

PME 3100 • Mecânica I • Módulo 3.3

Aplicações dos teoremas da dinâmica

Atrito de escorregamento estático/cinético

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino



- 1 Disco em rolamento sobre um plano
- 2 *Dinâmica longitudinal de um veículo



- 1 Disco em rolamento sobre um plano
- 2 *Dinâmica longitudinal de um veículo



Disco em rolamento sobre um plano

Seja um *disco homogêneo* de centro C e raio r em rolamento sobre uma *superfície plana inclinada* que forma um ângulo β com a horizontal ($\beta > 0$ representa um active).

Defina-se a base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, com \hat{i} tangente à superfície e \hat{j} a ela normal. Considere a aplicação de um torque $-M\hat{k}$ sobre o disco. Adote-se ainda:

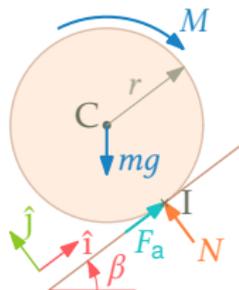
$$\vec{a}_C = a\hat{i}, \quad \vec{\alpha} = -\alpha\hat{k} \quad \text{e} \quad J_{Cz} = k mr^2$$

Da aplicação do TQMA, com polo C , e do TR, obtêm-se as seguintes equações:

$$[M_{Cz} = J_{Cz}\alpha_z] : \quad -M + F_a r = -k mr^2 \alpha$$

$$[R_x = ma_{Cx}] : \quad F_a - mg \sin \beta = ma$$

$$[R_x = ma_{Cx}] : \quad N - mg \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = mg \cos \beta}$$



Cenário 1 – rolamento sem escorregamento

No cenário de *rolamento sem escorregamento*, o ponto I do disco é o *centro instantâneo de rotação*. Assim:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge (C - I) = (-\omega \hat{k}) \wedge (r \hat{j}) = \omega r \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_C = a \hat{i} = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \alpha r \hat{i} \Rightarrow \boxed{a = \alpha r}$$

Além disso, a *ausência de escorregamento* em I implica em um modelo de *atrito estático* para o contato, ou seja, N e F_a são *incógnitas independentes*.

Das equações dinâmicas remanescentes:

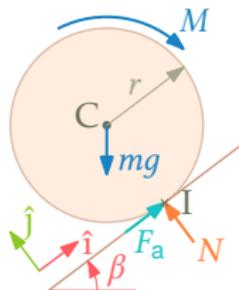
$$[M_{Cz} = J_{Cz} \alpha_z] : \quad -M + F_a r = -k m r^2 \alpha$$

$$[R_x = m a_{Cx}] : \quad F_a - mg \sin \beta = ma$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha = \frac{M - mgr \sin \beta}{(k + 1)mr^2}}$$

$$\boxed{F_a = \frac{M + k mgr \sin \beta}{(k + 1)r}}$$



Cenário 1 – rolamento sem escorregamento

(a) Em um *acrive* ($\beta > 0$), considerando um *torque motor* ($M > 0$):

- $a \geq 0 \Leftrightarrow a = \alpha r = \frac{M - mgr \sin \beta}{(k+1)mr} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{M \geq mgr \sin \beta}$

- haverá *rolamento sem escorregamento* se, e somente se, $|F_a| \leq \mu_e N$:

$$\frac{M + k mgr \sin \beta}{(k+1)r} \leq \mu_e mg \cos \beta \Leftrightarrow \boxed{M \leq [\mu_e(k+1) \cos \beta - k \sin \beta] mgr}$$

- máximo acrive possível em *rolamento sem escorregamento*:

$$mgr \sin \beta \leq [\mu_e(k+1) \cos \beta - k \sin \beta] mgr \Rightarrow \boxed{\tan \beta \leq \mu_e}$$

(b) Em um *acrive* ($\beta > 0$), o *torque de frenagem de máximo módulo* ($M < 0 \Leftrightarrow M = -|M|$) consistente com a *condição de rolamento sem escorregamento* $|F_a| \leq \mu_e N$ será:

$$\left| \frac{-|M| + k mgr \sin \beta}{(k+1)r} \right| = \frac{|M| - k mgr \sin \beta}{(k+1)r} \leq \mu_e mg \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|M| \leq [\mu_e(k+1) \cos \beta + k \sin \beta] mgr}$$



Cenário 1 – rolamento sem escorregamento

(c) Em um *declive* ($\beta < 0 \Rightarrow \sin \beta = -\sin |\beta|$, $\cos \beta = \cos |\beta|$), o *máximo torque motor* ($M > 0$) consistente com a *condição de rolamento sem escorregamento* $|F_a| \leq \mu_e N$ será:

$$\left| \frac{M - k mgr \sin |\beta|}{(k+1)r} \right| = \frac{M - k mgr \sin |\beta|}{(k+1)r} \leq \mu_e mg \cos |\beta|$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M \leq [\mu_e(k+1) \cos |\beta| + k \sin |\beta|] mgr}$$

(d) Em um *declive* ($\beta < 0$), considerando um *torque de frenagem* ($M < 0$):

$$\bullet \quad a \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-|M| + mgr \sin |\beta|}{(k+1)mr} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|M| \geq mgr \sin |\beta|}$$

• haverá *rolamento sem escorregamento* se, e somente se, $|F_a| \leq \mu_e N$:

$$\frac{|M| + k mgr \sin |\beta|}{(k+1)r} \leq \mu_e mg \cos |\beta| \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|M| \leq [\mu_e(k+1) \cos |\beta| - k \sin |\beta|] mgr}$$

• máximo declive possível em *rolamento sem escorregamento*:

$$mgr \sin |\beta| \leq [\mu_e(k+1) \cos |\beta| - k \sin |\beta|] mgr \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan |\beta| \leq \mu_e}$$



Cenário ② – rolamento com escorregamento

No cenário de *rolamento com escorregamento*, não se conhece a posição do centro instantâneo de rotação do disco. Assim, a e α são *incógnitas independentes*. Por outro lado, *havendo escorregamento* em I, deve ser adotado o modelo de *atrito cinético* para o contato:

$$F_a = \mu_c N = \mu_c mg \cos \beta \quad \text{caso } M > 0$$

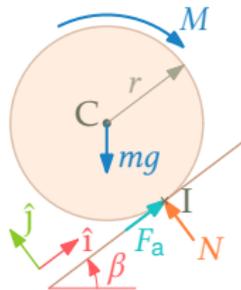
$$F_a = -\mu_c N = -\mu_c mg \cos \beta \quad \text{caso } M < 0$$

Das equações dinâmicas remanescentes:

$$[M_{Cz} = J_{Cz} \alpha_z] : -M \pm \mu_c mgr \cos \beta = -k mr^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M \mp \mu_c mgr \cos \beta}{k mr^2}$$

$$[R_x = ma_{Cx}] : \pm \mu_c mg \cos \beta - mg \sin \beta = ma \Rightarrow a = g(-\sin \beta \pm \mu_c \cos \beta)$$

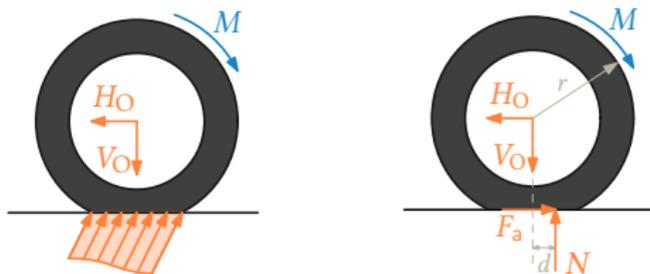
Assim, caso haja escorregamento, a aceleração do centro da roda se torna *independente do valor do torque M* .



- 1 Disco em rolamento sobre um plano
- 2 *Dinâmica longitudinal de um veículo



Resistência ao rolamento



- Os modelos mais simplificados de rolamento, consideram que o contato de um cilindro rígido sobre uma pista plana indeformável se dá em uma única linha, paralela ao eixo do cilindro e de dimensões desprezíveis.
- Um modelo mais próximo da realidade deve considerar a *área de contato* decorrente da deformação tanto do cilindro quanto da pista. Neste caso, o contato passa a ser modelado por meio de um *carregamento distribuído* por esta área, ou seja, por um campo de pressões.

Resistência ao rolamento

Idealmente, este campo de pressões poderia ser reduzido a *uma única força com duas componentes*:

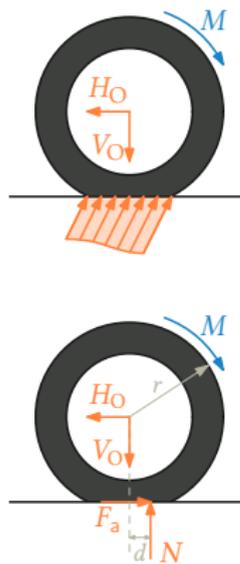
- N (normal): ortogonal à superfície de contato.
- F_a (atrito): paralela à superfície de contato.

Devido à assimetria deste campo, a linha de ação da componente normal não passa pelo “ponto” de contato, mas à direita dele, a uma distância d .

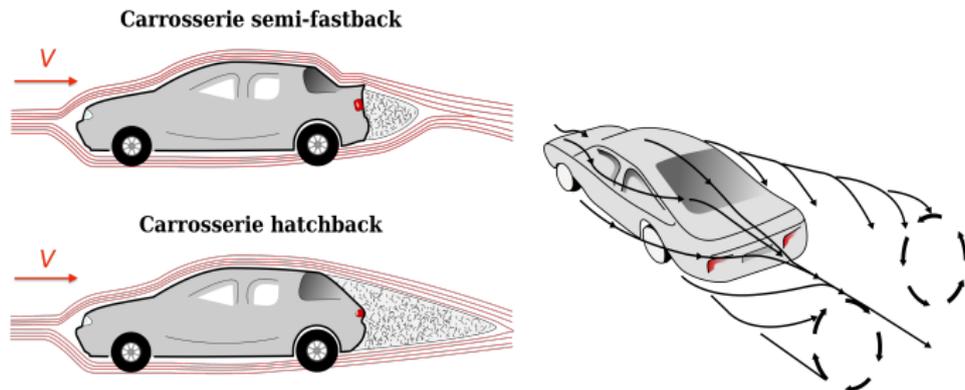
Assim, V_O e N produzem um *binário contrário* ao momento M imposto pelo sistema de tração de intensidade:

$$M_R = dN = frN$$

com $f = d/r$ denotando o *coeficiente de resistência ao rolamento*.



Força de arrasto aerodinâmico (*drag*)

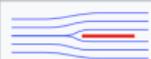
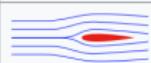


Fonte: [Aerodinâmica automotiva \(Wikipedia\)](#)

Componente da resultante do sistema de forças aerodinâmicas sobre o veículo, na direção oposta à *velocidade relativa* v do escoamento incidente.

$$F_D \propto v^2$$

Força de arrasto aerodinâmico (*drag*)

Shape and flow	Form Drag	Skin friction
	0%	100%
	~10%	~90%
	~90%	~10%
	100%	0%

Fonte: [Aerodinâmica automotiva](#)

A força de arrasto média pode ser estimada pela expressão:

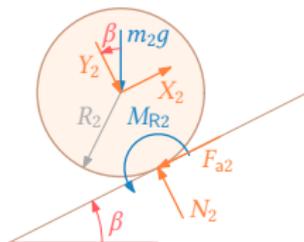
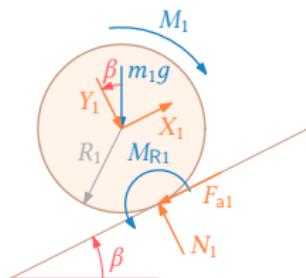
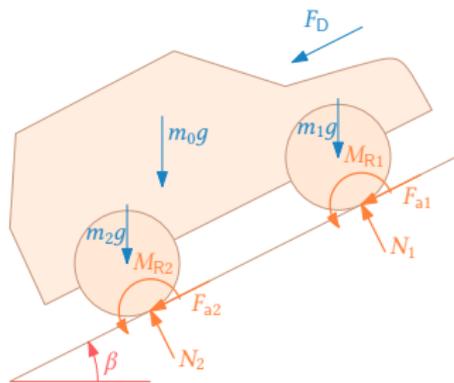
$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A$$

com:

- ρ denotando a densidade do fluido;
- v sendo a velocidade relativa do escoamento incidente sobre o sólido;
- A sendo a área projetada (frontal);
- C_D ou C_X denotando um *adimensional* denominado *coeficiente de arrasto* que é função da forma do sólido e das propriedades de sua superfície.

Dinâmica longitudinal de um veículo

O modelo de *um grau de liberdade* para a dinâmica longitudinal de um veículo é composto por apenas *três corpos sólidos*: um bloco rígido de massa m_0 em movimento de *translação retilínea pura* e dois discos de massas m_1 e m_2 , representando os conjuntos eixos + rodas dianteiro e traseiro, e que *rolam sem escorregar* sobre a pista.



Dinâmica longitudinal de um veículo

Aplicando o TR para o conjunto, para a direção x:

$$[R_x = ma_x] : -F_{a1} - F_{a2} - mg \sin \beta - F_D = ma$$

com $m = m_0 + m_1 + m_2$ sendo a massa total do veículo.

Aplicando o TQMA para cada uma das rodas, adotando polos nos respectivos centros, e considerando que $a = \alpha_i R_i$ ($i = 1, 2$) pela *condição de rolamento sem escorregamento*:

$$F_{a1} R_1 + M_1 - f R_1 N_1 = J_1 \frac{a}{R_1} \quad \Rightarrow \quad F_{a1} = -\frac{M_1}{R_1} + f N_1 + \frac{J_1}{R_1^2} a \quad \textcircled{1}$$

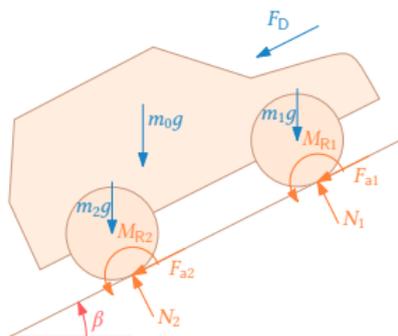
$$F_{a2} R_2 - f R_2 N_2 = J_2 \frac{a}{R_2} \quad \Rightarrow \quad F_{a2} = f N_2 + \frac{J_2}{R_2^2} a \quad \textcircled{2}$$

Substituindo $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ na equação $R_x = ma_x$ do conjunto, tem-se:

$$\frac{M_1}{R_1} - f(N_1 + N_2) - mg \sin \beta - F_D = \left(m + \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} \right) a$$



Dinâmica longitudinal de um veículo



Novamente, para o veículo completo, considerando a direção y :

$$[R_y = ma_y] : N_1 + N_2 - mg \cos \beta = 0$$

Assim, a equação que descreve *dinâmica longitudinal de um veículo* é:

$$\frac{M_1}{R_1} = \left(m + \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} \right) a + mg(f \cos \beta + \sin \beta) + \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A$$

Perguntas?

reorsino@usp.br

