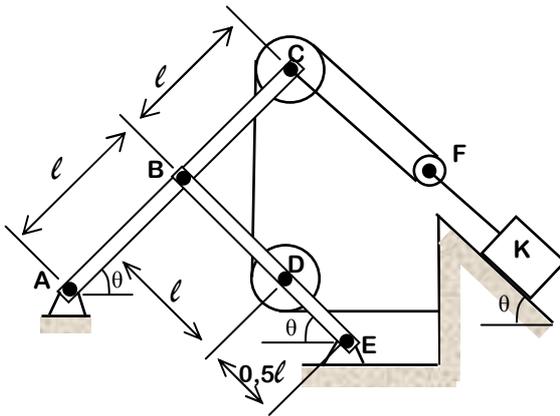




**PME 2100 – MECÂNICA A – Substitutiva – 03 de julho de 2009**

**Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de calculadoras)**

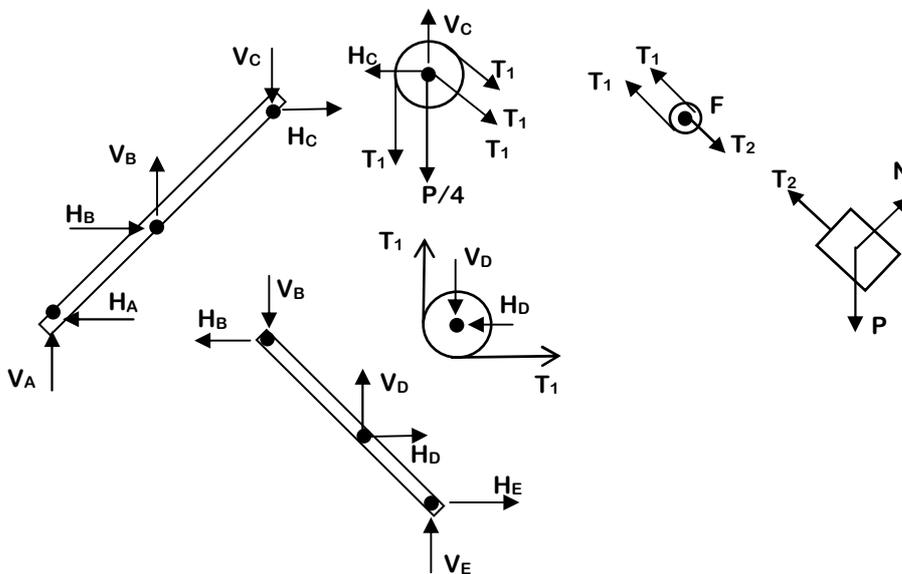
**QUESTÃO 1 (3,0 pontos).** O diagrama abaixo mostra um sistema em equilíbrio. O peso do bloco K é P e o peso da polia C é P/4. Despreze outros pesos. As polias C e D possuem raio r e a polia F possui raio r/2. Não há atrito entre o plano inclinado e o bloco K. Os cabos são ideais; não há atritos de qualquer espécie nas polias e em seus mancais. Considere  $\theta=45^\circ$ . Nestas condições, pedem-se:



- Os diagramas de corpo livre de todas as polias, do bloco K e das barras AC e BE;
- as reações nos mancais C e D;
- as reações nas articulações A e E

**Solução**

Diagramas de corpo livre das barras, polias e do bloco K



Para o bloco somente, temos:

$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &\Rightarrow -T_2 \cos \theta + N \sin \theta = 0 \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow T_2 \sin \theta - P + N \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Resolvendo as equações (1) tem-se:



$$N = P \cos \theta$$

$$T_2 = P \sin \theta$$

Do equilíbrio da polia de centro F obtemos

$$2T_1 = T_2 \Rightarrow T_1 = \frac{P \sin \theta}{2} = \frac{P\sqrt{2}}{4}$$

Do equilíbrio da polia de centro C,

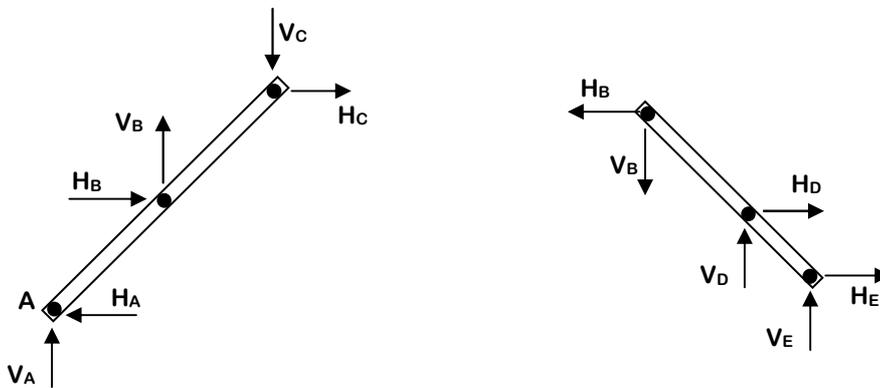
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow 2T_1 \cos \theta = H_c \Rightarrow H_c = 2 \frac{P\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{P}{2}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow T_1 + 2T_1 \sin \theta + \frac{P}{4} = V_c \Rightarrow V_c = P \left[ \frac{3 + \sqrt{2}}{4} \right] \quad (2)$$

Do equilíbrio da polia de centro D,

$$H_D = V_D = T_1 = \frac{P \sin \theta}{2} = \frac{P\sqrt{2}}{4}$$

Finalmente, considerando somente as barras AC e BE,



barra AC

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow -H_A + H_B + \frac{P}{2} = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P \left( \frac{3 + \sqrt{2}}{4} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -l \frac{\sqrt{2}}{2} H_A - l \frac{\sqrt{2}}{2} V_A - \frac{P}{2} l \frac{\sqrt{2}}{2} - P \left( \frac{3 + \sqrt{2}}{4} \right) l \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \quad (5)$$

$$-H_A - V_A - P \left( \frac{5 + \sqrt{2}}{4} \right) = 0$$



barra BE

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow -H_B + H_E + \frac{P\sqrt{2}}{4} = 0 \quad (6)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow -V_B + V_E + \frac{P\sqrt{2}}{4} = 0 \quad (7)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \frac{P\sqrt{2}}{4} l \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{P\sqrt{2}}{4} l \frac{\sqrt{2}}{2} + V_E \frac{3}{2} l \frac{\sqrt{2}}{2} + H_E \frac{3}{2} l \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \quad (8)$$

$$3V_E + 3H_E + P\sqrt{2} = 0$$

As equações (3) a (8) são resolvidas para se obter  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $H_E$  e  $V_E$  da seguinte maneira:

de (3),  $H_B = H_A - \frac{P}{2}$  em (6),

$$-H_A + \frac{P}{2} + H_E + \frac{P\sqrt{2}}{4} = 0 \Rightarrow -H_A + H_E = -\frac{P}{2} - \frac{P\sqrt{2}}{4} \quad (9)$$

de (4),  $V_B = -V_A + P\left(\frac{3+\sqrt{2}}{4}\right)$  em (7),

$$V_A - \frac{3P}{4} - \frac{P\sqrt{2}}{4} + V_E + \frac{P\sqrt{2}}{4} = 0 \Rightarrow V_A + V_E = \frac{3P}{4} \quad (10)$$

de (10)  $V_E = \frac{3P}{4} - V_A$  em (8)

$$3\frac{3P}{4} - 3V_A + 3H_E + P\sqrt{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{3P}{4} + H_E + \frac{P\sqrt{2}}{3} \quad (11)$$

(11) em (5) fornece

$$-H_A - \frac{3P}{4} - H_E - \frac{P\sqrt{2}}{3} - \frac{5P}{4} - \frac{P\sqrt{2}}{4} = 0 \Rightarrow -12H_A - 12H_E = 24P + 7P\sqrt{2} \quad (12)$$

Resolvendo-se (9) e (12) obtém-se:

$$H_A = -\frac{P(9+2\sqrt{2})}{12}$$

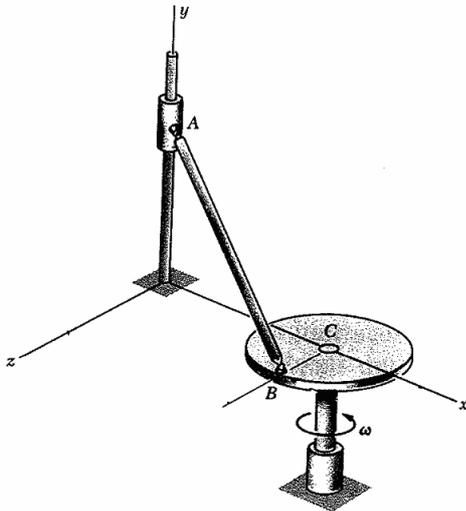
$$H_E = -\frac{P(15+5\sqrt{2})}{12}$$

$H_E$  em (11) fornece

$$V_A = -\frac{P(6+\sqrt{2})}{12}$$

e, finalmente,  $V_A$  em (10) fornece

$$V_E = \frac{P(15+\sqrt{2})}{12}$$



**QUESTÃO 2 (3,0 pontos).** A barra  $AB$ , de comprimento  $L=5r$ , está conectada por meio de juntas esféricas ao cursor  $A$  e ao disco rotativo de raio  $r$  e centro  $C = (a,0,0)$  com  $a = r\sqrt{15}$ . Sabendo-se que este disco gira no sentido anti-horário com velocidade angular  $\omega$  constante e que a barra  $AB$  não pode girar em torno de seu próprio eixo, ou seja,  $\vec{\Omega} \cdot (B-A) = 0$  pede-se, para a configuração indicada na figura:

- A velocidade do cursor  $A$ .
- A velocidade angular  $\vec{\Omega}$  da barra  $AB$ .
- O eixo helicoidal instantâneo da barra  $AB$ .

### SOLUÇÃO

Da geometria do problema temos:

$$|(B-O)|^2 = |(B-C)|^2 + |(C-O)|^2 \Rightarrow |(B-O)|^2 = r^2 + (r\sqrt{15})^2 \Rightarrow |(B-O)| = 4r$$

$$|(A-B)|^2 = |(B-O)|^2 + |(A-O)|^2 \Rightarrow |(A-O)| = 3r$$

Com isso, temos as coordenadas de todos os pontos de interesse:

$$A(0;3r;0) \quad B(r\sqrt{15};0;r) \quad C(r\sqrt{15};0;0)$$

Da equação fundamental da cinemática aplicada ao disco de centro  $C$  temos:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (B-C) = \vec{0} + \omega \vec{j} \wedge r \vec{k} \Rightarrow \vec{v}_B = \omega r \vec{i} \quad (1)$$

A mesma equação aplicada à barra fornece:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge (A-B) = \omega r \vec{i} + (\Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}) \wedge (-r\sqrt{15} \vec{i} + 3r \vec{j} - r \vec{k}) \quad (2)$$

Sabemos porém que  $\vec{v}_A = v_A \vec{j}$  pois  $A$  desloca-se sobre a guia vertical.

Assim, a eq. (2) fica:

$$v_A \vec{j} = \omega r \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ -r\sqrt{15} & 3r & -r \end{vmatrix} = (\omega r - r\Omega_y - 3r\Omega_z) \vec{i} + (-r\sqrt{15}\Omega_z + r\Omega_x) \vec{j} + (3r\Omega_x + r\sqrt{15}\Omega_y) \vec{k} \quad (3)$$

A eq. (3) fornece 3 equações escalares:



$$\vec{i} : 0 = \omega r - r\Omega_y - 3r\Omega_z \quad (4)$$

$$\vec{j} : v_A = -r\sqrt{15}\Omega_z + r\Omega_x \quad (5)$$

$$\vec{k} : 0 = 3r\Omega_x + r\sqrt{15}\Omega_y \quad (6)$$

Temos, portanto 4 incógnitas. A equação adicional vem da condição de corpo rígido para a barra AB:

$$\vec{v}_A \cdot (A - B) = \vec{v}_B \cdot (A - B) \Rightarrow$$

$$v_A \vec{j} \cdot (-r\sqrt{15}\vec{i} + 3r\vec{j} - r\vec{k}) = \omega r \vec{i} \cdot (-r\sqrt{15}\vec{i} + 3r\vec{j} - r\vec{k}) \Rightarrow$$

$$3r \cdot v_A = -\omega r^2 \sqrt{15} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_A = -\frac{\sqrt{15}\omega r}{3} \vec{j}} \quad (7)$$

**resposta (a)**

Para a obtenção do vetor rotação da barra temos que resolver o sistema formado por (4), (5) e (6). No entanto, este sistema é composto por equações linearmente dependentes, como se pode verificar pelo cálculo do determinante da matriz do sistema:

$$\begin{vmatrix} 0 & -r & -3r \\ r & 0 & -r\sqrt{15} \\ 3r & r\sqrt{15} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, faz-se necessário utilizar uma equação extra independente, qual seja, a condição de não-rotação da barra AB em torno de seu próprio eixo:

$$\vec{\Omega} \cdot (B - A) = 0 \Rightarrow (\Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}) \cdot (-r\sqrt{15}\vec{i} + 3r\vec{j} - r\vec{k}) = -r\sqrt{15} + 3r\Omega_y - r\Omega_z \quad (8)$$

de (6),

$$0 = 3r\Omega_x + r\sqrt{15}\Omega_y \Rightarrow \Omega_x = -\frac{\sqrt{15}\omega\Omega_y}{3} \quad (9)$$

de (4),

$$0 = \omega r - r\Omega_y - 3r\Omega_z \Rightarrow \Omega_z = \frac{\omega}{3} - \frac{\Omega_y}{3} \quad (10)$$

de (9) e (10) em (8),

$$r\sqrt{15} \frac{\sqrt{15}\Omega_y}{3} + 3r\Omega_y - \frac{r\omega}{3} + \frac{r\Omega_y}{3} = 0 \Rightarrow \Omega_y = \frac{\omega}{25}$$

em (9)

$$\Omega_x = -\frac{\omega\sqrt{15}}{75}$$

em (10)



$$\Omega_z = \frac{24\omega}{75}$$

Assim,

$$\vec{\Omega} = \frac{\omega}{75}(-\sqrt{15}\vec{i} + 3\vec{j} + 24\vec{k})$$

resposta (b)

Os pontos  $E$  do eixo helicoidal instantâneo de um sólido situam-se sobre uma reta paralela ao seu vetor de rotação instantânea  $\vec{\Omega}$ , cuja equação é dada por:

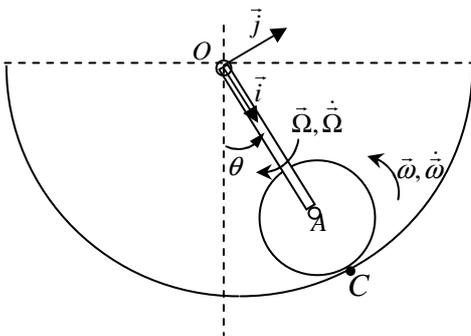
$$E = O + \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_O}{|\vec{\Omega}|^2} + \lambda \vec{\Omega} \tag{Eq.16}$$

Tomando o ponto  $A$  como pólo, temos:

$$E = A + \frac{\frac{\omega}{75}(-\sqrt{15}\vec{i} + 3\vec{j} + 24\vec{k}) \wedge \frac{-\omega r \sqrt{15}}{3} \vec{j}}{\frac{\omega^2}{75^2}(15+9+24^2)} + \lambda \vec{\Omega}$$

$$E = A + 75\sqrt{15}r\vec{i} + \frac{5}{8}r\vec{k} + \lambda \vec{\Omega}$$

resposta (c)



**QUESTÃO 3: (4,0 pontos).** Um disco de massa  $m$  e raio  $r$  articulado pelo seu centro  $A$  a uma barra  $OA$  de massa  $M$  e comprimento  $R$  rola sem escorregar sobre uma superfície de raio  $r+R$ , conforme indicado na figura. Admitindo-se que o sistema se encontre inicialmente em repouso quando o ângulo  $\theta$  entre a barra e a vertical for  $\theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \pi/2$ ), pede-se:

- Os diagramas de corpo livre da barra e do disco em uma posição genérica como a mostrada na figura.
- O trabalho que cada uma das forças atuantes no sistema realiza (justificar, para os casos em que o trabalho é nulo).
- A velocidade e a aceleração angulares do disco e da barra para  $\theta = 0$ .
- As reações horizontais nas articulações  $O$  e  $A$  para  $\theta = 0$ .

Dados:  $J_{Az}^{Disco} = \frac{1}{2}mr^2$  e  $J_{Oz}^{Barra} = \frac{1}{3}MR^2$

**SOLUÇÃO**

Como o disco rola sem escorregar, o ponto de contacto  $C$  corresponde ao CIR. Logo, podemos calcular a velocidade de  $A$  aplicando-se a equação fundamental da Cinemática entre os pontos  $C$  e  $A$  do disco:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \omega \vec{k} \wedge (-r\vec{i}) = \vec{0} - \omega r \vec{j} = \omega r \vec{j} \tag{Eq.1}$$

Como  $A$  também pertence à barra, podemos calcular a sua velocidade aplicando-se a equação fundamental da Cinemática entre os pontos  $A$  e  $O$  da barra, ou seja:



$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + (-\Omega \vec{k}) \wedge R \vec{i} = \vec{0} - \Omega R \vec{j} \quad (\text{Eq.2})$$

Igualando-se (1) e (2) determinamos a relação entre as velocidades angulares da barra e do disco:

$$\bar{\Omega} = -\frac{r}{R} \bar{\omega} \quad (\text{Eq.3})$$

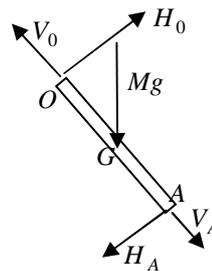
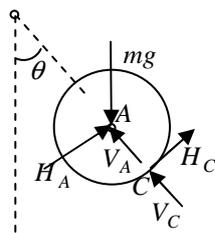
Como a base  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  é solidária à barra  $OA$  e os vetores de rotação  $\bar{\Omega}$  e  $\bar{\omega}$  têm direção constante, podemos derivar a expressão acima para obter a relação entre as acelerações angulares da barra e do disco:

$$\dot{\bar{\Omega}} = -\frac{r}{R} \dot{\bar{\omega}} \quad (\text{Eq.4})$$

De posse das relações anteriores, podemos expressar as acelerações do ponto  $A$  e do baricentro  $G$  da barra em função da velocidade angular do disco:

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{0} + (-\dot{\Omega} \vec{k}) \wedge R \vec{i} + (-\Omega \vec{k}) \wedge (-\Omega \vec{k} \wedge R \vec{i}) = -\dot{\Omega} R \vec{j} - \Omega^2 R \vec{i} = -R(\dot{\Omega} \vec{j} + \Omega^2 \vec{i}) \\ \therefore \vec{a}_A &= -R(\dot{\Omega} \vec{j} + \Omega^2 \vec{i}) = -r(\dot{\omega} \vec{j} + \omega^2 \vec{i}) \\ \therefore \vec{a}_G &= -\frac{R}{2}(\dot{\Omega} \vec{j} + \Omega^2 \vec{i}) = -\frac{r}{2}(\dot{\omega} \vec{j} + \omega^2 \vec{i}) \end{aligned} \quad (\text{Eq.5})$$

Para obtermos a variação das velocidades e acelerações angulares em função do ângulo  $\theta$ , aplicaremos o Teorema da Energia Cinética entre os estados  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\theta(t) = 0$ . Antes, porém, é necessário construirmos os diagramas de corpo livre do disco e da barra, com o propósito de identificarmos as forças que realizam trabalho durante a mudança de configuração do sistema. Os citados diagramas, para uma posição  $\theta$  arbitrária, são apresentados nas figuras abaixo:



(Resposta a)

Analisando-se o trabalho realizado pelas forças atuantes no sistema, notamos que:

- As componentes  $V_C, H_C$  da reação  $\vec{R}_C$ , em  $C$ , não realizam trabalho, pois  $C$  tem velocidade nula; logo,  $W_{\vec{R}_C} = \dot{\tau}_{\vec{R}_C} = \vec{R}_C \cdot \vec{v}_C = \vec{R}_C \cdot \vec{0} = 0$ .
- As componentes  $V_O, H_O$  da reação  $\vec{R}_O$  em  $O$  não realizam trabalho, pois  $O$  é um ponto fixo.
- As reações de contacto no ponto  $A$  entre a barra e o disco constituem um par de forças internas ao sistema, com mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos; logo, o trabalho realizado por essas forças é nulo.
- O trabalho realizado pelas forças peso  $Mg$  e  $mg$  entre as posições  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\theta(t) = 0$  é dado por:

$$\tau_g(\theta_0, 0) = Mg \frac{R}{2} (\cos 0 - \cos \theta_0) + mgR (\cos 0 - \cos \theta_0) = g \left( mR + M \frac{R}{2} \right) (1 - \cos \theta_0) = \frac{2m + M}{2} Rg (1 - \cos \theta_0) \quad (\text{Eq.6})$$



**(Resposta b)**

Como o sistema disco+barra parte do repouso, a sua energia cinética inicial é nula. Mas na posição  $\theta(t) = \theta$ , o seu valor é:

$$T(\theta) = T_{Disco}(\theta) + T_{Barra}(\theta) = \frac{1}{2} J_{C_z}^{Disco} \omega^2(\theta) + \frac{1}{2} J_{O_z}^{Barra} \Omega^2(\theta) \quad (\text{Eq.7})$$

Para o disco, tem-se:

$$J_{C_z}^{Disco} = J_{A_z}^{Disco} + mr^2 = \frac{1}{2} mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2 \quad (\text{Eq.8})$$

Substituindo-se as equações (3) e (8) em (6), obtém-se a energia cinética do sistema para uma posição  $\theta$  arbitrária:

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} mr^2 \omega^2(\theta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} MR^2 \Omega^2(\theta) = \frac{3}{4} mr^2 \omega^2(\theta) + \frac{1}{6} MR^2 \Omega^2(\theta) = \frac{9m + 2M}{12} r^2 \omega^2(\theta) \quad (\text{Eq.9})$$

Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética entre as posições  $\theta_0$  e  $\theta$ , resulta:

$$\omega^2(\theta) = 6 \cdot \frac{2m + M}{9m + 2M} \frac{Rg}{r^2} (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (\text{Eq.10})$$

Derivando-se a equação acima em relação ao tempo, obtém-se:

$$\omega(\theta) \dot{\omega}(\theta) = 3 \cdot \frac{2m + M}{9m + 2M} \frac{Rg}{r^2} (-\sin \theta) \cdot \dot{\theta} \quad (\text{Eq.11})$$

Notando, na equação acima, que  $\dot{\theta} = \Omega = -\frac{r}{R} \omega$ , chega-se a:

$$\omega(\theta) \dot{\omega}(\theta) = 3 \cdot \frac{2m + M}{9m + 2M} \frac{Rg}{r^2} \sin \theta \cdot \frac{r}{R} \omega(\theta) \Rightarrow \dot{\omega}(\theta) = 3 \cdot \frac{2m + M}{9m + 2M} \frac{g}{r} \sin \theta \quad (\text{Eq.12})$$

Particularizando-se expressão (10) para a configuração  $\theta = 0$  e utilizando-se a relação (3), obtém-se as velocidades angulares do disco e da barra, dadas por

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \sqrt{6 \cdot \frac{2m + M}{9m + 2M} \frac{Rg}{r^2} (1 - \cos \theta_0)} \\ \Omega(0) &= -\frac{r}{R} \sqrt{6 \cdot \frac{2m + M}{9m + 2M} \frac{Rg}{r^2} (1 - \cos \theta_0)} \end{aligned} \quad (\text{Eq.13})$$

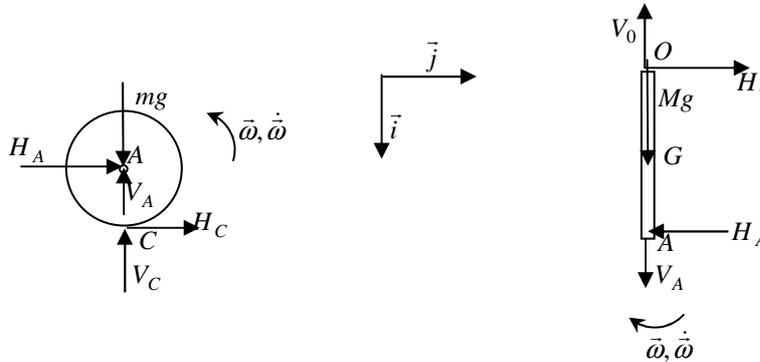
e também as suas respectivas acelerações angulares :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(0) &= 0 \\ \dot{\Omega}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq.14})$$



(Resposta c)

Consideraremos agora os diagramas de corpo livre para a particular posição  $\theta = 0$ :



Tomando-se por referência os diagramas de corpo livre acima, aplicaremos o *TMB* segundo a direção  $\vec{i}$  e o *TMA* à barra e ao disco. Para o primeiro, adotaremos como pólo o ponto fixo  $O$  e para o segundo o baricentro  $A$ . Além disso, utilizaremos as expressões das acelerações dos baricentros  $G$  e  $A$  da barra, já particularizadas para a posição  $\theta = 0$ . Portanto, para a barra, tem-se:

$$H_O - H_A = Ma_{Gx} = M \left( -\frac{r}{2} \dot{\omega}(0) \right) = 0 \quad (\text{Eq.15})$$

$$-H_A R = J_{Oz}^{Barra} \cdot \dot{\omega}(0) = 0 \quad (\text{Eq.16})$$

E, para o disco, tem-se:

$$H_A + H_C = ma_{Ax} = m(-r\dot{\omega}(0)) = 0 \quad (\text{Eq.17})$$

$$H_C r = J_{Az}^{Disco} \cdot \dot{\omega}(0) = \frac{1}{2} mr^2 \cdot 0 = 0 \quad (\text{Eq.18})$$

Resolvendo-se o sistema de equações acima, chega-se a:

$$H_A = H_O = 0$$

(Resposta d)