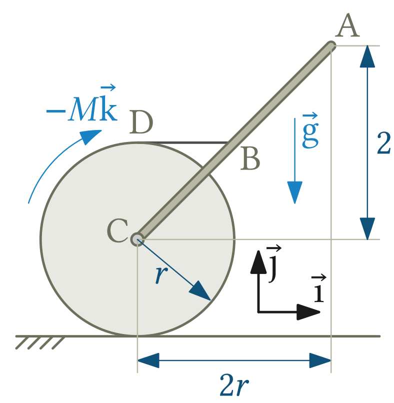
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Atividade remota E8 – Reoferecimento 2024

- Esta atividade é composta por 1 questão e deve ser realizada individualmente.
- Antes de realizar sua submissão, o aluno deve ler as regras para a realização das atividades remotas.

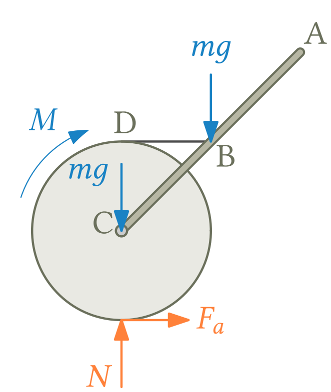
Enunciado



O sistema da figura é constituído por um disco rígido homogêneo de centro C, massa m e raio r, e por uma barra esbelta AC, rígida e homogênea de massa m e comprimento $2r\sqrt{2}$. Devido à presença de dois vínculos, uma articulação ideal em C e um fio ideal BD, o sistema descrito se comporta como um único corpo rígido. Sabe-se que o disco rola sem escorregar sobre o pavimento horizontal e que há a aplicação de um momento $-M\vec{k}$. Considerando que o sistema encontra-se instantaneamente em repouso na configuração indicada, pede-se:

a) (4) esboçar o diagrama de corpo livre considerando o sistema como um corpo rígido único;
b) (4) determinar o vetor posição (G – C) do centro de massa G do sistema;
c) (6) determinar o momento de inércia J_{Cz} do sistema;
d) (6) expressar a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa G em função de r e α, com $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$ denotando a aceleração angular do corpo;
e) (6) escrever as equações obtidas a partir da aplicação do Teorema da Resultante ao corpo;
f) (6) escrever a equação obtida a partir da aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular ao corpo, adotando polo em C;
g) (4) determinar a aceleração angular $\vec{\alpha}$ do corpo a partir da solução do sistema de equações obtido;
h) (4) esboçar o diagrama de corpo livre da barra AC isoladamente;
i) (6) escrever a equação obtida a partir da aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular à barra AC, adotando polo em C;
j) (4) determinar o máximo valor que M pode ter para que o fio BD permaneça tracionado;

Resolução comentada



a) Diagrama de corpo livre indicado na figura ao lado.

Adote uma nota na escala 0/1 a 1/1 para a resolução do seu colega, atribuindo 1/1 apenas a uma resposta inteiramente correta neste item.

b) O disco tem massa m e centro de massa C; a barra tem massa m e centro de massa B; assim:

$$(G - C) = \frac{m(C - C) + m(B - C)}{m + m} = \frac{m\vec{0} + m(r\vec{i} + r\vec{j})}{2m} = \frac{r}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(G - C) = \frac{r}{2}(\vec{i} + \vec{j})}$$

Atribua nota na escala 0/1 a 1/1, correspondendo 1/1 a uma solução correta.

c) O momento de inércia J_{Cz} pode ser calculado somando as contribuições vindas do disco e da barra:

$$J_{Cz} = \underbrace{\frac{1}{2}mr^2}_{\text{disco}} + \underbrace{\frac{1}{12}ml^2 + m(x_B^2 + y_B^2)}_{\text{barra}} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m(2r\sqrt{2})^2 + m(r^2 + r^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Cz} = \frac{19}{6}mr^2}$$

Atribua nota na escala 0/1 a 1/1, correspondendo 1/1 a uma solução correta.

d) O disco rola sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal fixa, ou seja, o centro instantâneo de rotação I é o ponto de contato com a pista. Ainda, o centro C do disco descreve um movimento retilíneo. Assim:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge (C - I) = \omega\vec{k} \wedge r\vec{j} = -\omega r\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_C = -\alpha r\vec{i}$$

Da equação de campo de acelerações para o corpo, considerando que o valor instantâneo de $\vec{\omega} = \vec{0}$ (uma vez que o sistema se encontra em repouso na configuração indicada):

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \wedge (G - C) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - C)] = -\alpha r\vec{i} + \alpha\vec{k} \wedge \frac{r}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_G = \alpha r\left(-\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)}$$

Atribua nota na escala 0/2 a 2/2, correspondendo 1/2 à identitificação da expressão correta para $\vec{a}_C$ e 1/2 à resposta final correta.

e) A partir do DCL do item (a), pode-se obter a resultante do sistema de forças externas ao corpo:

$$\vec{R} = F_a\vec{i} + (N - 2mg)\vec{j}$$

Assim, da aplicação do Teorema da Resultante, $(2m)\vec{a}_G = \vec{R}$, resultam as equações:

$$-3m\alpha r = F_a \tag{1}$$
$$mr\alpha = N - 2mg \tag{2}$$

Atribua nota na escala 0/2 a 2/2, correspondendo 1/2 a cada equação inteiramente correta.

f) A partir do DCL do item (a), pode-se obter o momento, com respeito ao polo C, do sistema de forças externas ao corpo:

$$\vec{M}_C = (F_a r - M - mgr)\vec{k}$$

Assim, da aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular:

$$(2m)(G - C) \wedge \vec{a}_C + J_{Cz}\vec{\alpha} = \vec{M}_C \quad \Rightarrow \quad (2m)\frac{r}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \wedge (-\alpha r\vec{i}) + \frac{19}{6}mr^2\alpha\vec{k} = (F_a r - M - mgr)\vec{k}$$

de onde resulta a equação:

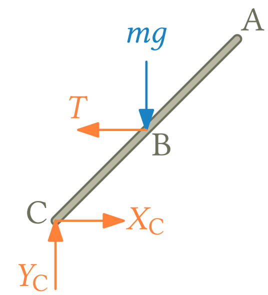
$$\frac{25}{6}mr^2\alpha = F_a r - M - mgr \tag{3}$$

Atribua nota na escala 0/1 a 1/1, correspondendo 1/1 à equação inteiramente correta.

g) Substituindo a eq. (1) na eq. (3), resulta:

$$\frac{25}{6}mr^2\alpha = -3m\alpha r^2 - M - mgr \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{6(M + mgr)}{43mr^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha} = -\frac{6(M + mgr)}{43mr^2}\vec{k}}$$

Atribua nota na escala 0/1 a 1/1, correspondendo 1/1 à solução inteiramente correta.



h) Diagrama de corpo livre indicado na figura ao lado.

Adote uma nota na escala 0/1 a 1/1 para a resolução do seu colega, atribuindo 1/1 apenas a uma resposta inteiramente correta neste item.

i) A partir do DCL do item (h), pode-se obter o momento, com respeito ao polo C do sistema de forças externas à barra:

$$\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{barra}} = (Tr - mgr)\vec{\mathrm{k}}$$

Lembrando que o centro de massa da barra é o ponto B, da aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular:

$$m(\mathrm{B}-\mathrm{C}) \wedge \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{C}} + J_{\mathrm{C}z}^{\mathrm{barra}}\vec{\alpha} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{barra}} \quad \Rightarrow \quad mr(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) \wedge (-\alpha r\vec{\imath}) + \frac{8}{3}mr^2\alpha\vec{\mathrm{k}} = (Tr - mgr)\vec{\mathrm{k}}$$

de onde resulta a equação:

$$\frac{11}{3}mr^2\alpha = Tr - mgr \tag{4}$$

Atribua nota na escala 0/1 a 1/1, correspondendo 1/1 à equação inteiramente correta.

j) Substituindo a solução encontrada para α na eq. (4), resulta:

$$\frac{11}{3}mr^2\left[-\frac{6(M+mgr)}{43mr^2}\right] = Tr - mgr \quad \Rightarrow \quad T = \frac{21}{43}mg - \frac{22}{43}\frac{M}{r}$$

Para que o fio permaneça tracionado, é necessário que:

$$T > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{21}{43}mg - \frac{22}{43}\frac{M}{r} > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M < \frac{21}{22}mgr}$$

Adote uma nota na escala 0/1 a 1/1 para a resolução do seu colega, atribuindo 1/1 apenas a uma resposta inteiramente correta neste item.