ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

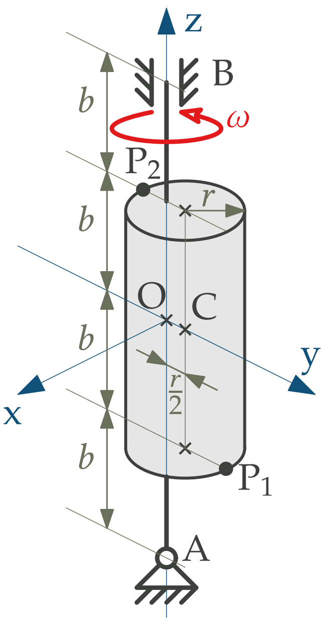
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Atividade remota E9 – Reoferecimento 2024

- Esta atividade é composta por 1 questão e deve ser realizada individualmente.
- Antes de realizar sua submissão, o aluno deve ler as regras para a realização das atividades remotas.

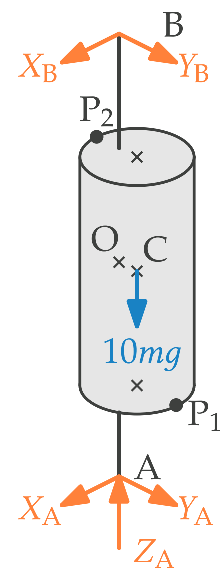
Enunciado

A figura ilustra um corpo rígido único de massa total $10m$, constituído por um cilindro rígido e homogêneo de centro C, raio r, comprimento $2b$ e massa $8m$, e por duas partículas materiais P_1 e P_2, cada uma de massa m. O corpo é preso a um eixo AOB, de massa desprezível, vinculado a uma base fixa por meio de uma articulação ideal em A e um anel ideal em B. O eixo AOB é paralelo ao eixo central do cilindro, distando $r/2$ deste. O sistema de coordenadas Oxyz é solidário ao corpo. Admitindo que o corpo gire em torno do eixo AOB com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ constante, e sabendo que $(P_1 - O) = \frac{3r}{2}\vec{j} - b\vec{k}$ e $(P_2 - O) = -\frac{r}{2}\vec{j} + b\vec{k}$ pede-se:



a) **(3)** esboçar o diagrama de corpo livre;
b) **(2)** determinar o vetor posição (G – O) do centro de massa G do corpo;
c) **(9)** determinar o momento de inércia J_{Oz} e os produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} do corpo;
d) **(6)** expressar a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa G em função de r e ω.
e) **(12)** escrever as equações obtidas a partir da aplicação do Teorema da Resultante ao corpo;
f) **(12)** escrever a equação obtida a partir da aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular ao corpo, adotando polo em O;
g) **(6)** determinar as reações na articulação em A e no anel em B;

Resolução comentada



a) Diagrama de corpo livre indicado na figura ao lado.

Adote uma nota na escala 0/2 a 2/2 para a resolução do seu colega, atribuindo **2/2** se o diagrama estiver inteiramente correto, **1/2** se houver apenas um erro, e **0/2** se houver mais de um erro. Obs.: admitir correta a situação em que os pesos mg são aplicados em P_1 e P_2, e um peso $8mg$ é aplicado em C.

b) O cilindro tem massa $8m$ e centro de massa C, e as partículas materiais P_1 e P_2 têm massa m. Assim:

$$(G-O) = \frac{8m(C-O) + m(P_1 - O) + m(P_2 - O)}{8m + m + m} = \frac{8m\left(\frac{r}{2}\vec{j}\right) + m\left(\frac{3r}{2}\vec{j} - b\vec{k}\right) + m\left(-\frac{r}{2}\vec{j} + b\vec{k}\right)}{10m} = \frac{r}{2}\vec{j}$$

$$\boxed{(G-O) = \frac{r}{2}\vec{j}}$$

Adote uma nota na escala 0/1 a 1/1 para a resolução do seu colega, atribuindo **1/1** se a solução estiver inteiramente correta ou **0/1** em caso de erros de qualquer outra natureza.

c) Considerando que o sólido rígido é constituído por um cilindro rígido e homogêneo e pelas partículas materiais P_1 e P_2, o momento de inércia J_{Oz} e os produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} do corpo são calculados, como segue:

$$J_{Oz} = \left(8m\frac{r^2}{2} + 8m\frac{r^2}{4}\right) + m\left(\frac{3r}{2}\right)^2 + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oz} = \frac{17mr^2}{2}}$$

$$J_{Oxz} = (0 + 8mx_Cz_C) + m\left(x_{P_1}z_{P_1}\right) + m\left(x_{P_2}z_{P_2}\right) = [0 + 8m(0)(0)] + m\,[0(-b)] + m\,[0(b)] \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oxz} = 0}$$

$$J_{Oyz} = (0 + 8my_Cz_C) + m\left(y_{P_1}z_{P_1}\right) + m\left(y_{P_2}z_{P_2}\right) = \left[0 + 8m\frac{r}{2}(0)\right] + m\left[\frac{3r}{2}(-b)\right] + m\left[\frac{-r}{2}(b)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oyz} = -2mrb}$$

Para cada propriedade de inércia pedida, adote uma nota na escala 0/1 a 1/1 para a resolução do seu colega, atribuindo **1/1** se a solução estiver inteiramente correta ou **0/1** em caso de erros de qualquer outra natureza.

d) Aplicando a expressão do campo de acelerações para o corpo rígido, tem-se:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)], \quad \vec{a}_O = \vec{0}, \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$$

$$= \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge \frac{r}{2}\vec{j}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_G = \frac{-\omega^2 r}{2}\vec{j}}$$

Adote uma nota na escala 0/1 a 1/1 para a resolução do seu colega, atribuindo **1/1** se a solução estiver inteiramente correta ou **0/1** em caso de erros de qualquer outra natureza.

e) Pelo Teorema da Resultante (TR), obtém-se:

$$10m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext} \quad \Rightarrow \quad 10m\left(\frac{-\omega^2 r}{2}\vec{j}\right) = (X_A + X_B)\vec{i} + (Y_A + Y_B)\vec{j} + (Z_A - 10mg)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} X_A + X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = -5mr\omega^2 \\ Z_A = 10mg \end{cases}}$$

Para cada equação escalar, adote uma nota na escala 0/1 a 1/1 para a resolução do seu colega, atribuindo **1/1** se a solução estiver inteiramente correta ou **0/1** em caso de erros de qualquer outra natureza.

f) Pelo Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), adotando polo em O, obtém-se:

$$10m(\mathrm{G}-\mathrm{O}) \wedge \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{O}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\vec{\alpha}) + \vec{\omega} \wedge \boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\vec{\omega}) = \vec{M}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{ext}}, \qquad \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{O}} = \vec{0}, \quad \vec{\alpha} = \vec{0}, \quad \vec{\omega} = \omega\vec{\mathrm{k}}$$

Portanto:

$$\vec{\omega} \wedge \boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\vec{\omega}) = \omega\vec{\mathrm{k}} \wedge \left(-J_{\mathrm{Oxz}}\omega\vec{\mathrm{i}} - J_{\mathrm{Oyz}}\omega\vec{\mathrm{j}} + J_{\mathrm{Oz}}\omega\vec{\mathrm{k}}\right) = \omega^2\left(J_{\mathrm{Oyz}}\vec{\mathrm{i}} - J_{\mathrm{Oxz}}\vec{\mathrm{j}}\right) = \left(-2mrb\omega^2\right)\vec{\mathrm{i}} = \vec{M}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{ext}} \tag{1}$$

O momento resultante das forças externas aplicadas ao corpo, com respeito ao polo O, pode ser calculado, como segue:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_{\mathrm{O}}^{\mathrm{ext}} &= (\mathrm{A}-\mathrm{O}) \wedge \vec{F}_{\mathrm{A}} + (\mathrm{B}-\mathrm{O}) \wedge \vec{F}_{\mathrm{B}} + (\mathrm{C}-\mathrm{O}) \wedge \vec{F}_{\mathrm{C}} \\
&= (-2b\vec{\mathrm{k}}) \wedge (X_{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{i}} + Y_{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{j}} + Z_{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{k}}) + (2b\vec{\mathrm{k}}) \wedge (X_{\mathrm{B}}\vec{\mathrm{i}} + Y_{\mathrm{B}}\vec{\mathrm{j}}) + \left(\frac{r}{2}\vec{\mathrm{j}}\right) \wedge (-10mg\vec{\mathrm{k}}) \\
&= (2bY_{\mathrm{A}} - 2bY_{\mathrm{B}} - 5mgr)\vec{\mathrm{i}} + (2bX_{\mathrm{B}} - 2bX_{\mathrm{A}})\vec{\mathrm{j}}
\end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtém-se

$$\boxed{\begin{cases} 2bY_{\mathrm{A}} - 2bY_{\mathrm{B}} - 5mgr = -2mrb\omega^2 \\ 2bX_{\mathrm{B}} - 2bX_{\mathrm{A}} = 0 \end{cases}}$$

Para cada equação escalar, adote uma nota na escala 0/1 a 1/1 para a resolução do seu colega, atribuindo **1/1** se a solução estiver inteiramente correta ou **0/1** em caso de erros de qualquer outra natureza.

g) Das equações obtidas nos itens (e) e (f), tem-se:

$$\boxed{X_{\mathrm{A}} = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{X_{\mathrm{B}} = 0}$$

$$\boxed{Y_{\mathrm{A}} = \frac{5mgr}{4b} - 3mr\omega^2} \quad \text{e} \quad \boxed{Y_{\mathrm{B}} = -\frac{5mgr}{4b} - 2mr\omega^2}$$

$$\boxed{Z_{\mathrm{A}} = 10mg}$$

Para cada reação, adote uma nota na escala 0/1 a 1/1 para a resolução do seu colega, atribuindo **1/1** se a solução estiver inteiramente correta ou **0/1** em caso de erros de qualquer outra natureza.