indicado na figura, de modo que o ângulo α , entre a direção da barra e a horizontal, permaneça constante. Pedem-se, em função dos dados do problema (m , R , L , α e g):

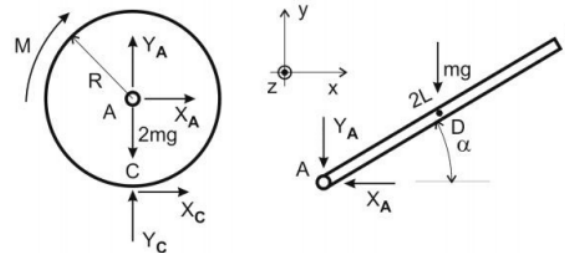


- construa os diagramas de corpo livre da barra e do disco;
- considerando a barra, determine a aceleração do ponto A necessária para que o ângulo α permaneça constante;
- obtenha as componentes das forças atuantes no ponto A da barra AB ;
- determine a aceleração angular do disco;
- obtenha as forças reativas no ponto C do disco em contato com o solo;
- determine o binário $\vec{M}$ a ser aplicado ao disco.

Exercício 6 (P3-Q3-2015)



Electric Self-Balancing Unicycle



a) (1 ponto no total sendo 0,5 pontos cada diagrama completamente correto)

b) (1 ponto (resposta correta)/0,5 pontos (somente equação do TQMA))

Barra AB, TQMA para o polo A (em movimento de translação):

$$m(D - A) \wedge \vec{a}_A + J_{A_z} \dot{\omega} \vec{k} = \vec{M}_A^{ext}$$

$$mL(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \wedge a_A \vec{i} + \vec{0} = -mg\vec{j} \wedge (D - A)$$

$$mL(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \wedge a_A \vec{i} = -mg\vec{j} \wedge L(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$$

$$-mLa_A \sin \alpha \vec{k} = -mgjL \cos \alpha \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \frac{g}{\tan \alpha} \vec{i} = g \cotg \alpha \vec{i}$$

c) (0,5 pontos 2 respostas /0,3 pontos 1 resposta) TR para a barra AB:

$$m\vec{a}_G = m\vec{a}_A = mg \cotg \alpha \vec{i} = -X_A \vec{i} + (-Y_A - mg)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A = -mg \cotg \alpha \\ Y_A = -mg \end{cases} \Rightarrow \vec{X}_A = mg \cotg \alpha \vec{i} \quad e \quad \vec{Y}_A = -mg\vec{j}$$

d) (0,5 pontos) Temos, para o disco rolando sem escorregar:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (A - C) = \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge (R\vec{j}) = -\omega R \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = -\dot{\omega} R \vec{i} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{g}{R \tan \alpha} = -\frac{g}{R} \cotg \alpha \quad e \quad \vec{\omega} = -\frac{g}{R} \cotg \alpha \vec{k}$$

e) (0,5 pontos 2 respostas /0,3 pontos 1 resposta) TR para o disco:

$$2m\vec{a}_G = 2m\vec{a}_A = 2mg \cotg \alpha \vec{i} = (X_A + X_C)\vec{i} + (Y_C + Y_A - 2mg)\vec{j} \Rightarrow$$

$$2mg \cotg \alpha \vec{i} = (-mg \cotg \alpha + X_C)\vec{i} + (Y_C - mg - 2mg)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{X}_C = 3mg \cotg \alpha \vec{i} \\ \vec{Y}_C = 3mg\vec{j} \end{cases}$$

f) (0,5 pontos) TQMA para o disco, polo A:

$$J_A \dot{\omega} = M - X_C R \Rightarrow M = J_A \dot{\omega} + X_C R = \frac{2mR^2}{2} \frac{g}{R} \cotg \alpha + 3mg \cotg \alpha R = 4mgR \cotg \alpha$$

$$\therefore \vec{M} = -4mgR \cotg \alpha \vec{k}$$



❑ Exercício 6 (P3–Q3–2015)

Teorema do momento angular para o disco, polo O

$$\frac{d}{dt} \left(\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right] I_O \left[\dot{\omega} \right] \right) + m(G - O) \wedge \vec{a}_O = \vec{M}_O \Rightarrow J_{z_o} \dot{\omega} = M - Y_A R$$

Substituindo Y_A obtido na Equação (I) e o valor de J_{z_o} , tem-se $\dot{\omega} = \frac{2M - 2mgR}{3mR^2} \vec{k}$

Substituindo na Equação (I), tem-se $Y_A = \frac{mg}{3} + \frac{2M}{3R}$

Alternativa de solução do item c

Teorema do momento angular para a barra, polo G

$$\frac{d}{dt} \left(\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right] I_G \left[\dot{\Omega} \right] \right) + m(G - G) \wedge \vec{a}_G = \vec{M}_G \Rightarrow J_{z_o} \dot{\Omega} = -\frac{X_A L}{2} \quad (II)$$

Relação cinemática para a barra $\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (G - A) + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (G - A)]$

como $\vec{\Omega} = \vec{0}$, tem-se $\vec{a}_G = \dot{\omega} R \vec{j} - \frac{\dot{\Omega} L}{2} \vec{i}$

Teorema do movimento do baricentro para a barra

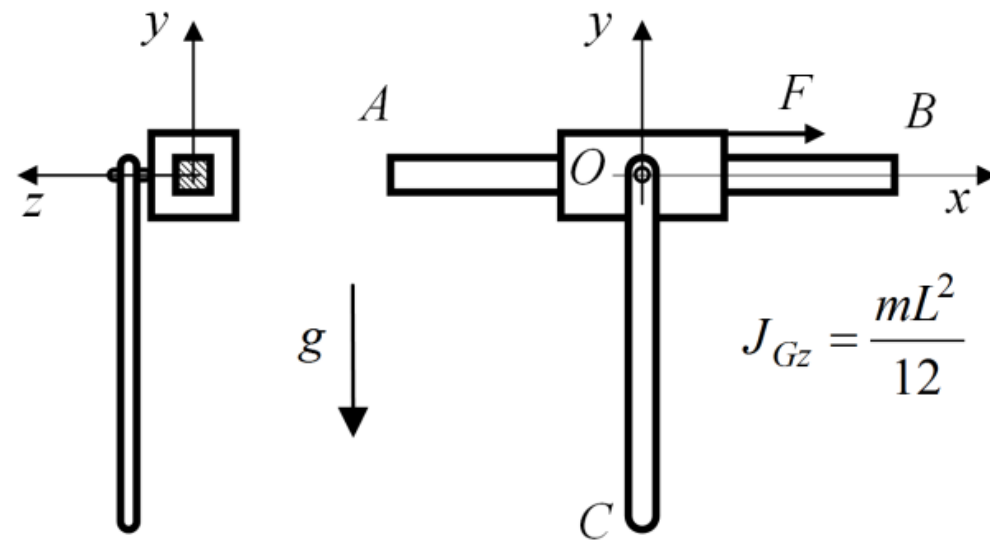
$$\begin{cases} X_A = m \frac{\dot{\Omega} L}{2} & (III) \\ Y_A - mg = m \dot{\omega} R \end{cases}$$

das Equações (II) e (III), tem-se $\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$

□ 2014–P3–Q2

Questão 2 (3,5 pontos): O anel de seção retangular e massa m pode deslizar sem atrito sobre a guia horizontal AB . A barra homogênea OC , de comprimento L e massa m é articulada sem atrito ao anel por meio de um pino horizontal em O . É aplicada ao anel uma força F horizontal. Sabendo que o sistema parte do repouso, com a barra pendente na vertical, pede-se determinar:

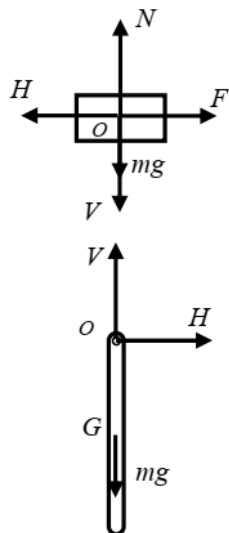
- o diagrama de corpo livre para a barra;
- para o instante inicial, a aceleração angular da barra, a aceleração do anel e a reação da articulação sobre a barra em O .



□ 2014-P3-Q2

Solução

a) **1,0** Diagramas de corpo livre:



b) **2,5** Teorema do movimento do baricentro:

Anel:

$$ma_{Ox} = F - H$$

$$ma_{Oy} = N - V - mg = 0$$

Barra:

$$ma_{Gx} = H$$

$$ma_{Gy} = V - mg$$

Teorema do momento da quantidade de movimento para a barra:

$$J_{Gz} \dot{\omega} = -H \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{mL^2}{12} \dot{\omega} = -H \frac{L}{2} \Rightarrow H = -\frac{mL}{6} \dot{\omega}$$

Da cinemática, no instante inicial, quando $\vec{\omega} = \vec{0}$:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] = a_{Ox} \vec{i} + \dot{\omega} \frac{L}{2} \vec{i}$$

Ou seja, no instante inicial $a_{Gy} = 0 \Rightarrow V = mg$

Substituindo nas equações do teorema do movimento do baricentro da barra e do anel:

$$\text{Barra: } m \left(a_{Ox} + \dot{\omega} \frac{L}{2} \right) = -\frac{mL}{6} \dot{\omega}$$

$$\text{Anel: } ma_{Ox} = F - \left(-\frac{mL}{6} \dot{\omega} \right)$$

Portanto:

$$F + 2 \frac{mL}{6} \dot{\omega} = -m \dot{\omega} \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{5mL}{6} \dot{\omega} = -F \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = -\frac{6F}{5mL}}$$

$$\text{Também resulta que } H = -\frac{mL}{6} \left(-\frac{6F}{5mL} \right) \Rightarrow H = \frac{F}{5}$$

Substituindo na equação do teorema do movimento do baricentro do anel na direção horizontal:

$$ma_{Ox} = F - \frac{F}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_O = \frac{4F}{5m} \vec{i}}$$

Dos resultados anteriores:

$$\vec{R} = H \vec{i} + V \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = \frac{F}{5} \vec{i} + mg \vec{j}}$$



Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
- 6. Teorema da Energia Cinética (TEC)**

□ Teorema da Energia Cinética (TEC)

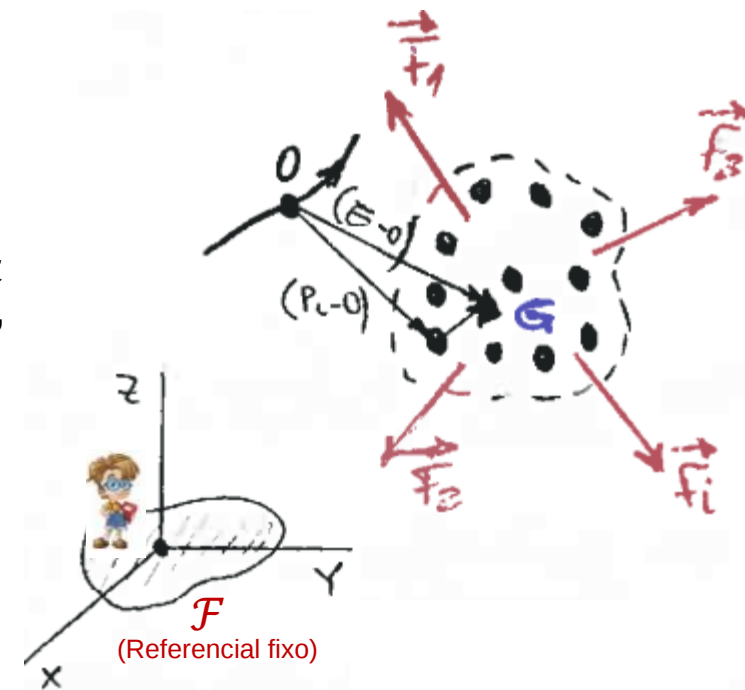
➤ Energia Cinética (Sistema de Partículas)

- A energia cinética de um sistema composto por N partículas materiais P_i de massa m_i e velocidade $\vec{v}_i$, em relação a um referencial fixo (inercial) $\mathcal{F}$, é definida por:

$$E \triangleq \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)} \quad (1)$$

▪ Observações:

- A Eq. (1) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Para um sistema de partículas **qualquer**, é necessário conhecer os valores da massa e velocidade de **cada** partícula para o cálculo de E .
- Para um sistema de partículas **qualquer**, não é possível determinar E unicamente em função das propriedades do centro de massa do sistema.



□ Teorema da Energia Cinética (TEC)

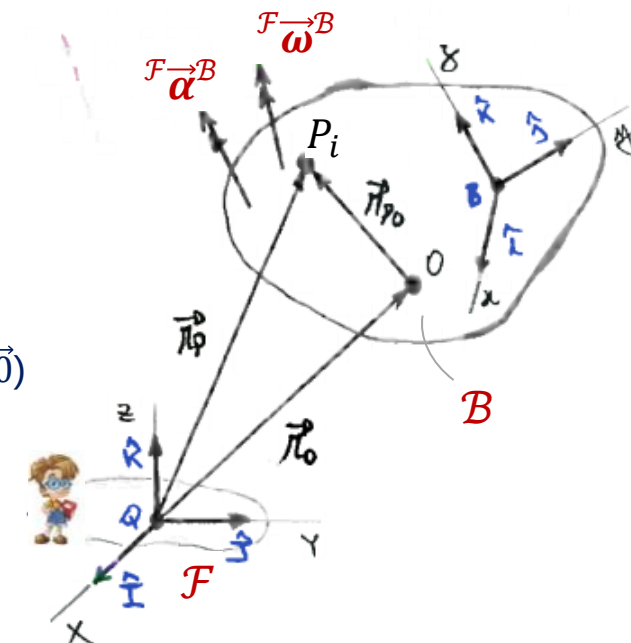
➤ Energia Cinética (Corpo Rígido)

- Para o caso particular de corpo rígido, a velocidade de cada partícula material P_i do corpo pode ser expressa pela equação do campo de velocidades (vínculo cinemático relacionado à rigidez do corpo):

$${}^F\vec{v}_{P_i} = {}^F\vec{v}_O + {}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O) \quad O \in B, \text{ ou uma extensão rígida do mesmo } (\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0})$$

- Substituindo a expressão acima na Eq. 1:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i ({}^F\vec{v}_{P_i} \cdot {}^F\vec{v}_{P_i}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ [{}^F\vec{v}_O + {}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \cdot [{}^F\vec{v}_O + {}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{ m_i {}^F\vec{v}_O \cdot {}^F\vec{v}_O + 2m_i {}^F\vec{v}_O \cdot [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] + m_i [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \cdot [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \} \\ &= \frac{{}^F\vec{v}_O \cdot {}^F\vec{v}_O}{2} \sum_{i=1}^N m_i + {}^F\vec{v}_O \cdot \left[{}^F\vec{\omega}^B \wedge \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{ m_i [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \cdot [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \} \end{aligned}$$



□ Teorema da Energia Cinética (TEC)

➤ Energia Cinética (Corpo Rígido)

- Os termos da expressão anterior podem ser simplificados, como segue:

$$E = \frac{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0 \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i}_{=m} + {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0 \cdot \left[{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})}_{=m(\mathbf{G} - \mathbf{O})} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \underbrace{\left\{ m_i [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] \cdot [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] \right\}}_{\substack{{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} \\ (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \\ \text{Oxyz geralmente solidário a } B}}$$

Quando Oxyz é solidário a B , a matriz de inércia é constante.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{Yellow Arrow}} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}_O] \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \} \\ & \text{(escalar)} \end{aligned}$$

- Finalmente:

$$E = \underbrace{\frac{m}{2} ({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0 \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0)}_{\text{Translação pura do polo } O} + \underbrace{m {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0 \cdot [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O})]}_{\text{Roto-translação de } G \text{ em torno do polo } O} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}_O] \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}}_{\text{Rotação pura em torno do polo } O} \quad (2)$$

□ Teorema da Energia Cinética (TEC)

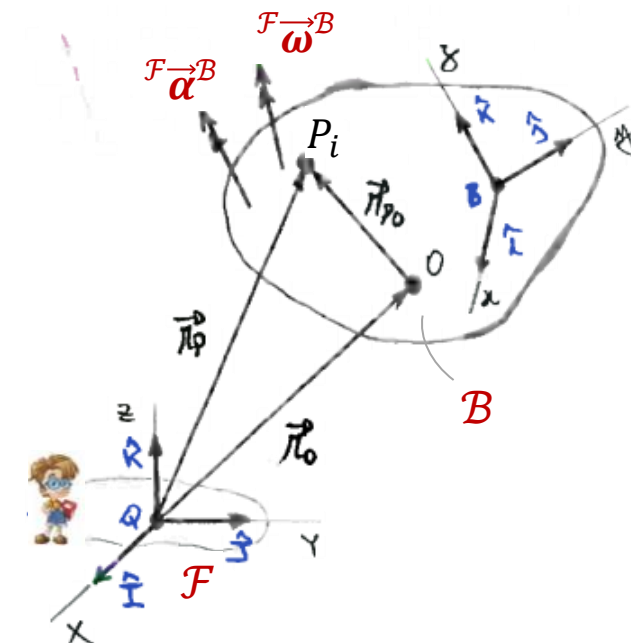
➤ Energia Cinética (Corpo Rígido)

▪ Observações:

- A Eq. (2) é válida **apenas para corpos rígidos**.
- O polo 0 deve pertencer ao corpo rígido, ou ser uma extensão rígida do mesmo ($\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0}$).
- O sistema de coordenadas $Oxyz$ é, em geral, solidário a $\mathcal{B}$, de forma que $[\mathbf{I}_O]$ seja constante no tempo.
- O valor da energia cinética **independe** do polo e do sistema de coordenadas escolhidos para seu cálculo. A energia cinética é uma grandeza escalar.
- No caso particular de $O = G$:

$$E = \underbrace{\frac{m}{2} ({}^F\vec{v}_G \cdot {}^F\vec{v}_G)}_{\text{Translação pura de G}} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ {}^F\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}_G] \{ {}^F\vec{\omega}^B \}}_{\text{Rotação pura em torno de G}} \quad (3)$$

- No caso particular de ${}^F\vec{v}_O = \vec{0}$:
$$E = \frac{1}{2} \{ {}^F\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}_O] \{ {}^F\vec{\omega}^B \} \quad (4)$$



□ Teorema da Energia Cinética (TEC)

➤ Energia Cinética (Corpo Rígido)

- Em **problemas planos** (plano xy), a Eq. 2 é simplificada:

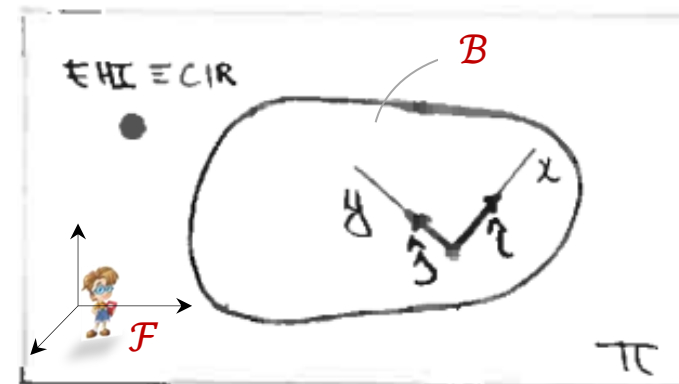
$$E = \frac{m}{2} ({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O) + m {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O \cdot [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (G - O)] + \frac{J_{Oz}\omega^2}{2} \quad (5)$$

$O = G$

${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O = \vec{0}$

$$E = \frac{m}{2} ({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_G \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_G) + \frac{J_{Gz}\omega^2}{2}$$

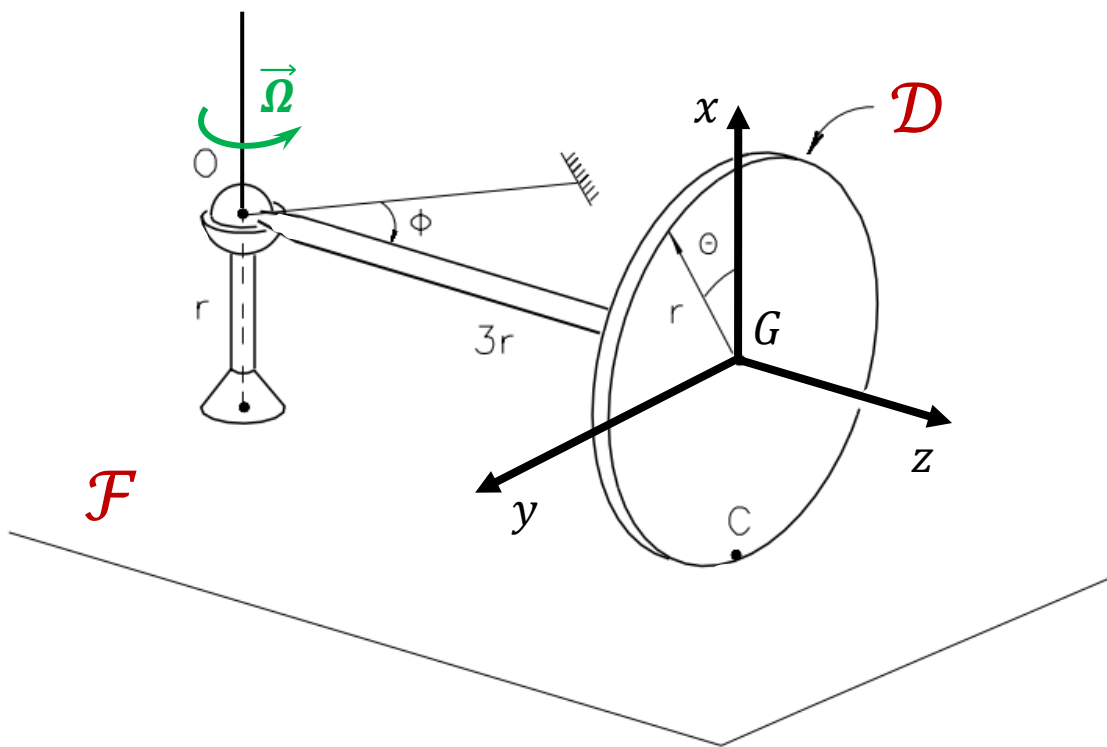
$$E = \frac{J_{Oz}\omega^2}{2}$$



$${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B = \omega \hat{k}$$

$$J_{Oxz} = J_{Oyz} = 0$$

Exercício 7



- Disco de massa m e raio r acoplado a uma haste GO rola sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal;
- A haste GO tem massa desprezível;
- Calcule a energia cinética do disco em função de m , r e Ω , utilizando os polos G , C e O .
- Dados: $J_{Gx} = J_{Gy} = \frac{mr^2}{4}$ e $J_{Gz} = \frac{mr^2}{2}$

$$J_{Gxy} = J_{Gxz} = J_{Gyz} = 0$$

Resposta

$$[I]_{Gxyz} = \frac{mr^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$${}^F\vec{\omega}^D = \Omega(\hat{i} - 3\hat{k})$$

$${}^F\vec{v}_G = -3\Omega r\hat{j}$$

$$[I]_{Cxyz} = \frac{mr^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{55mr^2\Omega^2}{8}$$

□ Teorema da Energia Cinética (TEC)

➤ Teorema da Energia Cinética

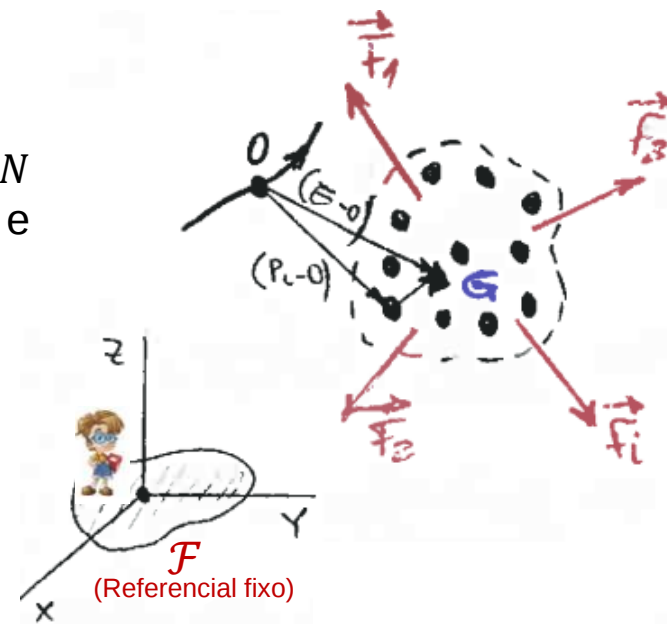
- Considerando a variação temporal da energia cinética de um sistema de N partículas materiais P_i (Eq. 1) em relação a um referencial fixo (inercial) $\mathcal{F}$, e admitindo a **massa de cada partícula constante**, tem-se:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N E_i \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{dE_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right) \right] = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left[{}^{\mathcal{F}} \frac{d}{dt} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left({}^{\mathcal{F}} \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot {}^{\mathcal{F}} \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \left({}^{\mathcal{F}} \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^N \underbrace{(m_i \vec{a}_i)}_{\vec{R}_i = \vec{R}_i^{\text{ext}} + \vec{R}_i^{\text{int}} \text{ (2ª Lei de Newton)}} \cdot \vec{v}_i$$

- Portanto:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{\text{int}} \cdot \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad dE = \overbrace{\sum_{i=1}^N (\vec{R}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i) dt}^{= dW_{\text{ext}}} + \overbrace{\sum_{i=1}^N (\vec{R}_i^{\text{int}} \cdot \vec{v}_i) dt}^{= dW_{\text{int}}} = dW_{\text{ext}} + dW_{\text{int}}$$



□ Teorema da Energia Cinética (TEC)

➤ Teorema da Energia Cinética

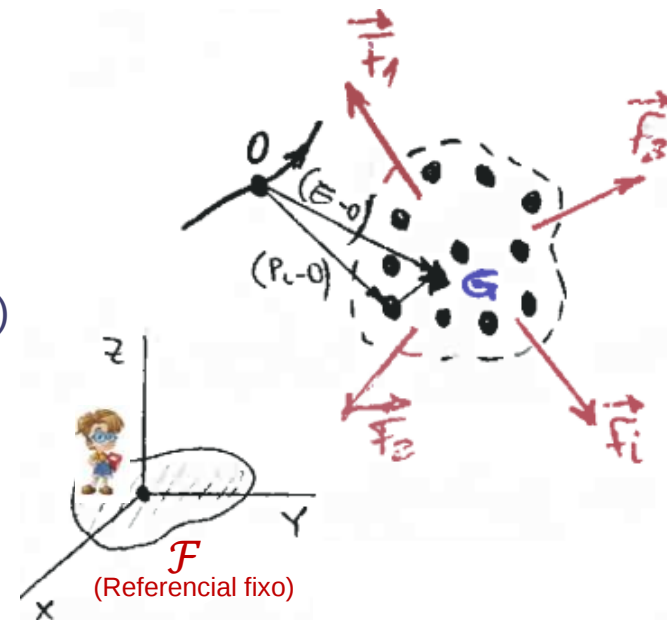
- Integrando a equação anterior no intervalo $[t_1, t_2]$, obtém-se:

$$\int_{E_1}^{E_2} dE = \int_{t_1}^{t_2} dW_{\text{ext}} + \int_{t_1}^{t_2} dW_{\text{ext}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E_2 - E_1 &= W^{1 \rightarrow 2} \\ W^{1 \rightarrow 2} &= W_{\text{ext}}^{1 \rightarrow 2} + W_{\text{int}}^{1 \rightarrow 2} \end{aligned}} \quad (6)$$

- A Eq. (6) corresponde ao TEC para sistemas de partículas, inclusive corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Note que o trabalho total realizado no sistema é composto pela soma do trabalho das forças internas e externas atuantes no sistema.
- Admitindo que os esforços internos e externos podem ser **conservativos** e **não-conservativos** para o cálculo do trabalho total, e considerando a definição de energia potencial, tem-se:

$$W_{\text{ext}}^{1 \rightarrow 2} = W_{\text{ext,c}}^{1 \rightarrow 2} + W_{\text{ext,nc}}^{1 \rightarrow 2} = U_{\text{ext}}^1 - U_{\text{ext}}^2 + W_{\text{ext,nc}}^{1 \rightarrow 2}$$

$$W_{\text{int}}^{1 \rightarrow 2} = W_{\text{int,c}}^{1 \rightarrow 2} + W_{\text{int,nc}}^{1 \rightarrow 2} = U_{\text{int}}^1 - U_{\text{int}}^2 + W_{\text{int,nc}}^{1 \rightarrow 2}$$



□ Teorema da Energia Cinética (TEC)

➤ Teorema da Energia Cinética

- Portanto, substituindo as equações anteriores na Eq. 6, obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 &= W_{nc}^{1 \rightarrow 2} \\ \mathcal{E} &= E + U_{ext} + U_{int} \\ W_{nc}^{1 \rightarrow 2} &= W_{ext, nc}^{1 \rightarrow 2} + W_{int, nc}^{1 \rightarrow 2}\end{aligned}$$

(7) - Teorema da Energia Mecânica (TEM)
- $\mathcal{E}$: energia mecânica

- No caso particular de **corpos rígidos**:

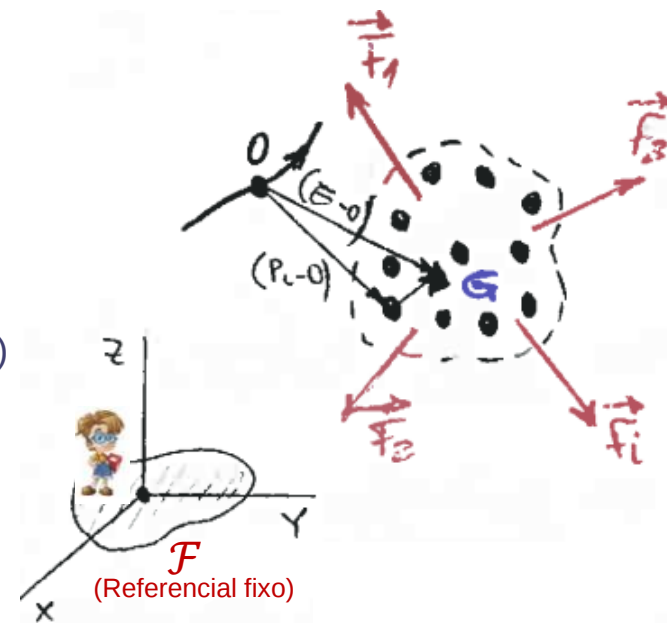
- A energia cinética deve ser calculada a partir da expressão geral (Eq. 2).
- A energia potencial gravitacional deve ser calculada a partir da posição do centro de massa do corpo.
- Devido à propriedade de rigidez do corpo, $W_{int}^{1 \rightarrow 2} = 0$. Logo:

$$E_2 - E_1 = W_{ext}^{1 \rightarrow 2}$$

ou

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = W_{ext, nc}^{1 \rightarrow 2}, \quad \mathcal{E} = E + U_{ext}$$

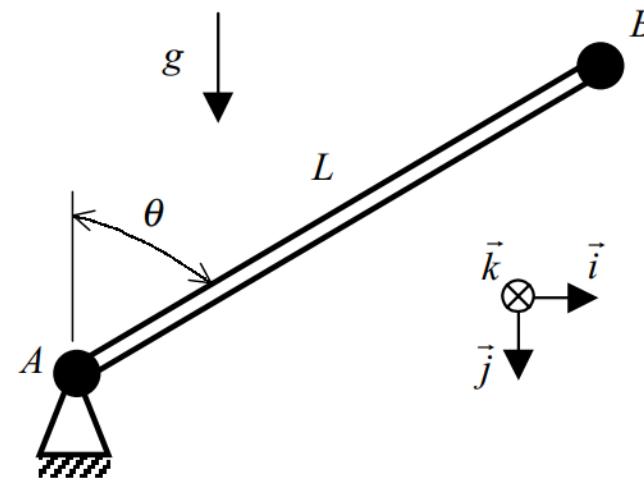
(8)



❑ Exercício 8 (P3–Q1–2002)

(5,0 pontos) Questão 2 – Um sólido é composto por uma barra AB , homogênea, de comprimento L e massa $3M$ e dois pontos materiais de massa M cada um, rigidamente fixados nas extremidades A e B da barra. O sólido é articulado sem atrito em A . Pede-se:

- O momento de inércia do sólido em relação ao eixo paralelo ao versor $\vec{k}$ e que passa pelo ponto A .
- A velocidade angular do sólido, em função de θ . Sabe-se que ele é liberado em $\theta = 30^\circ$, partindo do repouso. Use o Teorema da Energia Cinética
- O diagrama de corpo livre do sólido na posição inicial, $\theta = 30^\circ$, logo depois de liberado.
- A aceleração angular do sólido, para $\theta = 30^\circ$, logo depois de liberado. Use o Teorema do Momento Angular.
- As reações da articulação A no sólido neste instante.



$$J_{Gz} = \frac{ml^2}{12} \quad (\text{para uma barra homogênea de massa } m \text{ e comprimento } l)$$



❑ Exercício 8 (P3–Q1–2002)

Solução:

Item (a)

$$J_{Az} = \underbrace{\frac{(3M)L^2}{12}}_{\text{barra}} + \underbrace{(3M)\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{\text{pontos materiais}} + \underbrace{M0^2 + ML^2}_{\text{pontos materiais}} = \frac{3ML^2}{12} + \frac{3ML^2}{4} + ML^2 = \frac{3ML^2 + 9ML^2 + 12ML^2}{12} = \frac{24ML^2}{12}$$

$$J_{Az} = 2ML^2$$

Item (b)

Energia cinética:

$$E = \frac{J_{Az} \dot{\theta}^2}{2} = \frac{2ML^2}{2} \dot{\theta}^2 = ML^2 \dot{\theta}^2$$

Trabalho da força peso:

$$W = 5Mg \left[\frac{L}{2} (\cos 30^\circ - \cos \theta) \right] = 5Mg \left[\frac{L}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \right) \right]$$

Teorema da energia cinética (o sólido parte do repouso):

$$E - E_0 = W \Rightarrow E - 0 = W$$

$$ML^2 \dot{\theta}^2 = 5Mg \left[\frac{L}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \right) \right]$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{5Mg \left[\frac{L}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \right) \right]}{ML^2}$$

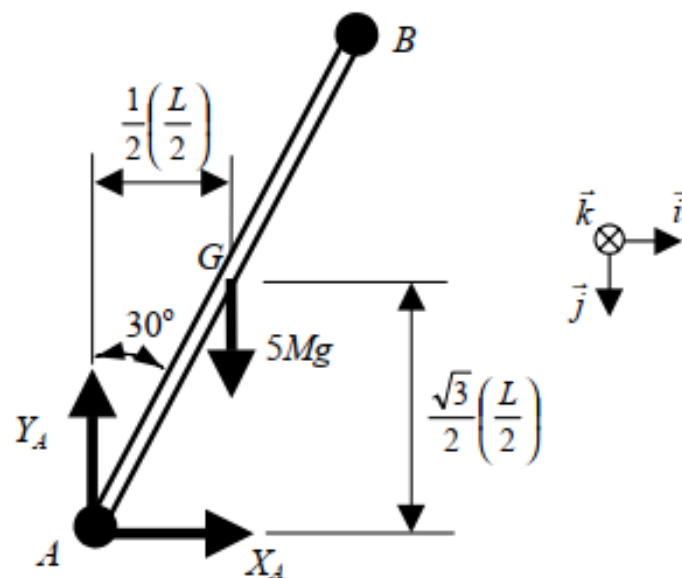
$$\dot{\theta}^2 = \frac{5g(\sqrt{3} - 2\cos \theta)}{4L}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{5g(\sqrt{3} - 2\cos \theta)}{4L}}$$

❑ Exercício 8 (P3–Q1–2002)

Item (c)

Pela simetria, o baricentro do sólido está no centro da barra, e pelo enunciado, a massa do sólido é $5M$.



Item (d)

Teorema do Momento Angular:

$$J_{A\perp} \dot{\omega} = (5Mg) \left(\frac{L}{4} \right) \Rightarrow 2ML^2 \dot{\omega} = \frac{5}{4} MgL \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{5g}{8L}$$



❑ Exercício 8 (P3–Q1–2002)

Item (e)

Teorema do Movimento do Baricentro:

$$(5M)\vec{a}_G = X_A\vec{i} + (-Y_A + 5Mg)\vec{j} \quad (I)$$

Pela cinemática:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)]$$

Como $\dot{\vec{\omega}}$ é no sentido horário, $\dot{\vec{\omega}} = \frac{5g}{8L}\vec{k}$, e considerando que o ponto A é fixo e que logo após a liberação da barra

temos $\vec{\omega} = \vec{0}$:

$$\vec{a}_G = \frac{5g}{8L}\vec{k} \wedge \left(\frac{L}{4}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}L}{4}\vec{j} \right)$$

$$\vec{a}_G = \frac{5\sqrt{3}g}{32}\vec{i} + \frac{5g}{32}\vec{j}$$

$$(5M)\vec{a}_G = \frac{5M5\sqrt{3}g}{32}\vec{i} + \frac{5M5g}{32}\vec{j}$$

$$(5M)\vec{a}_G = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg\vec{i} + \frac{25}{32}Mg\vec{j} \quad (II)$$

Comparando (I) e (II):

$$X_A = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg$$

$$-Y_A + 5Mg = \frac{25}{32}Mg \Rightarrow Y_A = \frac{135}{32}Mg$$

$$\vec{X}_A = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg\vec{i}$$

$$\vec{Y}_A = -\frac{135}{32}Mg\vec{j}$$

❑ Exemplos: forças que não realizam trabalho

$$dW = \vec{F}_P \cdot d\vec{r}_P = 0$$

$$P = \vec{F}_P \cdot \vec{v}_P = 0$$

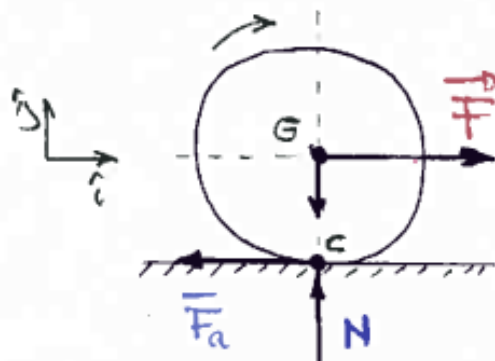


$$d\vec{r}_P = \vec{0} \text{ (ou } \vec{v}_P = \vec{0}\text{)}$$

$$\vec{F}_P \perp d\vec{r}_P \text{ (ou } \vec{F}_P \perp \vec{v}_P\text{)}$$



- Forças normais e forças de reação perpendiculares à direção do movimento.
- Forças aplicadas em pontos com velocidades nulas.



① Disco escorrega sem rolar (deslizamento puro)

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -\mu mg \int_{x_1}^{x_2} dx \Rightarrow \boxed{W = -\mu mg(x_2 - x_1)}$$

$W < 0$, dissipativo

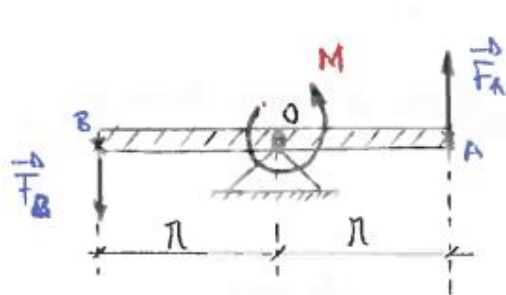
$$\begin{cases} \vec{F}_a = -\mu N \hat{x} = -\mu mg \hat{x} \\ d\vec{r} = dx \hat{x} \end{cases}$$

② Disco rola sem escorregar (rolamento puro)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_a \cdot \vec{v}_C) dt \xrightarrow[\text{(CIR)}]{\vec{v}_C = \vec{0}} \boxed{W = 0}$$

Exemplos: trabalho de um binário

– Considere o sistema a seguir sob a ação de um binário:



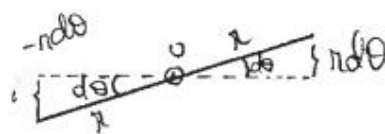
$$\begin{cases} \vec{F}_A = F \hat{j} \\ \vec{F}_B = -F \hat{j} \\ M = 2\pi F \end{cases}$$

– Lembrar: o momento binário é sempre dado por um par de forças.

Momento resultante devido ao binário de forças.

– Calculando o trabalho das duas forças que geram o momento binário:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{F}_A \cdot d\vec{r}_A + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{F}_B \cdot d\vec{r}_B, \quad \begin{cases} d\vec{r}_A = r d\theta \hat{j} \\ d\vec{r}_B = -r d\theta \hat{j} \end{cases}$$

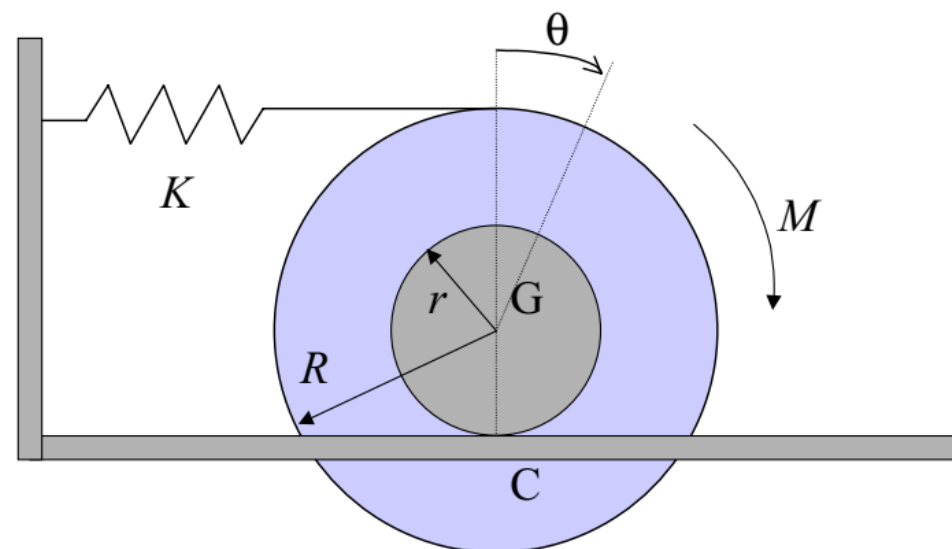


$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F r d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} F r d\theta = \frac{2F\pi}{M} (\theta_2 - \theta_1) = M \Delta\theta \quad \therefore \quad \boxed{W = M \cdot \Delta\theta}$$

❑ Exercício 9 (P3–Q3–2004)

3ª Questão (3,5 pontos)

O carretel de massa m e raios R e r rola sem escorregar sobre um plano horizontal, sob a ação de um binário de momento M , constante. Um fio ideal, preso em uma mola linear ideal de constante K , é enrolado no carretel conforme a figura. Não existe escorregamento entre o fio e o carretel. No instante inicial $t = 0$, quando $\theta(0) = 0$, o carretel está em repouso e a mola não está distendida. Pede-se:

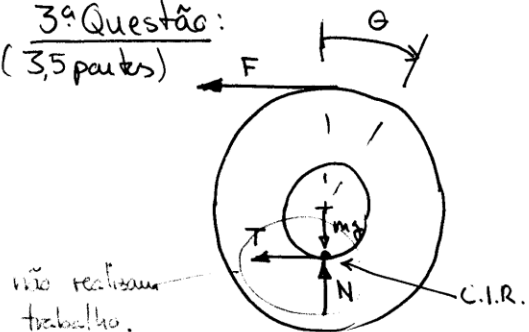


- (a) a energia cinética do carretel, expressa em função da velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$;
- (b) o trabalho das forças e momento externos, aplicados ao carretel, expresso em função da posição angular θ ;
- (c) a aceleração angular $\ddot{\omega}$ do carretel, expressa em função da posição angular θ ;
- (d) a aceleração do baricentro a_G , expressa em função da posição angular θ .

Dado: Momento de inércia baricêntrico do carretel: J_G .

Exercício 9 (P3-Q3-2004)

3ª Questão:
(3,5 pontos)



propagação de erro:

- não descarta quando é erro algébrico simples;
- descarta quando:
 - erro conceitual;
 - dimensões incompatíveis.

(a) $E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 = \frac{1}{2} J_G \omega^2$ $J_G = J_G + m r^2$
(1 ponto) $E = \frac{1}{2} (J_G + m r^2) \omega^2$ (1/2)
sem escorregamento:
 $v_G = r \omega$

(b) $W_{ext} = W_{mola} + W_{momento}$
(1 ponto) $W_{momento} = +M\theta$ (1/2)

$W_{mola} = - \int_0^\theta K(R+r)^2 \theta d\theta = - \frac{K\delta^2}{2}$ (1/2)

deflexão da mola:

$\delta = x + \theta R = (R+r)\theta$

e $F = K\delta = K(R+r)\theta$

$W_{ext} = - \frac{K\delta^2}{2} + M\theta \Rightarrow W_{ext} = M\theta - \frac{K(R+r)^2}{2} \theta$

(c) T.E.C $\Delta E = W_{ext} + W_{int}$
(1 ponto)

$\frac{1}{2} (J_G + m r^2) \omega^2 = M\theta - \frac{K(R+r)^2}{2} \theta^2$ (1/2) $\omega = \dot{\theta}$

derivando membro-a-membro:

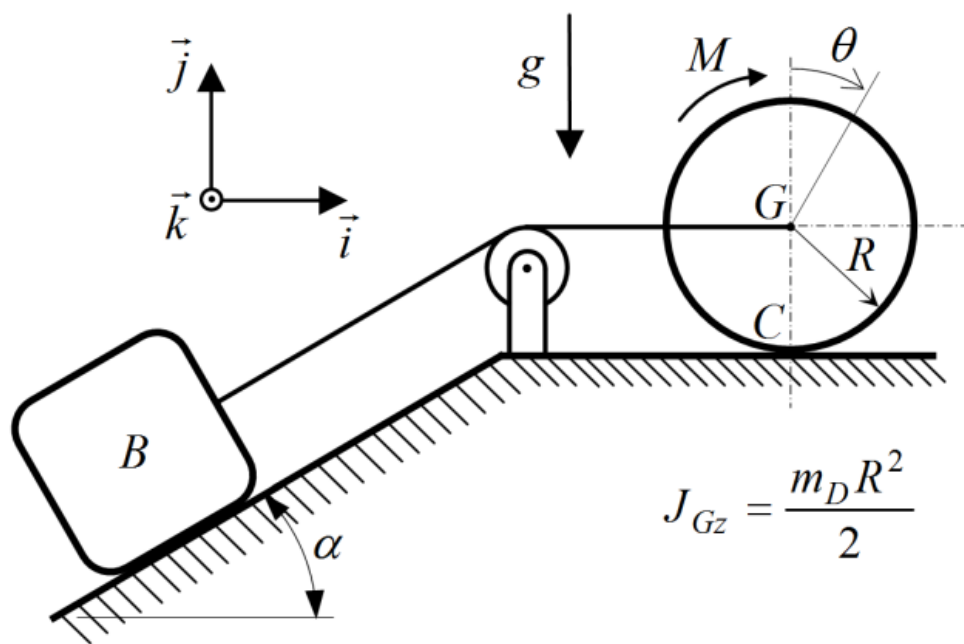
$(J_G + m r^2) \omega \dot{\omega} = M\dot{\omega} - K(R+r)^2 \theta \cdot \dot{\omega}$

$\dot{\omega} = \frac{M - K(R+r)^2 \theta}{J_G + m r^2}$ (1/2)

(d) $v_G = r \omega \Rightarrow a_G = r \dot{\omega}$
(1/2 ponto)

$a_G = \frac{r [M - K(R+r)^2 \theta]}{J_G + m r^2}$ (1/2)

❑ Exercício 10 (P3-Q3-2014)



Questão 3 (3,5 pontos): O disco de raio R e massa m_D , rola sem escorregar num plano horizontal, partindo do repouso em $\theta = 0^\circ$, quando um binário de momento M é aplicado. Um cabo ideal une o centro do disco G ao bloco B , por meio de uma polia de inércia desprezível. O bloco B de massa m_B escorrega sobre o plano com inclinação α e coeficiente de atrito μ .

- Determine o momento de inércia do disco J_{Cz} em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura (direção $\vec{k}$) que passa pelo ponto C de contato com o solo.
- Usando J_{Cz} , determine a energia cinética do sistema em função da velocidade angular ω do disco.
- Determine o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do disco em função de θ .



□ Exercício 10 (P3–Q3–2014)

Solução

a) **0,5** Teorema dos eixos paralelos:

$$J_{Cz} = J_{Cz} + m_D R^2 = \frac{m_D R^2}{2} + m_D R^2 = \frac{3m_D R^2}{2}$$

b) **1,0** O sistema parte do repouso $\Rightarrow E_0 = 0$, C é o CIR do disco, e observa-se que a velocidade do bloco é igual, em módulo, à velocidade do centro de massa do disco:

$$E = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_B v_G^2 + \frac{1}{2} \frac{3m_D R^2}{2} \omega^2$$

Aplicando a expressão do campo de velocidades: $\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (G - C) \Rightarrow v_G = \omega R$

$$\text{Então: } E = \frac{1}{2} m_B (\omega R)^2 + \frac{3m_D R^2}{4} \omega^2 \Rightarrow \boxed{E(\omega) = \frac{1}{4} (2m_B + 3m_D) R^2 \omega^2}$$

c) **2,0** O trabalho das forças externas: a força de atrito F_{at} , a força peso do bloco e o binário de momento M realizam trabalho:

$$W^{ext} = M\theta - m_B g \theta R \sin \alpha - F_{at} \theta R$$

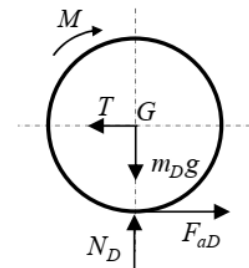
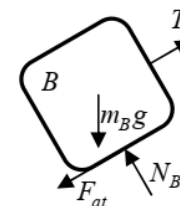
Como há escorregamento: $F_{at} = \mu N = \mu m_B g \cos \alpha$

$$W^{ext} = M\theta - m_B g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \theta R$$

Portanto, aplicando o TEC:

$$\frac{1}{4} (2m_B + 3m_D) R^2 \omega^2 = M\theta - m_B g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \theta R \Rightarrow$$

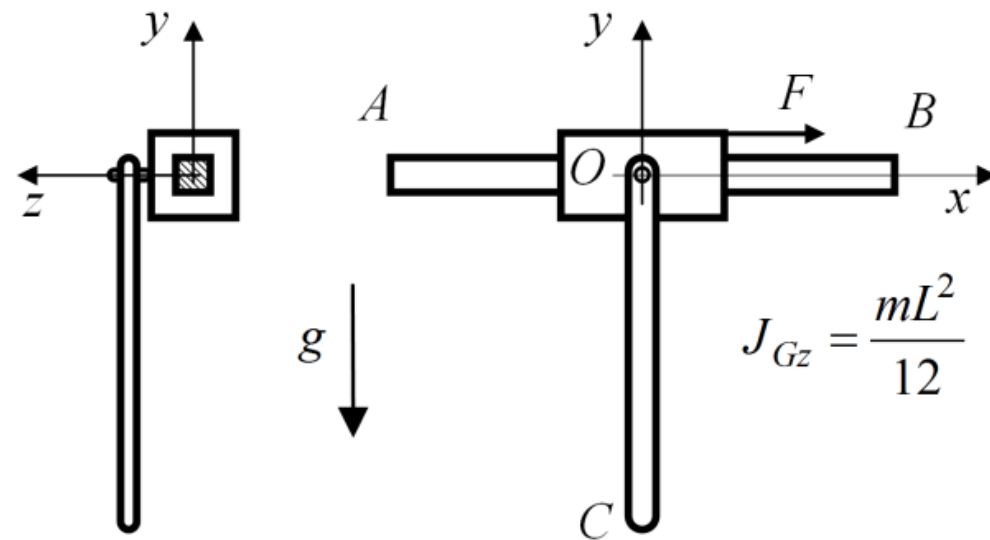
$$\boxed{\vec{\omega} = - \sqrt{\frac{4[M - m_B g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) R] \theta}{(2m_B + 3m_D) R^2}} \vec{k}}$$



□ P3–Q2–2014

Questão 2 (3,5 pontos): O anel de seção retangular e massa m pode deslizar sem atrito sobre a guia horizontal AB . A barra homogênea OC , de comprimento L e massa m é articulada sem atrito ao anel por meio de um pino horizontal em O . É aplicada ao anel uma força F horizontal. Sabendo que o sistema parte do repouso, com a barra pendente na vertical, pede-se determinar:

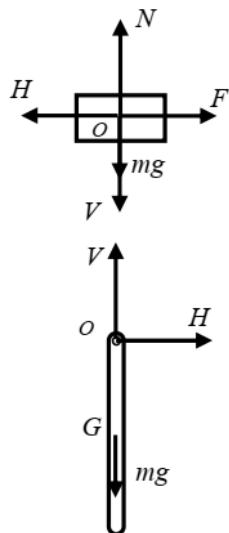
- o diagrama de corpo livre para a barra;
- para o instante inicial, a aceleração angular da barra, a aceleração do anel e a reação da articulação sobre a barra em O .



□ P3-Q2-2014

Solução

a) **1,0** Diagramas de corpo livre:



b) **2,5** Teorema do movimento do baricentro:

Anel:

$$ma_{Ox} = F - H$$

$$ma_{Oy} = N - V - mg = 0$$

Barra:

$$ma_{Gx} = H$$

$$ma_{Gy} = V - mg$$

Teorema do momento da quantidade de movimento para a barra:

$$J_{Gz} \dot{\omega} = -H \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{mL^2}{12} \dot{\omega} = -H \frac{L}{2} \Rightarrow H = -\frac{mL}{6} \dot{\omega}$$

Da cinemática, no instante inicial, quando $\vec{\omega} = \vec{0}$:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] = a_{Ox} \vec{i} + \dot{\omega} \frac{L}{2} \vec{i}$$

Ou seja, no instante inicial $a_{Gy} = 0 \Rightarrow V = mg$

Substituindo nas equações do teorema do movimento do baricentro da barra e do anel:

$$\text{Barra: } m \left(a_{Ox} + \dot{\omega} \frac{L}{2} \right) = -\frac{mL}{6} \dot{\omega}$$

$$\text{Anel: } ma_{Ox} = F - \left(-\frac{mL}{6} \dot{\omega} \right)$$

Portanto:

$$F + 2 \frac{mL}{6} \dot{\omega} = -m \dot{\omega} \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{5mL}{6} \dot{\omega} = -F \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = -\frac{6F}{5mL}}$$

$$\text{Também resulta que } H = -\frac{mL}{6} \left(-\frac{6F}{5mL} \right) \Rightarrow H = \frac{F}{5}$$

Substituindo na equação do teorema do movimento do baricentro do anel na direção horizontal:

$$ma_{Ox} = F - \frac{F}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_O = \frac{4F}{5m} \vec{i}}$$

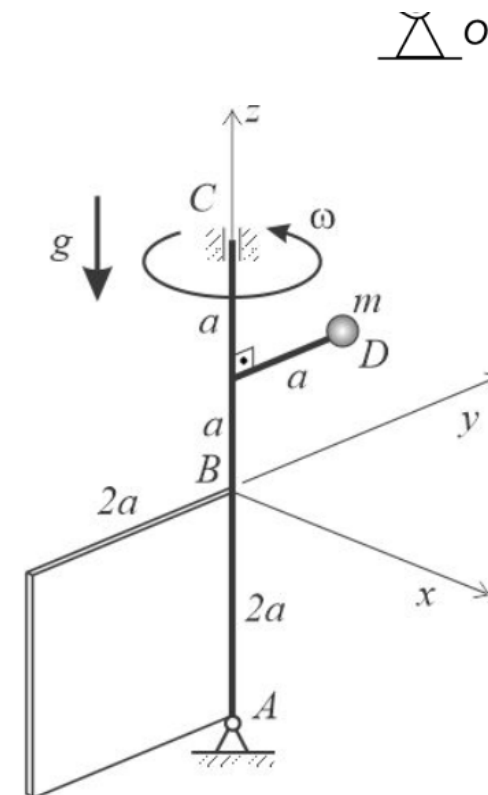
Dos resultados anteriores:

$$\vec{R} = H \vec{i} + V \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = \frac{F}{5} \vec{i} + mg \vec{j}}$$

❑ Exercício (PSUB-Q3-2023)

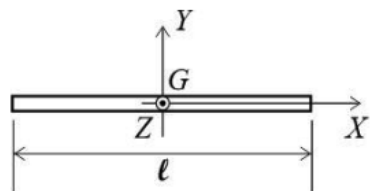
Questão 3 (3,5 pontos). Na figura, no eixo vertical ABC há uma articulação em A e um anel em C. Soldadas nesse eixo, há uma placa homogênea, de massa m e lado $2a$, e uma barra, de comprimento a com uma massa m fixa em D, conforme mostrado na figura. O conjunto eixo, placa e barra está no plano Byz e o sistema de coordenadas (B, x, y, z) gira solidariamente ao conjunto com rotação ω constante dada. O eixo e a barra têm massas desprezíveis. Pede-se:

- (a) (0,5) faça o diagrama de corpo livre (DCL) do conjunto;
- (b) (1,0) obtenha a expressão da quantidade de movimento angular do conjunto, em relação ao polo B, em função da sua rotação ω ;
- (c) (0,5) obtenha os momentos e produtos de inércia do conjunto, envolvidos na expressão do item (b);
- (d) (1,5) obtenha as reações em A e C, em função de ω .

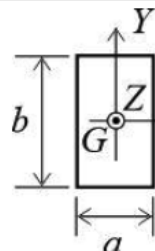


Formulário da prova: momentos de inércia de sólidos homogêneos

Barra homogênea (massa m , comprimento ℓ):



$$J_{G_Y} = J_{G_Z} = \frac{1}{12} m \ell^2$$



Placa retangular homogênea
(massa m , lados a, b):

$$J_{G_X} = \frac{1}{12} m b^2 \quad J_{G_Z} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$



Exercício (PSUB-Q3-2023)

Resolução:

(a) DCL ao lado (0,5):

(b) Quantidade de movimento angular em relação ao polo B, com coordenadas (B, x, y, z) (1,0):

$$\vec{H}_B = m(\vec{G} - \vec{B}) \wedge \vec{v}_B + (J_{Bx}\omega_x - J_{Bxy}\omega_y - J_{Bxz}\omega_z)\vec{i} + (-J_{Byx}\omega_x + J_{Byy}\omega_y - J_{Byz}\omega_z)\vec{j} + (-J_{Bzx}\omega_x - J_{Bzy}\omega_y + J_{Bzz}\omega_z)\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{H}_B = -J_{Byz}\omega\vec{j} + J_{Bz}\omega\vec{k}}$$

(c) Polo B (0,5):

$$\boxed{J_{Byz} = [0 + m(a)(a)] + [0 + m(a)(a)] = 2ma^2} \quad \boxed{J_{Bz} = \left[\frac{m(2a)^2}{12} + ma^2\right] + ma^2 = \frac{7ma^2}{3}}$$

(d) Centro de massa CM do conjunto:

$$(\text{CM} - B) = \frac{m(x_G + x_D)\vec{i} + m(y_G + y_D)\vec{j} + m(z_G + z_D)\vec{k}}{2m} = \vec{0} \Rightarrow \text{CM} \equiv B$$

Pelo Teorema da Resultante (TR), obtemos (0,5):

$$m\vec{a}_B = \vec{0} = (X_A + X_C)\vec{i} + (Y_A + Y_C)\vec{j} + (Z_A - 2mg)\vec{k}$$

$$X_A + X_C = 0 \quad (1)$$

$$Y_A + Y_C = 0 \quad (2)$$

$$Z_A = 2mg \quad (3)$$

Pelo Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), obtemos (0,5):

$$\vec{H}_B = \omega(-J_{Byz}\vec{j} + J_{Bz}\vec{k}) \Rightarrow \dot{\vec{H}}_B = \dot{\omega}(-J_{Byz}\vec{j} + J_{Bz}\vec{k}) + \omega(-J_{Byz}\dot{\vec{j}} + J_{Bz}\dot{\vec{k}}) = \omega^2 J_{Byz}\vec{i}$$

$$\dot{\vec{H}}_B = m\vec{v}_B \wedge \vec{v}_B + \vec{M}_B^{\text{ext}} \Rightarrow \omega^2 J_{Byz}\vec{i} = a(2Y_A - mg + mg - 2Y_C)\vec{i} + a(-2X_A + 2X_C)\vec{j}$$

$$\omega^2 J_{Byz} = 2a(Y_A - Y_C) \quad (4)$$

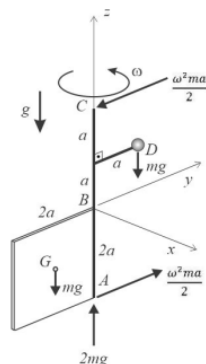
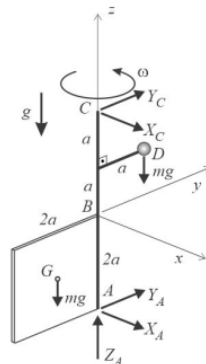
$$0 = 2a(-X_A + X_C) \quad (5)$$

Destas equações obtemos (0,5):

$$\text{De (1) e (5): } \boxed{X_A = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{X_C = 0}$$

$$\text{De (2) e (4): } \boxed{Y_A = \frac{\omega^2 J_{Byz}}{4a} = \frac{\omega^2 ma}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{Y_C = -\frac{\omega^2 J_{Byz}}{4a} = -\frac{\omega^2 ma}{2}}$$

$$\text{De (3): } \boxed{Z_A = 2mg}$$





❑ Referências

- [1] Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Dynamics**, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.
- [2] Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 2 Dynamics**, 14th edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2016.
- [3] Material complementar de Tenenbaum, R. A. **Fundamentals of Appiled Dynamics**, Springer-Verlag New York, Inc. 2004.